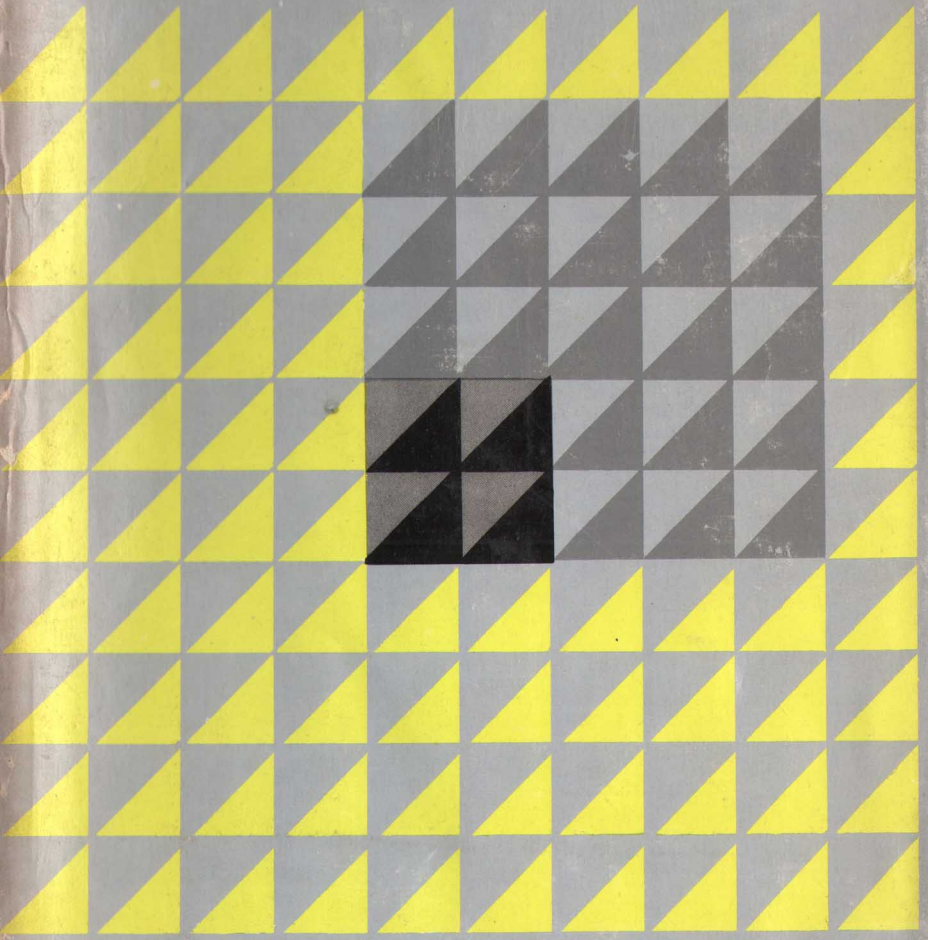
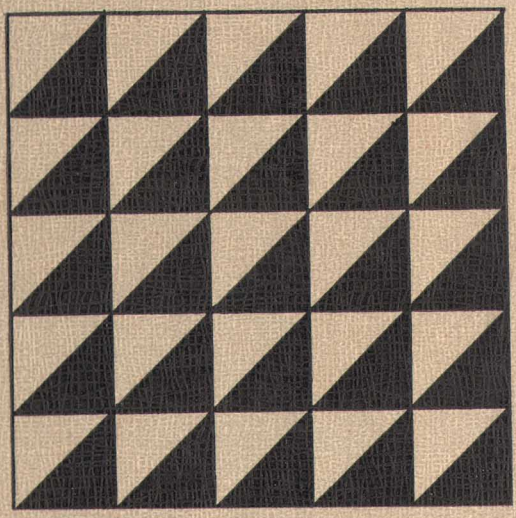
LUCIENNE FÉLIX

EXPUNERE MODERNĂ A MATEMATICII ELEMENTARE



editura ştiinţifică



Coperta şi supracoperta: DUMITRU IONESCU

LUCIENNE FÉLIX
Exposé moderne des mathématiques élémentaires
Troisième édition
© **DUNOD**, PARIS, 1966

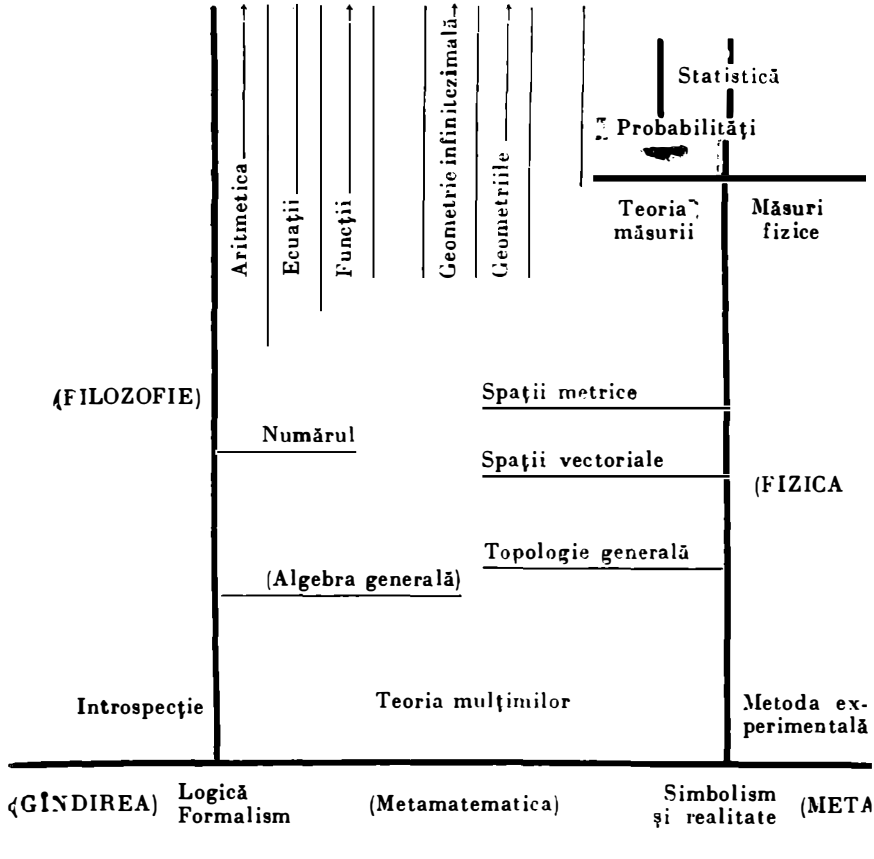
EXPUNERE MODERNĂ A MATEMATICII ELEMENTARE

LUCIENNE FÉLIX

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
București, 1973

MATEMATICA

văzută din punctul de vedere al matematicii elementare



CUVÎNT ÎNAINTE

În zilele noastre, nici o elaborare sistematică a matematicii nu poate fi considerată satisfăcătoare dacă nu pune în evidență *unitatea* acestei științe; fiindcă în ciuda diversității structurilor considerate — de la introducerea noțiunilor simple cum sînt întregii și fracțiile, punctele și dreptele, pînă la noțiunile cele mai complexe — există în matematică o *continuitate de metodă*. În acest edificiu își găsesc locul și rezultatele cunoscute încă din copilărie — un loc uneori modest și accesoriu, alteori fundamental. De aceea, înainte de a aborda studiile de nivel înalt, este necesar, din punct de vedere logic și psihologic, să se reelaboreze, într-o formă satisfăcătoare sub aspect matematic, ansamblul rezultatelor și cunoștințelor acumulate în cursul studiilor elementare, cunoștințe care sînt încă adînc impregnate cu elemente senzoriale, fapt justificat prin apelul necontenit la experiența fizică și la reprezentarea intuitivă, neanalizată, despre spațiu.

În afară de aceasta, teoriile și aplicațiile lor recurg, cu titlu accesoriu, la teoreme de aritmetică, de algebră sau de geometrie euclidiană, care nu pot fi nici ignorate, nici admise fără demonstrație. Cu prilejul expunerii teoriilor elementare și a capitolelor care constituie continuarea directă a acestora, vom lua un prim contact cu noțiunile, metodele și simbolurile specifice matematicii superioare.

Metoda adoptată în această lucrare este cea axiomatică. Într-adevăr, prima problemă care se pune este aceea a coordo-

nării noțiunilor care ne sînt familiare, și aceasta chiar cu prețul că enunțurile binecunoscute vor trebui să îmbrace forme noi. Expunerea constă atunci în a alege unele din aceste enunțuri în calitate de axiome, și în a arăta că ansamblul de enunțuri, astfel ales, este suficient pentru a deduce din el toate celelalte rezultate ale teoriei expuse. Ne-am străduit să alegem, pentru a fi ridicate la rangul de axiome, rezultatele cele mai necesare pentru intuirea obiectelor care urmează să fie introduse, fără însă să urmărim reducerea la minimum a conținutului lor. Introducerea progresivă a acestor axiome pune în evidență aporturile lor succesive, ceea ce pregătește terenul pentru generalizări dincolo de domeniul clasic al numărului real sau al spațiului euclidian.

Elementele astfel definite au un caracter abstract. Obiectele concepute plecînd nemijlocit de la experiența fizică constituie modele ale acestor elemente abstracte, modele asupra cărora se poate opera cu raționamentul matematic, în măsura în care corespund structurilor puse în evidență. Așa se face că vom putea reprezenta vectorii prin săgeți, vom putea desena figuri și vom putea folosi modele mecanice sau electrice: toate modelele cu aceeași structură (vom spune: cu structuri *izomorfe*) sînt echivalente din punct de vedere matematic. Totuși, în cadrul acestei expuneri elementare, ne vom ocupa în mod special, pe parcursul Cărților a II-a și a III-a, de studierea modelelor clasice: mulțimi de numere, mulțimi de puncte în spațiul cu 1, 2 sau 3 dimensiuni.

Ne propunem să studiem materialul care constituie,[1] prin tradiție, matematica elementară, într-o formă care pregătește terenul pentru abordarea ulterioară a studiului matematicii superioare. Cartea I reunește structurile fundamentale. Natura chestiunilor tratate obligă uneori la demonstrații delicate (în special, în legătură cu funcțiile continue) pe care cititorul le poate omite la o primă lectură, dar în felul acesta vor fi introduse toate noțiunile efectiv utile pentru cele expuse în continuare. Fiecare din capitolele acestei prime Cărți este menit mai ales să constituie temelia unor elaborări în parte autonome: teoria numerelor, teoria ecuațiilor și a funcțiilor, geometria afină și proiectivă, geometria metrică. De aceea, nu este absolut indispensabil să se studieze în întregime această Carte înainte de a aborda unul sau altul din capitolele Cărților următoare; ea poate servi drept carte de referință pentru cititorul care dorește să

investigheze direct o parte a edificiului, chiar dacă nu-i va studia fundamentele decît după aceea.

Rezultă de aici o deosebit de mare libertate în utilizarea acestei lucrări în cadrul ultimului an de studii liceale: ordinea subiectelor tratate va putea fi aleasă după voie, rezervînd anumite teme pentru a fi recomandate ca lectură complementară, mai mult sau mai puţin aprofundată, în funcţie de preferinţele şi preocupările elevilor, şi în funcţie de gradul lor de maturitate.

Luată în ansamblu, această lucrare de iniţiere conduce direct la primele lucrări introductive în matematica superioară, în particular la *Cursul de matematică generală* de C. PISOT şi M. ZAMANSKY, la *Introducerea în algebra şi analiza modernă* de M. ZAMANSKY, ca şi la alte lucrări din această colecţie*. Sperăm că cititorul va găsi în ea o introducere utilă şi nu prea dificilă, care îl va încuraja să-şi continue studiile de matematică.

Mulţumesc editurii Dunod pentru atenţia acordată acestei lucrări şi pentru preocuparea privind prezentarea ei grafică.

Lucienne FÉLIX

* Collection Universitaire de Mathématiques, Ed. Dunod, Paris.

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A TREIA

Pregătirea acestei noi ediții ne-a dat prilejul, în primul rînd, de a revizui și moderniza modul de prezentare a Cărții a III-a, consacrate analizei. Accentul este pus acum pe structurile în care se înscriu diferitele chestiuni referitoare la studiul funcțiilor, și aceste structuri sînt vizualizate cu ajutorul schemelor. Acum 15—20 ani, schemele erau folosite cel mult pentru a consemna pe tablă mersul explicațiilor profesorului. Într-o concepție axată pe noțiunile de mulțime și relație, aceste scheme fac parte integrantă din expunere; ele fac sesizabil nemijlocit însuși obiectul de studiu, ușurează expunerea și, mai ales, permit perceperea sub un aspect mai general a noțiunilor despre care mult prea adesea se consideră că sînt asociate exclusiv funcțiilor numerice.

În afară de aceasta, există tendința, devenită de acum ireversibilă, de a introduce, dacă nu în „matematica elementară" — obiect de studiu nu prea precis definit — măcar în programul ultimelor clase ale învățămîntului mediu, domenii din ce în ce mai largi ale analizei. De aceea, în noua redactare, nu numai că am completat studiul funcțiilor logaritmică și exponențială, dar am adăugat și cîteva pagini consacrate ecuațiilor diferențiale și notației diferențiale. Potrivit spiritului acestei lucrări, nu ne-am limitat la a da pur și simplu regulile și formulele referitoare la cele cîteva exemple care figurează în programul de învățămînt; dar nici expunerea sistematică a teoriei acestor subiecte nu intra în intențiile noastre. Propunem de aceea o

introducere în aceste probleme importante într-o formă accesibilă cititorilor noştri, dar care pune totuşi în lumină natura problemelor noi, cu scopul de a pregăti terenul pentru dezvoltări detaliate rezervate pentru o etapă ulterioară de studiu.

Dintre modificările mai puţin importante, semnalăm cîteva pagini noi referitoare la numărabilitate şi revizuirea cîtorva paragrafe; de pildă, noţiunea de asimptotă şi cea de direcţie asimptotică sînt abordate, aşa cum se şi cuvine, în cadrul geometriei afine.

Sperăm să îndreptăţim în felul acesta încrederea pe care ne-au dovedit-o numeroşi cititori francezi şi din alte ţări. Ne facem o plăcută îndatorire din a mulţumi tuturor acelora care, profesori, traducători sau cititori, au binevoit să ne comunice remarcile lor, ca şi editurii Dunod pentru deosebita grijă pe care a acordat-o acestei lucrări.

Lucienne FÉLIX
martie 1965

TABLA DE MATERII

CARTEA ÎNTÎI
STRUCTURI FUNDAMENTALE

CAPITOLUL 1. **Vocabularul și simbolurile din teoria mulțimilor. Operații.**

1. *Definiții introductive* 25
2. *Relații de echivalență* 28
3. *Relații de ordine* 30
4. *Operațiile* 31

CAPITOLUL 2. **Numerele**

1. *Întregii naturali* 37
   - I. Adunarea 37
   - II. Relația de ordine 38
   - III. Bine ordonare 40
   - IV. Înmulțirea 44
   - V. Mulțimea N a întregilor naturali este arhimedeană 47

2. *Numere relative. Simetrizare* 48
   - I. Noțiunea de izomorfism a două structuri 49
   - II. Extensie prin simetrizare 49

3. *Fracții și numere raționale* 55
   - I. Fracțiile 56
   - II. Numerele raționale 58

III. În raport cu adunarea și înmulțirea, mulțimea Z a întregilor este izomorfă cu o submulțime a mulțimii Q a numerelor raționale 60

4. *Noțiuni despre numerele reale* 63

I. Introducerea rădăcinilor pătrate 63
II. Axioma completitudinii 65
III. Proprietăți ale mulțimii R a numerelor reale 67
IV. Mulțimea Q a numerelor raționale ca submulțime a mulțimii R a numerelor reale 69

CAPITOLUL 3. **Spații vectoriale**

I. Vectori. Operații vectoriale 70
II. Spații vectoriale 74
III. Spațiu punctual imagine a unui spațiu vectorial 79

CAPITOLUL 4. **Aplicațiile unei mulțimi într-o mulțime. Transformări punctuale. Funcții numerice**

Partea întîi: PUNCT DE VEDERE ALGEBRIC

1. *Noțiunea generală de aplicație* 83

I. Definiție 83
II. Grupul aplicațiilor unei mulțimi pe ea însăși .. 86

2. *Transformări punctuale* (*Generalități*) 88

I. Vocabular 88
II. Clasificarea transformărilor punctuale 90
III. Transmutata unei transformări punctuale printr-o alta 90

3. *Funcții numerice de o variabilă* (*Generalități*) 91

I. Definiții 91
II. Creșterea și descreșterea unei funcții numerice în mulțimea ei de definiție 94

Partea a doua: PUNCT DE VEDERE TOPOLOGIC

1. *Generalități: Vecinătăți. Limite* 96
2. *Studiul local al unei funcții numerice* 101
3. *Trecerea de la studiul local la studiul global* 105

I. Teoreme fundamentale 105
II. Aplicații la funcții definite, continue, derivabile 109
III. Extensia noțiunilor de vecinătate și de limită 112
IV. Aplicații ale noțiunii de continuitate 113

CAPITOLUL 5. **Introducere în geometria metrică**

1. *Definiția spațiilor metrice euclidiene* 115
I. Introducerea unei metrici 116
II. Aplicație la spațiul punctual cu două dimensiuni 119
III. Geometrie metrică în spațiul cu trei dimensiuni 127
IV. Orientarea spațiilor metrice cu două și trei dimensiuni 128
2. *Produse de vectori în spațiul cu trei dimensiuni* 130
I. Produs scalar 131
II. Produs vectorial (Geometrie cu trei dimensiuni) 133
III. Notația trigonometrică 136
3. *Unghiuri* 137
I. Cosinusul și sinusul unei perechi ordonate de vectori unitari 137
II. Congruența perechilor de vectori. Unghiuri..... 139
4. *Limite referitoare la funcțiile trigonometrice. Radian. Calculul lui* π 143
I. Unghiuri și coarde..... 143
II. Limita raportului dintre lungimea c a coardei cercului de rază unitate și măsura φ a unghiului la centru 145
III. Calculul aproximativ al numărului π 146

CAPITOLUL 6. **Algebra booleană pe mulțimi. Măsuri. Probabilități**

1. *Algebra mulțimilor* 149
2. *Măsuri* 155
I. Definiții 155
II. Măsură naturală pe dreapta reală..... 156
III. Măsuri în spațiul cu două dimensiuni..... 158
A) Măsuri naturale în geometria afină 158
B) Aplicații în geometria metrică 162
1) Arii plane 162
2) Masa unui segment de dreaptă. Densitate 163
IV. Măsuri în spațiul cu trei dimensiuni..... 164
V. Lungimile curbelor. Ariile suprafețelor strîmbe.... 165
3. *Noțiuni introductive de probabilitate*..... 167
I. Măsuri pe o mulțime de evenimente..... 168
II. Probabilități (Cazul mulțimilor finite)..... 170
III. Probabilități continue (Cazul mulțimilor infinite) 174

CARTEA A DOUA

ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

PARTEA I: Teoria numerelor

CAPITOLUL 1. Întregii

1. *Numărări (Analiză combinatorie)* 178
2. *Împărţirea euclidiană* 183
3. *Divizibilitatea. Congruenţele de întregi* 185
4. *Multipli şi divizori. Numere prime* 189
I. Multipli şi divizori ai unui întreg 189
II. Teoremă fundamentală 193
III. Aplicaţii. Multipli şi divizori comuni 194
5. *Studiul numerelor prime* 197
6. *Numeraţia* 199
I. Principiul numeraţiei de poziţie 199
II. Reguli practice ale operaţiilor 200
III. Criterii de divizibilitate 204
7. *Algoritmul lui Euclid. Fracţiile de mărimi* 207
I. Algoritmul lui Euclid în mulţimea întregilor 207
II. Algoritmul lui Euclid în mulţimea mărimilor 211

CAPITOLUL 2. Fracţii. Numere raţionale. Numere zecimale

I. Fracţii 218
II. Fracţii zecimale 219
III. Inelul fracţiilor zecimale în corpul numerelor raţionale 221

CAPITOLUL 3. Numere reale

1. *Puterea submulţimilor de numere reale* 228
I. Submulţimi numărabile 228
II. Puterea continuului 230
III. Supliment despre numerele cardinale 233
2. *Logaritmi. Exponenţi generalizaţi* 235

PARTEA A II-A: **Expresii algebrice. Rezolvarea ecuațiilor**

CAPITOLUL 1. **Polinoame. Fracții raționale**

I. Definiția unui polinom 241
II. Valori numerice ale unui polinom. Divizibilitate cu $x - \alpha$ 247
III. Împărțirea în inelul polinoamelor 252
1) Cît exact 252
2) Împărțire euclidiană polinoamelor 256
3) Împărțirea în ordinea puterilor crescătoare 259
IV. Fracții raționale cu o nedeterminată 261
V. Polinoame și fracții raționale cu mai multe nedeterminate 263
VI. Notă despre introducerea trigonometriei în problemele de algebră 265

CAPITOLUL 2. **Rezolvarea ecuațiilor**

I. Definiții 270
II. Echivalența ecuațiilor 271
III. Ecuații și sisteme clasice 275

CARTEA A TREIA
ANALIZĂ

CAPITOLUL 1. **Studiul global direct al funcțiilor numerice**

I. Recapitularea definițiilor 283
II. Legea de compoziție în mulțimea funcțiilor 284
III. Funcțiile fundamentale 286
IV. Funcții compuse 290
V. Introducerea unei structuri de corp în mulțimea funcțiilor 292

CAPITOLUL 2. **Studiul local al funcțiilor**

I. Recapitularea definițiilor 294
II. Continuitate și limită 295
III. Derivata 298
IV. Extinderea noțiunilor de limită și de derivată 305

CAPITOLUL 3. **Trecere de la studiul local la studiul global al funcțiilor numerice**

I. Recapitularea teoremelor referitoare la funcțiile continue derivabile 309
II. Creșterea funcțiilor derivabile 310

CAPITOLUL 4. **Grafice**

I. Studiul global 313
II. Studiul local 314
III. Studiul ramurilor infinite 319
IV. Noţiuni de geometrie infinitezimală a curbelor plane. Tangentă. Curbură 323

CAPITOLUL 5. **Aplicaţiile teoremelor generale**

I. Funcţii algebrice 329
II. Aplicarea studiului funcţiilor la rezolvarea ecuaţiilor 337

CAPITOLUL 6. **Primitivele**

I. Primitiva generală a unei funcţii 341
II. Interpretarea geometrică a primitivelor 345
III. Funcţia logaritmică şi funcţia exponenţială .. 349
IV. Noţiuni de ecuaţii diferenţiale 356
V. Notaţia diferenţială 362

CAPITOLUL 7. **Numerele complexe**

I. Introducere istorică 367
II. Corpul numerelor complexe 372
III. Funcţii numerice de o variabilă complexă 379
A) Topologie în planul complex 379
B) Variaţia argumentului de-a lungul unei curbe închise. Teorema fundamentală a algebrei (teorema lui d'Alembert) 382
IV. Scurtă trecere în revistă a aplicaţiilor numerelor complexe 385

CARTEA A PATRA

GEOMETRIILE

PARTEA I: **Geometrie afină şi geometrie proiectivă**

CAPITOLUL 1. **Geometrie afină**

1. *Figurile fundamentale* 391
I. Geometrie plană, două dimensiuni 391
II. Geometrie în spaţiul R^3 cu trei dimensiuni 395
III. Teoria baricentrului 397

2. *Transformările punctuale afine* 400
I. Transformarea afină generală 401
II. Transformări afine particulare 402
A) Translaţia 402
B) Omotetia 404
C) Afinităţile 411
D) Proiecţia unui plan pe un altul, paralelă cu direcţia unei drepte 415
3. *Transformări liniare. Noţiunea de matrice* 416

CAPITOLUL 2. **Noţiuni de geometrie proiectivă**
I. Perspectiva unui plan pe un plan 427
II. Invariant referitor la puncte coliniare 431
III. Reperarea unui punct în geometria proiectivă 435
IV. Transformările proiective plane 437
V. Diviziune armonică. Fascicule armonice 439
VI. Schiţă de introducere axiomatică directă a geometriei proiective 443

PARTEA A II-A: **Geometrii metrice**

CAPITOLUL 1. **Geometrie metrică euclidiană**
1. *Relaţii metrice* 450
I. Relaţii între lungimi 450
II. Geometrie analitică metrică plană 454
III. Relaţii metrice care introduc funcţii trigonometrice 456
2. *Cercuri. Sfere* 459
I. Circumferinţă şi unghiuri 459
II. Puterea unui punct în raport cu o circumferinţă 466
III. Familii de cercuri 470
IV. Noţiuni despre corespondenţa prin polare reciproce 475
3. *Transformările punctuale ale geometriei metrice* 476
I. Transformările afine în geometria metrică 476
II. Deplasări şi antideplasări 478
1) Introducere 478
2) Studiul intrinsec 481
A) Spaţiu cu o dimensiune 481
B) Spaţiu cu două dimensiuni 482

C) Spaţiu cu trei dimensiuni 487
D) Mişcarea unei figuri nedeformabile 495
III. Similitudinea 498

CAPITOLUL 2. **Inversiunea. Elemente de geometrie analagmatică**
I. Inversiunea ca transformare, în geometria metrică 503
II. Noţiuni de geometrie analagmatică 513

CAPITOLUL 3. **Noţiuni de geometrii metrice necuclidiene**
I. Preliminarii 519
II. Geometria lui Lobacevski 526
III. Modelul lui Poincaré pentru geometria lui Lobacevski (în plan) 536
IV. Geometrie sferică, model al unei geometrii a lui Riemann 540

PARTEA A III-A: **Conicele**

I. Definiţie în conul de revoluţie..... 547
II. Conicele în geometria analitică. Grad..... 553
III. Proprietăţi afine ale conicelor cu centru..... 560
IV. Conicele în geometria proiectivă..... 562
V. Punct de vedere tangenţial..... 564

ANEXĂ 567
INDEX 599

SIMBOLURI GENERALE

Logică

$\Longrightarrow$ „implică", „atrage după sine", „are drept consecință". Deducție, inferență logică.

$\Longleftrightarrow$ „echivalent cu". Echivalență logică.

$\forall$ „oricare ar fi" sau „pentru orice". Cuantificator universal.

$\exists x:$ „există cel puțin un x astfel încît". Cuantificator existențial.

Teoria mulțimilor

$\in$ „aparține lui". Apartenența unui element la o mulțime.

$\notin$ „nu aparține lui".

$\subseteq$ „este cuprins în". Incluziunea unei mulțimi într-o altă mulțime.

$\subset$ „este cuprins strict în", sau „este cuprins", fără altă precizare.

$\cup$ „reunit cu". Reuniunea a două submulțimi.

$\cap$ „intersectat cu". Intersecția a două submulțimi.

$\mathbf{C}_A B$ „complementara lui B în raport cu A".

$\mathbf{C}B$ „complementara lui B în raport cu mulțimea de referință".

$\varnothing$ „mulțimea vidă".

Principalele mulțimi

N mulțimea numerelor naturale

Z, Q, R, R^+, C mulțimea întregilor relativi, respectiv a numerelor raționale, a numerelor reale, a numerelor reale pozitive, a numerelor complexe.

$(\mathfrak{R})$ sau (R) dreapta reală.

$[a, b]$ interval închis, în (R)

$]a, b[$ interval deschis, în (R).

$(R^2), (R^3), (R^n)$ spații reale, cu 2, cu 3, cu n dimensiuni.

Relații

$\equiv$ sau $\sim$ „echivalent cu". Semnul unei relații de echivalență.

$=, \neq, \simeq$ „egal", „neegal", „aproximativ egal".

$\leqslant$ „mai mic decît sau egal cu". Inegalitate în sens larg.

$<$ „strict mai mic decît" sau „mai mic decît" fără altă precizare.

Operații

$|x|$ „valoarea absolută" a lui $x \in R$, sau „modulul" lui $x \in C$.

$+, -, \cdot$ sau $\times$ „plus", „minus", „înmulțit cu".

$\frac{a}{b}$ sau a/b „a pe b". Cîtul lui a împărțit la b, sau raportul dintre a și b.

a^q „a la puterea q", $a \in R^+$, $q \in Q$. Puterea lui a.

$\sqrt[n]{a}$ „rădăcină a n—a a lui a", $a \in R^+$, $n \in N$.

Aplicația unei mulțimi într-o altă mulțime

$x \searrow f \nearrow y$	imaginea lui x, prin aplicația f, este $y = f(x)$.
$x \longrightarrow L$	„x tinde către L" sau „L este limita lui x".
$f'(x),\ f''(x),\ldots, f^{(n)}(x)$	derivata întîi, a doua, ..., a $n-$a a lui $f(x)$.
$\mathfrak{P}f(x)$	„primitiva generală a lui $f(x)$".
$\mathfrak{P}_a^b f(x)$	„primitiva de la a la b a lui $f(x)$". Diferența $F(b) - F(b)$ dintre valorile unei primitive particulare $F(x)$.

Vectori

$\vec{v}$ sau $\mathbf{v}$	„vector". Element al unui spațiu vectorial.
$\lvert\vec{v}\rvert$ sau $\lvert\mathbf{v}\rvert$	„lungimea" sau „modulul" vectorului $\mathbf{v}$.
$\overline{AM}$	„măsura vectorului AM în raport cu un vector unitar director.
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$	„$\mathbf{v}$ înmulțit scalar cu $\mathbf{w}$". Produsul scalar a doi vectori.
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$	„$\mathbf{v}$ înmulțit vectorial cu $\mathbf{w}$". Produsul vectorial a doi vectori.

CARTEA ÎNTÎI

STRUCTURI FUNDAMENTALE

Matematica predată în școală cuprinde diferite părți considerate, prin tradiție, distincte și mai mult sau mai puțin autonome: algebra, geometria, trigonometria etc. Din punct de vedere intuitiv, această împărțire este justificată: studiem numerele și facem calcule, sau studiem figurile pe care le-am construit și examinat. Dar chiar geometria analitică lasă să se presimtă că această disociere nu este absolută. Dar ce valoare logică prezintă concluziile trase la un moment dat?

Matematica modernă se ocupă mai puțin de obiectele studiate și mai mult de structura relațiilor dintre aceste obiecte; astfel, aproape întreaga geometrie tradițională apare ca o *Algebră* definită ca teorie a operațiilor; figurile devin inutile, dacă nu chiar periculoase, pentru expunerea demonstrațiilor, dar, bineînțeles, cititorul rămîne liber să-și ajute intuiția cu ajutorul desenelor

La aceste *structuri algebrice* trebuie adăugate *structurile topologice* de vecinătate, limită, continuitate. După aceea putem îmbogăți conceptul de Spațiu geometric și putem aborda Analiza.

Cartea întîi expune structurile fundamentale și punctul de plecare al diferitelor construcții al căror ansamblu constituie Matematica elementară; ea precizează sensul termenilor de bază din limbajul uzual care trebuie debarasat de un eventual conținut

prea intuitiv; ea introduce, de asemenea, cele cîteva simboluri care stabilesc condiţiile de valabilitate ale relaţiilor. Vom folosi aceste simboluri pentru a rezuma enunţurile în formule care vor deveni astfel independente de caracterul subiectiv al limbajului pe care-l folosim, fapt care va pune în evidenţă conţinutul logic şi matematic al acestor formule.

CAPITOLUL 1

VOCABULARUL ŞI SIMBOLURILE DIN TEORIA MULŢIMILOR. OPERAŢII

§ 1. DEFINIŢII INTRODUCTIVE

În cele ce urmează, vom studia *elemente*, de pildă numere, puncte, vectori, funcţii etc., pe care le vom reprezenta simbolic prin litere minuscule a, b, x, f etc; *mulţimile* de asemenea elemente vor fi atunci reprezentate prin majuscule: de exemplu, mulţimea numerelor pare p va fi notată cu P, mulţimea funcţiilor liniare f va fi F, o circumferinţă C va fi mulţimea punctelor sale m etc.

a) Într-o exprimare condensată, pentru a scrie că un element a aparţine unei mulţimi A, se foloseşte *semnul de apartenenţă* $\in$, înlocuit uneori, la tipărire, cu un epsilon ε. Astfel, propoziţia

„punctul m aparţine circumferinţei C"

se va scrie, dacă se ştie dinainte că m este un punct şi că C este o circumferinţă,

$$m \in C.$$

Dar o mulţime, luată ca atare, poate fi ea însăşi considerată drept un element al unei alte mulţimi: de exemplu, putem considera mulţimea $\mathcal{C}$ a cercurilor din plan care trec prin două puncte date; putem ajunge atunci în situaţia de a scrie

$$m \in C, \quad C \in \mathcal{C}.$$

Tot astfel, un elev a aparţine clasei sale A, care, la rîndul ei, aparţine mulţimii $\mathcal{A}$ a claselor liceului, această mulţime $\mathcal{A}$ fiind, ca însăşi, un element al mulţimii liceelor din ţară. Spunem că există o ascendenţă în *scara tipurilor* de mulţimi; iar semnul de apartenenţă indică o asemenea ascendenţă.

b) Să definim acum o *submulţime* a unei mulţimi. Fie, de exemplu, o clasă A, mulţimea elevilor din acea clasă; să considerăm mulţimea B a elevilor din această clasă care studiază limba engleză: spunem că B este o submulţime a lui A. Dacă toţi elevii din clasa A studiază engleza, B este însăşi mulţimea A. Dar este, de asemenea, posibil şi ca nici un elev din A să nu urmeze engleza; spunem atunci că B este o submulţime *vidă*. O submulţime *adevărată* este o submulţime care nu este vidă.

Definiţia unei submulţimi B a unei mulţimi A este deci următoarea:

„B este o submulţime a lui A" înseamnă că, oricare ar fi elementul a, afirmaţia „a aparţine lui B" implică (atrage după sine) afirmaţia „a aparţine lui A".

Vom scrie această condiţie cu ajutorul a două simboluri logice, $\forall$ şi $\Longrightarrow$:

$\forall$ înseamnă „oricare ar fi"; este un cuantificator.

$\Longrightarrow$ înseamnă „implică"; este simbolul inferenţei.

Atunci, oricare ar fi a, „a aparţine lui B" implică „a aparţine lui A" se scrie:

$$\forall a : a \in B \Longrightarrow a \in A.$$

Relaţia dintre A şi submulţimea ei B poate fi exprimată şi cu ajutorul unui singur simbol, fără a face să intervină explicit elementul a. Scriem

$$B \subseteq A$$

care se citeşte „B este inclus în A"; simbolul $\subseteq$ indică deci *incluziunea*. Aceeaşi relaţie se poate scrie şi sub forma $A \supseteq B$, care se citeşte „A conţine pe B".

Dacă vrem să precizăm că A conţine şi alte elemente, pe lîngă cele ale lui B, utilizăm simbolul *incluziunii stricte* $\subset$:

$B \subset A$ „B strict inclus în A".

Aşadar, simbolul incluziunii, spre deosebire de simbolul apartenenţei, nu implică o ascensiune în scara tipurilor.

Se impune o remarcă: *tranzitivitatea relaţiei de incluziune*:

$$[C \subseteq B \text{ şi } B \subseteq A] \Longrightarrow [C \subseteq A]$$

şi la fel pentru incluziunea strictă. Această inferenţă constituie una din axiomele teoriei mulţimilor (v. cap.6).

c) Fie două submulţimi A şi B ale unei mulţimi E. Vom fi conduşi deseori să considerăm mulţimea J a elementelor care aparţin simultan mulţimii A şi mulţimii B. Această submulţime J se numeşte *intersecţia* lui A şi B, ceea ce se scrie şi se citeşte:

$J = A \cap B$ „J este egal cu A intersectat cu B".

Simbolul $=$ înseamnă aici „(mulţimea J) este totuna cu mulţimea..."

Aşadar, definiţia simbolului intersecţiei $\cap$ este:

$$\forall m : [m \in A \cap B] \Longleftrightarrow [m \in A \text{ şi } m \in B].$$

Simbolul $\Longleftrightarrow$ indică *echivalenţa logică:* fiecare din cei doi membri este o consecinţă a celuilalt.

Dacă A şi B nu au nici un element comun, J este vidă. Scriem atunci

$$A \cap B = \varnothing.$$

(Simbolul $\varnothing$, care, ca formă, seamănă cu zero, este de fapt o literă scandinavă şi se citeşte „mulţimea vidă".) Spunem, în acest caz, că A şi B sînt submulţimi *disjuncte*.

d) Putem defini şi *reuniunea* a două submulţimi A şi B, ca submulţimea constituită din elementele care aparţin lui A *sau* lui B, *sau* simultan ambelor submulţimi (*sau* are aici sens neexclusiv). Scriem

$R = A \cup B$ „R este egal cu A reunit cu B".

La fel de bine putem defini reuniunea mai multor submulţimi ale lui E, ca fiind mulţimea elementelor care aparţin cel puţin uneia din aceste submulţimi. Un caz evident foarte important este cel în care aceste submulţimi sînt disjuncte două cîte două; spunem atunci că ele constituie o *partiţie a reuniunii lor* (ceea ce reflectă adecvat ideea unei împărţiri a lui R). Deseori, o asemenea

reuniune de submulţimi disjuncte două cîte două se numeşte *suma* acelor submulţimi.

e) În fine, dacă A este o submulţime a lui E, putem considera mulţimea elementelor lui E care nu aparţin lui A: această submulţime se numeşte *complementara lui* A şi se notează $\mathbf{C}A$. Definirea ei necesită un simbol pentru nonapartenenţă; se foloseşte simbolul apartenenţei tăiat cu o bară verticală.
Aşadar

$$[m \in \mathbf{C}A] \Longleftrightarrow [m \notin A \text{ şi } m \in E].$$

f) Un ultim simbol care se va dovedi util, un nou cuantificator:

„există cel puţin un", notat simbolic cu $\exists$.

De exemplu, pentru a exprima că A şi B nu sînt disjuncte, scriem

$$\exists m : m \in A \cap B.$$

În rezumat, am introdus:

Două simboluri logice:

$$\Longrightarrow \ , \ \Longleftrightarrow .$$

Simboluri din teoria mulţimilor:

$$\in$$
$$\subseteq \text{ şi } \supseteq, \quad \subset \text{ şi } \supset$$
$$\cap, \quad \cup$$

Doi cuantificatori:

$$\forall, \quad \exists .$$

§ 2. RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

Se întîmplă deseori să fim determinaţi să considerăm că, dintr-un anumit punct de vedere, mai multe elemente ale unei mulţimi sînt echivalente între ele, şi aceasta pentru că, din acel punct de vedere, unul (oarecare) din ele poate fi înlocuit cu oricare din celelalte. De exemplu, dacă ceea ce ne interesează este exclusiv direcţia, două drepte paralele sînt echivalente. Sau: din punctul de vedere al restului împărţirii la 5, numerele 27 şi 32 sînt echivalente. Tot

astfel, din punctul de vedere al măsurii mărimilor, fracţiile $\frac{2}{3}$ şi $\frac{4}{6}$ sînt echivalente.

Vom conveni să rezervăm cuvîntul *echivalenţă* exclusiv pentru cazul în care sînt îndeplinite următoarele trei condiţii:

1. Fiecare element este echivalent cu el însuşi.
2. Afirmaţia că două elemente sînt echivalente nu implică precizarea în prealabil care dintre ele este considerat primul, şi care **al** doilea.
3. Două elemente echivalente cu un acelaşi al treilea element sînt echivalente între ele.

Să adoptăm simbolul $\equiv$ pentru a reprezenta o echivalenţă.

Definiţia generală a simbolului echivalenţei

$$\begin{cases} 1.\ \forall a,\ a \equiv a\ (\textit{reflexivitate}). \\ 2.\ \forall a,\ \forall b : [a \equiv b] \Longrightarrow [b \equiv a]\ (\textit{simetrie},\ \text{sau reciprocitate}). \\ 3.\ \forall a,\ \forall b,\ \forall c : [a \equiv b \text{ şi } b \equiv c] \Longrightarrow [a \equiv c]\ (\textit{tranzitivitate}). \end{cases}$$

Orice convenţie care permite să se distingă, printre elementele unei mulţimi, acele elemente care vor fi considerate echivalente se numeşte *relaţie de echivalenţă*. Prin urmare, orice relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă este o relaţie de echivalenţă.

Fie o mulţime E în care este definită o relaţie de echivalenţă. Submulţimea elementelor echivalente cu un element a se numeşte o *clasă de echivalenţă:* toate elementele acestei clase sînt echivalente între ele (datorită tranzitivităţii) şi orice element m al lui E face parte dintr-o clasă şi numai din una singură (acceptînd, eventual, că m poate fi şi singurul element al unei clase, dacă nu are echivalenţi). E a devenit atunci o reuniune de clase disjuncte. Aceasta înseamnă că *o relaţie de echivalenţă definită pe E determină o partiţie a lui E în clase de echivalenţă.* Mulţimea acestor clase se numeşte *mulţimea cît* a lui E prin relaţia de echivalenţă $\mathcal{R}$. Ea se notează $E/\mathcal{R}$.

Fiecare clasă de echivalenţă este determinată de unul (oarecare) din elementele ei, care poate servi drept reprezentant al clasei. De exemplu, divizibilitatea cu 5 este studiul unei partiţii a mulţimii întregilor în 5 clase ale căror reprezentanţi sînt cele 5 resturi $0, 1, 2, 3, 4$. În mulţimea dreptelor, o dreaptă (oarecare) aleasă dintre cele paralele cu ea, determină o direcţie: fiecare direcţie

constituie o clasă de echivalenţă pentru relaţia de paralelism; aceasta este deci o relaţie de echivalenţă.

Simbolurile folosite pentru o relaţie de echivalenţă sînt $=$ şi alte cîteva simboluri similare: am folosit simbolul $\equiv$; ştim că paralelismul este reprezentat prin $\parallel$; uneori se foloseşte şi simbolul $\sim$. De remarcat că simbolurile $\simeq$ şi $\#$, care semnifică „aproximativ egal cu" sau „puţin diferit de", nu indică o relaţie de echivalenţă, pentru că nu există tranzitivitate. Semnul $\Longleftrightarrow$ indică o echivalenţă logică în mulţimea propoziţiilor.

§ 3. RELAŢII DE ORDINE

a) În scurgerea timpului, distingem un „înainte" şi un „după" Să folosim simbolul $\prec$ pentru a exprima „este înaintea lui..." Intuitiv, îi atribuim următoarele trei proprietăţi:

$$\forall a, \forall b, \forall c \quad a \in E,\ b \in E,\ c \in E \quad \begin{cases} a \prec a \text{ este falsă (nonreflexivitate).} \\ a \prec b \text{ şi } b \prec a \text{ se exclud reciproc (nonsimetrie).} \\ [a \prec b \text{ şi } b \prec c] \Longrightarrow a \prec c \text{ (tranzitivitate).} \end{cases}$$

Prin definiţie, orice relaţie cu aceste proprietăţi se numeşte *relaţie de ordine strictă.*

EXEMPLE. Relaţia „mai mic decît" $<$ între numere. Relaţia de incluziune strictă $\subset$, în mulţimea $\mathfrak{P}$ a submulţimilor lui E.

b) Dacă între elementele unei mulţimi E s-a definit o relaţie de echivalenţă, se foloseşte deseori o *relaţie de ordine nestrictă* (sau *largă*) Să o reprezentăm prin $\leqslant$ Acest simbol este definit prin:

$$\forall a, \forall b, \forall c \quad a \in E,\ b \in E,\ c \in E \quad \begin{cases} a \leqslant a \text{ este adevărată (reflexivitate)} \\ [a \leqslant b \text{ şi } b \leqslant a] \Longrightarrow [a = b] \text{ (antisimetrie)} \\ [a \leqslant b \text{ şi } b \leqslant c] \Longrightarrow [a \leqslant c] \text{ (tranzitivitate)} \end{cases}$$

EXEMPLE. Relaţiile notate $\leqslant, \geqslant, \subseteq$. Relaţia de inferenţă $\Longrightarrow$, în mulţimea propoziţiilor.

c) Dacă, în mulţimea E, două elemente oarecare sînt comparabile, adică dacă avem

$$\forall a,\ \forall b,\ a \in E,\ b \in E \quad \begin{cases} a \prec b \\ \text{sau} \\ a \equiv b \\ \text{sau} \\ b \prec a \end{cases} \quad \text{(trichotomie)},$$

spunem că E este *total ordonată* prin relaţia respectivă (relaţie de ordine totală). În cazul în care anumite elemente nu sînt comparabile, mulţimea este *parţial ordonată*.

EXEMPLE DE ORDONĂRI PARŢIALE. În mulţimea întregilor, relaţia „a este multiplu al lui b" este o relaţie de ordine (nestrictă, dacă se consideră că numărul este şi propriul său multiplu), dar unele numere, cum sînt de pildă 2 şi 3, nu sînt comparabile.

Gările unei căi ferate sînt ordonate prin „a este înaintea lui b dacă trenul de la Paris trece prin a înainte de a trece prin b"; dar gările nu sînt comparabile decît dacă sînt situate pe o aceeaşi cale ferată care trece prin Paris.

§ 4. OPERAŢIILE

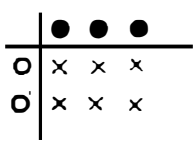
Fie una sau mai multe mulţimi — de pildă, trei mulţimi: E, E', E'' — pe care le numim *mulţimi de plecare*. Să presupunem că există o regulă care, plecînd de la trei elemente a, a', a'' aparţinînd respectiv lui E, E', E'', defineşte un element x al unei mulţimi X. Spunem atunci că este definită o *operaţie* şi că X este *mulţimea de sosire*. Elementele a, a' şi a'' se numesc *termenii* (sau *factorii*) operaţiei. Vom studia îndeosebi operaţiile *binare*, adică cele cu doi termeni.

EXEMPLE. 1. O singură mulţime de plecare: mulţimea întregilor de un semn oarecare. Operaţia: ridicarea la pătrat. Mulţimea de sosire este tot mulţimea întregilor, dar prin această operaţie nu se obţine decît o submulţime; putem considera drept mulţime de sosire mulţimea întregilor pozitivi, sau, la fel de bine, mulţimea întregilor numiţi „pătrate perfecte".

2. Două mulţimi de plecare: mulţimea întregilor şi mulţimea fracţiilor. Operaţia: înmulţirea. Mulţimea de sosire: mulţimea fracţiilor.

3. Mulțimea de plecare: punctele de pe o dreaptă. Operația: trasarea printr-un punct a unei paralele la o direcție dată. Mulțimea de sosire: dreptele unui anumit plan.

a) **Produsul a două mulțimi.** Operația fundamentală care pleacă de la mai multe mulțimi este „produsul acelor mulțimi" (se mai spune și *produsul direct* al acelor mulțimi).



Fie, mai întîi, două mulțimi de plecare, A și B. Să considerăm drept mulțime de sosire mulțimea X a perechilor (a, b) formate din cîte un element a al lui A și un element b al lui B. Această mulțime X se numește *produsul direct* al lui A cu B. Scriem $X = A \times B$.

EXEMPLU:

A are ca elemente pe p, q și r; B are ca elemente pe u și v. $A \times B$ are ca elemente perechile (p, u); (p, v); (q, u); (q, v); (r, u); (r, v).

Desenul de mai sus este un *model* al acestei operații: mulțimea crucilor constituie, într-adevăr, o imagine a produsului direct al mulțimii punctelor negre cu mulțimea punctelor albe.

ALT EXEMPLU. Fie mulțimea perechilor formate dintr-o abscisă și o ordonată, în geometrie analitică plană: acest produs direct al celor două mulțimi de numere reale are ca imagine mulțimea punctelor din plan care au aceste numere drept coordonate: fiecărei perechi de numere îi corespunde un singur punct, și reciproc, fiecărui punct îi corespunde o singură pereche de numere. Exprimăm aceasta spunînd că există o *corespondență biunivocă* între mulțimea perechilor și mulțimea punctelor din plan. (Se mai spune și „corespondență unu la unu" precum și „corespondență 1 ; 1". Noțiunea de corespondență biunivocă este fundamentală, și ea este cea care permite folosirea modelelor, a imaginilor.)

Tot astfel, dacă a, b, c aparțin respectiv cîte uneia din mulțimile A, B, C, produsul $A \times B \times C$ este mulțimea tripleților (a, b, c).

b) **Operații interne.** Fie o mulțime E și mulțimea perechilor (a, b) de elemente ale acestei mulțimi, adică produsul lui E cu

ea însăşi: $E \times E$. O operaţie binară care face să corespundă fiecărei perechi (a, b) un element al lui E se numeşte *operaţie internă* definită pe E.

EXEMPLE. Pe mulţimea întregilor — adunarea, sau înmulţirea. Pe mulţimea fracţiilor (excluzînd pe zero) — împărţirea. Pe mulţimea vectorilor (v. cap.3) — suma.

Mulţimea vectorilor conduce însă şi la un alt tip de operaţie. Înmulţirea unui vector cu un număr face să corespundă fiecărei perechi formate dintr-un vector şi un număr, un alt vector. Mulţimea numerelor este considerată aici ca fiind mulţimea operatorilor care acţionează asupra vectorilor. Se numeşte *operaţie externă* o operaţie faţă de care mulţimea de sosire este una din mulţimile de plecare, iar cealaltă este o *mulţime de operatori*.

Să considerăm o operaţie internă pe E. Ea se numeşte şi *lege de compoziţie internă între elementele lui E*. (Se compun două elemente ale lui E pentru a obţine un al treilea element.)

Dacă o operaţie $\circ$ este o operaţie internă pe o submulţime A a lui E, spunem că A este *închisă* pentru această operaţie (fiindcă operaţia nu ne scoate din A).

Fie $\circ$ o operaţie internă definită pe E. Convenim să notăm în modul următor rezultatul operaţiei efectuate asupra elementelor a şi b:

$$a \circ b = r.$$

Deoarece r aparţine lui E, acest element poate fi luat el însuşi drept *termen* al operaţiei (sau *factor* al operaţiei). Vom avea, de exemplu

$$a \circ b = r, \quad r \circ c = s,$$

cu alte cuvinte, operaţia poate fi reiterată, repetată.

CONVENŢIE DE SCRIERE:

$$[a \circ b = r \text{ şi } r \circ c = s] \Longrightarrow [(a \circ b) \circ c = s]$$

şi, convenind să suprimăm paranteza la stînga,

$$a \circ b \circ c = s.$$

Tot astfel,

$$a \circ b \circ c \circ d \circ e \text{ înseamnă } \{[(a \circ b) \circ c] \circ d\} \circ e.$$

REMARCĂ IMPORTANTĂ. Dacă nu există o indicație contrară, atunci *informația despre operațiile de efectuat se citește de la stînga la dreapta.*

c) Proprietăți ale operațiilor

Multe dintre operațiile pe care le vom întîlni verifică proprietățile următoare (notăm elementele echivalente cu semnul $=$):

$[A]$
- $[A_1]$ $[a = a' \text{ și } b = b'] \Longrightarrow [a \circ b = a' \circ b']$
  „Două elemente echivalente se pot înlocui unul pe altul în calitatea de termen al operației". — „Două egalități pot fi „operate" (compuse) membru cu membru". Echivalența și adunarea sînt compatibile între ele.
- $[A_2]$
  - $[A_2']$ $[a \circ b = a' \circ b] \Longrightarrow [a = a']$ simplificare la dreapta
  - $[A_2'']$ $[a \circ b = a \circ b'] \Longrightarrow [b = b']$ simplificare la stînga
- $[A_3]$ $a \circ b \circ c = a \circ (b \circ c)$ asociativitate pentru 3 termeni
- $[A_4]$ $a \circ b = b \circ a$ comutativitate pentru 2 termeni.

REMARCĂ. Deoarece echivalențele precedente sînt, prin definiție, simetrice, ele pot fi citite în ambele sensuri; de exemplu, $[A_3]$ arată că paranteza din membrul al doilea poate fi suprimată.

De fiecare dată cînd va fi definită o operație pe o mulțime, va trebui să studiem dacă aceste proprietăți sînt sau nu adevărate (de exemplu, împărțirea în mulțimea numerelor fracționare nu este, evident, comutativă!). Să mai remarcăm că dacă $[A_4]$ este adevărată, $[A_2']$ și $[A_2'']$ sînt echivalente și constituie condiția *simplificării bilaterale* $[A_2]$.

Consecințe ale proprietăților $[A]$

$[C_1]$ ASOCIATIVITATE PENTRU TERMENI CONSECUTIVI. Orice grup de termeni care se succed pot fi cuprinși într-o paranteză.

Aceasta este o consecință a proprietăților $[A_1]$ și $[A_3]$, și ea nu presupune proprietatea $[A_4]$.

Fie, de exemplu, că vrem să trecem de la

$$a \circ b \circ c \circ d \circ e \circ f = s$$

la

$$a \circ b \circ (c \circ d \circ e) \circ f.$$

Folosind, după nevoie, cînd definiţia şi proprietatea $[A_1]$, cînd $[A_3]$, vom scrie

$$\begin{aligned} s &= [(a \circ b \circ c) \circ d \circ e] \circ f = [(a \circ b \circ c) \circ (d \circ e)] \circ f \\ &= [(a \circ b) \circ c \circ (d \circ e)] \circ f \\ &= [(a \circ b) \circ \{c \circ (d \circ e)\}] \circ f = a \circ b \circ \{c \circ (d \circ e)\} \circ f \\ &= a \circ b \circ \{c \circ d \circ e\} \circ f. \end{aligned}$$

$[C_2]$ COMUTATIVITATE COMPLETĂ. Termenii pot fi aranjaţi într-o ordine complet arbitrară.

Aceasta este o consecinţă a proprietăţilor $[A_1]$, $[A_3]$ şi $[A_4]$. Pentru a ajunge la ea, parcurgem două etape.

1. *Putem inversa ordinea a doi termeni consecutivi.*

EXEMPLU. Vrem să trecem de la

$$s = a \circ b \circ c \circ d \circ e \circ f \circ g \text{ la } a \circ b \circ c \circ e \circ d \circ f \circ g.$$

Folosim definiţia, apoi pe $[A_3]$ şi după aceea pe $[A_4]$:

$$\begin{aligned} s &= [(a \circ b \circ c) \circ (d \circ e)] \circ f \circ g \\ &= [(a \circ b \circ c) \circ (e \circ d)] \circ f \circ g = a \circ b \circ c \circ e \circ d \circ f \circ g. \end{aligned}$$

(Cu titlu de exerciţiu, cititorul îşi poate propune să explice în cazul general procedeul care reiese din acest exemplu.)

2. *Putem scrie termenii într-o ordine arbitrară.* Într-adevăr, putem inversa anumiţi termeni consecutivi în aşa fel încît un termen, care se află în locul dorit, să nu mai fie deplasat cu ocazia acestor inversiuni; este suficient pentru aceasta, să aducem în una din extremităţi termenul care vrem să fie primul (de pildă, la extremitatea din stînga), apoi pe cel imediat următor şi aşa mai departe. Se poate prevedea uşor numărul maxim de interversiuni necesare.

$[C_3]$ ASOCIATIVITATE COMPLETĂ. Oricare termeni pot fi grupaţi într-o paranteză.

Aceasta rezultă din **proprietăţile** $[A]$, **fiindcă**, conform consecinţei $[C_2]$, termenii **vizaţi pot fi plasaţi** primii din stînga.

În continuare, ori de **cîte ori vom fi verificat** că proprietăţile $[A]$ sînt satisfăcute, **automat consecinţele acestea** vor fi presupuse valabile.

DEFINIŢIE. Se numeşte ***element neutru*** orice element n care verifică

$$\forall a : a \circ n = a \quad \text{şi} \quad n \circ a = a.$$

Dacă operaţia este **comutativă, aceste două** condiţii sînt una consecinţa celeilalte.

Dacă există, acest **element este unic, conform** lui $[A_1]$, căci

$$[n \circ n' = n \quad \text{şi} \quad n \circ n' = n'] \Longrightarrow [n = n'].$$

EXEMPLE. Pentru **adunarea numerelor**, elementul neutru este **numărul** zero, pentru **înmulţire** — **numărul** unu.

CAPITOLUL 2

NUMERELE

Deseori, elementele unei mulţimi sînt numite *puncte*, fiindcă sînt considerate indecompozabile. Cînd însă mulţimea este înzestrată cu operaţii interne, ele sînt numite mai curînd *numere*, prin extensia cuvîntului număr care se aplică la întregii naturali.

§ 1. ÎNTREGII NATURALI

Cînd numărăm obiecte, folosim întregii naturali; experienţa este cea care ne arată ce anume putem număra în felul acesta: obiectele trebuie să nu se topească, să nu se evapore, să nu se lipească între ele etc. Întregii naturali sînt adecvaţi pentru această operaţie fiindcă posedă anumite proprietăţi binecunoscute. Îi vom defini acum pe cale axiomatică printr-un ansamblu de proprietăţi care este suficient pentru a deduce din el pe toate celelalte. (Semnalăm că există o oarecare libertate în alegerea acestor axiome, fapt care permite şi alte expuneri axiomatice.)

Axiome care definesc mulţimea N a întregilor naturali.

I. Adunarea

În mulţimea N se dă o operaţie internă, numită adunare (şi notată $+$), care asociază fiecărei perechi (a, b) de elemente din N, un alt element $a + b$ numit *sumă*.

Această operație verifică proprietățile $[A]$ din cap.1, ceea ce, în cazul de față, se scrie

$$[A]\quad\begin{cases}[A_1] & [a = a' \text{ și } b = b'] \Longrightarrow [a + b = a' + b'].\\ [A_2] & \begin{cases}[a + b = a' + b] \Longrightarrow [a = a']\\ [a + b = a + b'] \Longrightarrow [b = b']\end{cases}\\ [A_3] & a + b + c = a + (b + c)\\ [A_4] & a + b = b + a.\end{cases}$$

Din ele decurg consecințele $[C]$: comutativitatea completă și asociativitatea completă.

II. Relația de ordine

DEFINIȚIE. Fie o pereche (a, b) de elemente din N; dacă există un element d din N astfel încît $a + d = b$, spunem că a este mai mic decît b, și scriem $a < b$. Așadar

$$[a < b] \Longleftrightarrow [\exists d : a + d = b].$$

Axioma $[O]$ a trichotomiei. Pentru fiecare pereche (a, b) de elemente din N, avem

$$a = b, \text{ sau } a < b, \text{ sau } b < a,$$

aceste trei cazuri excluzîndu-se reciproc.

Rezultă de aici că această relație este o *relație de ordine totală* pe N, ordinea fiind *strictă*. Într-adevăr, relația nu este nici reflexivă, nici simetrică. Să demonstrăm că ea este tranzitivă:

$$\left.\begin{matrix}a < b \Longleftrightarrow \exists d : b = a + d\\ b < c \Longleftrightarrow \exists d' : c = b + d'\end{matrix}\right\} \underset{\text{(conform lui } [A])}{\Longleftrightarrow} \left\{ c = a + (d + d'),\right.$$

prin urmare, $a < c$.

CONCLUZIE. Mulțimea N este total ordonată prin relația $<$.

În loc de $a < b$, convenim să scriem $b > a$; relația $>$ se numește relația *inversă* celei precedente și este, și ea, o relație de ordine totală; ea se citește „mai mare decît".

Relația $\leqslant$ se citește „mai mic, sau egal cu" (ordine nestrictă); iar $\geqslant$ se citește „mai mare, sau egal cu".

Relațiile $a < b$ și $u > v$ se numesc inegalități de *sensuri contrare*.

CONSECINȚE

a) **Diferența.** Fie $a < b$; pentru a exprima în alt mod că $\exists d,\ b = a + d$, scriem $\exists d,\ b - a = d$.

Operația care asociază perechii (a, b) numărul d se numește *scădere*. Ea este definită *în* N, dar nu *pe* N, fiindcă nu se poate aplica tuturor perechilor: operația $b - a$ nu este definită decît pentru $a < b$.

PROPRIETĂȚI ALE DIFERENȚEI. Ele rezultă din $[A]$ și $[O]$.

Unicitate

$$\left.\begin{array}{l}[b - a = d] \iff [b = a + d] \\ [b - a = d'] \iff [b = a + d']\end{array}\right\} \Longrightarrow d = d' \text{ (conform lui } [A_2]).$$

Proprietăți

Numărul d se numește *diferența* între a și b.

$$[D_1]\quad b - a = (b + m) - (a + m),\ \forall m \in N.$$

ENUNȚ. Dacă celor doi termeni ai unei diferențe li se adaugă un același număr, diferența nu se schimbă.

Altă formă a teoremei:

$$[D_1']\quad [p < a < b] \Longrightarrow [b - a = (b - p) - (a - p)].$$
$$[D_2]\quad a + (b - c) = a + b - c$$
$$[D_3]\quad a - (b + c) = a - b - c$$
$$[D_4]\quad a - (b - c) = a + c - b \text{ și, de asemenea, } = a - b + c, \text{ în cazul în care } b < a.$$
$$[D_5]\quad (b - a) + (b' - a') = (b + b') - (a + a').$$

PRINCIPIUL DEMONSTRAȚIILOR. *Pentru a demonstra o egalitate, putem demonstra egalitatea care se obține adăugînd celor doi membri un același număr.* Într-adevăr, conform lui $[A]$,

$$[u = v] \iff [u + k = v + k]$$

și demonstrăm

$[D_1]$ — luînd $k = a + m$, $[D_2]$ — luînd $k = c$, $[D_3]$ — luînd $k = b + c$, $[D_4]$ — luînd $k = b - c$ și folosind $[D_1]$, $[D_5]$ — luînd $k = a + a'$.

b) **Proprietăți ale inegalităților**

$$[I_1]\quad [a < b] \Longrightarrow [a + m < b + m],\ \forall m \in N.$$

ENUNȚ. Dacă adunăm celor doi membri ai unei inegalități un același număr, obținem o egalitate de același sens.

$[I_1']$ $[p < a < b] \Longrightarrow [a - p < b - p]$

$[I_2]$ $[a < b$ și $a' < b'] \Longrightarrow [a + a' < b + b']$.

ENUNȚ. Adunînd membru cu membru două inegalități de același sens, obținem o inegalitate de același sens.

Demonstrații — cu ajutorul lui $[D_1]$ și $[D_5]$.

III. Bine ordonare

Structura definită de axiomele $[A]$ și $[O]$ este încă prea generală.

1. Trebuie s-o precizăm prin axioma următoare:

$[BO]$ **Axioma de bine ordonare.** *Orice submulțime a lui N care nu este vidă conține un element mai mic decît toate celelalte.*

De unde, în particular:

Axioma primului element. *Mulțimea N are un element mai mic decît toate celelalte.* Îl numim „unu" și îl reprezentăm prin 1.

CONSECINȚĂ. În submulțimea formată din toate elementele x astfel încît $a < x$, adică astfel încît $\exists y : x = a + y$, există un element cel mai mic. Acesta este $a + 1$ căci

$$[1 \leqslant b] \Longrightarrow [a + 1 \leqslant a + b] \text{ conform lui } [I_1].$$

De aici deducem *șirul* numerelor naturale $1,\ 1 + 1,\ 1 + 1 + 1$ etc. (Cuvîntul etc., care în matematică este înlocuit cu simbolul ..., arată că operația trebuie repetată. Un *șir* este o mulțime — notată, în general, cu $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — care este în corespondență biunivocă cu mulțimea întregilor.)

2. Pentru a obține o concluzie valabilă pentru *orice element* al lui N vom folosi teorema următoare care este extrem de importantă:

Teorema demonstrării prin recurență. Fie că este vorba de o proprietate care, pentru un număr $a \in N$, nu poate fi decît sau adevărată, sau falsă. Să presupunem că vrem să demonstrăm că ea este adevărată oricare ar fi $a \in N$. Care sînt ipotezele care ne permit să tragem această concluzie?

ENUNȚUL TEOREMEI. *Dacă știm că:*

1) *Proprietatea este adevărată pentru* $a = 1$;

2) *Dacă proprietatea este adevărată pentru* $a = p$, *ea este adevărată și pentru* $a = p + 1$, *și aceasta oricare ar fi* p, *și, în particular, pentru* $p = 1$;

Putem conchide că proprietatea este adevărată pentru orice număr din N.

Ceea ce se scrie:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \{\text{Adevărat pentru } a = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \\ 2.\ \{[\forall p \in N\text{: adevărat pentru } a = p] \Longrightarrow [\text{adevărat pentru } a = p+1]\}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [\text{adevărat } \forall a \in N].$$

DEMONSTRAȚIE. Să repartizăm elementele din N în două submulțimi, V — care conține toate numerele din N pentru care proprietatea este adevărată, și F — care conține toate numerele pentru care proprietatea este falsă. Vom arăta că, admițînd ipotezele 1. și 2., este imposibil ca F să nu fie vidă.

Într-adevăr, dacă F nu este vidă, atunci, conform axiomei $[BO]$, ea conține un element cel mai mic, q. Acest număr q nu este egal cu 1, conform primei ipoteze; deci el este mai mare decît 1 și numărul $q - 1$ există. Atunci, din însăși definiția lui q, acest număr $q - 1$ aparține lui V; dar ipoteza 2. implică atunci că și $(q - 1) + 1 = q$ aparține lui V, ceea ce este în contradicție cu definiția lui q. Prin urmare q nu există și F este vidă. Altfel spus, toate numerele aparțin lui V. Q.E.D.

De reținut că tocmai aceasta este teorema care justifică enunțul: *orice număr* $a \in N$ *este o sumă de termeni egali cu* 1; într-adevăr, dacă afirmația este adevărată pentru $a = p$, ea este adevărată și pentru $a = p + 1$.

REMARCĂ. Teorema permite să se efectueze o verificare, dar nu și să se descopere o formulă. De pildă, demonstrăm formulele

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1),$$

$$\Sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \forall n \text{ întreg},$$

verificînd $S_1 = 1$, $\Sigma_1 = 1$, $S_{n+1} = S_n + (n + 1)$, $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + (n + 1)^2$.

3. Numărul cardinal al unei submulțimi a lui N

Am spus ce este o *corespondență biunivocă între două mulțimi*: o corespondență prin care fiecărui element al unei mulțimi îi facem să corespundă un element și numai unul al celeilalte mulțimi, și reciproc. Dacă o mulțime este în corespondență biunivocă cu mulțimea N, spunem că mulțimea aceea este un *șir*; elementele ei pot fi notate $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Se spune, de asemenea, că această mulțime are *puterea infinitului numărabil*. Așa stau lucrurile, de exemplu, cu mulțimea numerelor pare $a + a$ ($a \in N$), fiindcă lui $a + a$ îi corespunde în mod biunivoc a; notăm $u_n = 2n$.

O submulțime a lui N se numește *finită* dacă are un element cel mai mare, un element maxim: de exemplu, submulțimea elementelor x definite prin $x < 6$ este o mulțime finită; elementul ei maxim este $6 - 1 = 5$. Dar submulțimea constituită de numerele pare nu este finită.

Fie A o *submulțime finită* nevidă a lui N. Ea este bine ordonată, așa cum este și N, și elementele ei pot fi înșiruite

$$a < b < c < \ldots < p < q;$$

elementului a îi putem asocia numărul 1, lui b numărul $1 + 1$, lui c numărul $1 + 1 + 1$ etc. Numărului q îi corespunde un număr bine determinat n (fiindcă putem aplica mulțimii elementelor $a, b, c, \ldots, q$ raționamentul prin recurență) și știm că n este cel mult egal cu $q + 1 - a$ (egalitatea se realizează numai cînd $a, b, c, \ldots, q$ sînt consecutivi în N).

Numărul n se numește *numărul cardinal atașat mulțimii* A; spunem de asemenea că *n este numărul de elemente din A*.

Mai general, fiind dată o mulțime oarecare B, dacă putem defini o corespondență biunivocă între B și o submulțime finită A a lui N, numărul cardinal al lui A se numește numărul de elemente din B. B se numește atunci o *colecție de obiecte* și n este *numărul de obiecte din colecție*. Colecțiile cele mai importante sînt: colecția de simboluri din numerație, care se scrie 1, 2, 3, ..., și cea de cuvinte din numerația vorbită.

Relația între două mulțimi: „au același număr cardinal" este o relație de echivalență (fiindcă existența unei corespondențe biunivoce este tranzitivă); ea se numește *echipotență*. (Cartea a II-a, cap. 3.)

APLICAȚIE LA REUNIUNEA ȘI LA INTERSECȚIA A DOUĂ MULȚIMI FINITE. Fie A și B două submulțimi finite ale unei mul-

ţimi E, şi fie n şi m numerele lor cardinale. Dacă A şi B sînt disjuncte, reuniunea lor R are ca număr cardinal pe $r = n + m$. (Am spus că în asemenea cazuri se foloseşte adesea cuvîntul „sumă" în loc de cuvîntul „reuniune".) Dacă, din contra, intersecţia J a lui A cu B nu este vidă, ea are un număr cardina j şi avem

$$n + m = r + j.$$

Dacă B este inclus în A, intersecţia este B, şi deci $j = m$, $r = n$; mulţimea D a elementelor din A care nu aparţin şi lui B conţine $d = n - m$ elemente; numim pe D *diferenţa submulţimilor A şi B.*

Aşadar

$$\left.\begin{matrix} A \subset E \\ B \subset E \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [n + m = r + j]$$

$$[A \cap B = \varnothing] \Longleftrightarrow [n + m = r]$$

$$[B \subset A] \Longleftrightarrow [j = m,\ n = r,\ d = n - m].$$

Prin urmare, dacă vrem să reprezentăm suma a doi întreg naturali prin operaţii asupra colecţiilor, trebuie să luăm mulţimi disjuncte; pentru a reprezenta o diferenţă, trebuie să luăm două mulţimi dintre care una este inclusă în cealaltă.

TABLA ADUNĂRII. Să luăm ca imagine a întregilor naturali segmente succesive ale unei linii şi ale unei coloane din plan. Imaginea produsului acestor mulţimi este mulţimea căsuţelor caroiajului; căsuţei intersecţie a coloanei numerotate a şi a liniei numerotate b îi atribuim numărul $a + b$, şi analog pentru toate căsuţele.

Se vede uşor ce interpretare au axiomele $[A]$ în cazul acestui tabel.

	1	2		a	
1	2	3		$a + 1$	
2	3	4		$a + 2$	
b				$a + b$	

IV. Înmulțirea

1. Vom arăta acum că în mulțimea N studiată, înzestrată deja cu operația de adunare și cu relația de ordine, există posibilitatea de a defini o a doua operație care satisface condițiile $[A]$ și încă două axiome care exprimă relația dintre această operație și adunare. Numim această operație *înmulțire* și o semnalăm printr-un punct, la care, de altfel, se renunță adesea: scriem $a \cdot b$ sau ab. Rezultatul este un număr care se numește *produs*, iar a și b sînt *factorii* produsului.

AXIOMELE ÎNMULȚIRII

$[A_1]$ $[a = a' \text{ și } b = b'] \Longrightarrow [ab = a'b']$

$[A_2]$ $[ab = ab'] \Longrightarrow [b = b']$; $[ab = a'b] \Longrightarrow [a = a']$

$[A_3]$ $abc = a(bc)$

$[A_4]$ $ab = ba$

$[M_1]$ $a(b + b') = (ab) + (ab')$: *distributivitatea* înmulțirii în raport cu adunarea a 2 termeni.

$[M_2]$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Numărul 1 este *elementul neutru* pentru înmulțire.

REMARCĂ. $(ab) + (cd)$ se scrie fără paranteze $ab + cd$, făcînd convenția de a suprima parantezele care nu conțin decît un singur produs.

CONSECINȚĂ: *Distributivitatea generală pentru n termeni*

$[M_1']$ $a(b + c + \ldots + k) = ab + ac + \ldots + ak$.

Ea se demonstrează prin recurență; într-adevăr, dacă ea este adevărată pentru p termeni, ea este adevărată și pentru $p + 1$ termeni, datorită asociativității adunării. De aici — formula pentru înmulțirea unei sume cu o sumă.

2. Trebuie deci să demonstrăm *existența* și *unicitatea* operației care are proprietățile dorite, în mulțimea N.

Pentru a obține un produs ab, să considerăm pe b drept o sumă de b termeni egali cu 1 și să folosim $[M_1]$ și $[M_2]$:

$$b = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{(b \text{ termeni})} \Longrightarrow ab = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{(b \text{ termeni})}$$

Prin urmare, singurul număr care poate fi convenabil pentru $p = ab$ *este suma a* b *numere egale cu* a. Rămîne să demonstrăm că acest număr p satisface, într-adevăr, toate axiomele formulate.

Faptul este imediat pentru $[A_1]$ şi pentru $[M_2]$. Asociativitatea adunării dă imediat pe $[M_1]$, iar relaţia de ordine dă pe $[A_2]$.

$[A_3]$ rezultă din $[M_1]$ căci

$$(ab)c = ab + ab + \ldots + ab \quad (c \text{ termeni}).$$

$$a(bc) = a(b + b + \ldots + b) \quad (c \text{ termeni}).$$

Demonstrarea lui $[A_4]$ cere descompunerea lui a şi a lui b în sume de termeni egali cu 1:

$$ab = \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{(b \text{ termeni})} = (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) + \ldots + \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{(\text{fiecare paranteză conţine } a \text{ termeni})}.$$

O altă grupare a termenilor dă b termeni 1 situaţi în fiecare din cele a poziţii din fiecare paranteză; prin urmare

$$\underbrace{b + b + \ldots + b}_{(a \text{ termeni})} = ba.$$

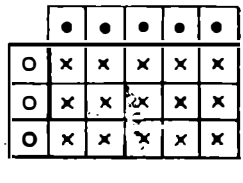
Putem face şi un raţionament prin recurenţă, căci, pentru $b = 1$, avem într-adevăr $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, şi

$$[ap = pa] \Longrightarrow [a(p + 1) = (p + 1)a].$$

Într-adevăr,

$$a(p + 1) = ap + a = pa + 1 \cdot a = (p + p + \ldots + p) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) = (p + 1) + (p + 1) + \ldots + (p + 1) = (p + 1)a.$$

REPREZENTAREA UNUI PRODUS PRINTR-UN PRODUS DE MULŢIMI. Să considerăm întregii a şi b drept numerele de obiecte din două colecţii, de exemplu, o colecţie de puncte negre şi una de puncte albe.



Numărul de obiecte din mulțimea produs verifică perfect axiomele enunțate. De altfel, se poate verifica că el satisface definiția genetică pe care am dat-o:

$$ab = a + a + \ldots + a \ (b \text{ termeni}).$$

Axiomele $[A_1]$, $[A_4]$ și $[M_2]$ se verifică imediat.

Axioma $[M_1]$ rezultă din cele spuse despre reuniunea mulțimilor disjuncte. $[A_2]$ rezultă din relația de ordine.

Pentru a verifica pe $[A_3]$ trebuie, evident, lucrat cu tripleți, nu cu perechi. Putem face o reprezentare în spațiu: a calcula pe $(ab)c$ sau pe $a(bc)$ înseamnă a număra căsuțele din spațiu în grupuri care sînt reuniuni de submulțimi disjuncte și formează una sau alta din cele două partiții posibile (de pildă: partiția în straturi orizontale, sau în straturi verticale).

Această reprezentare ne poate scuti de o demonstrație penibil de greoaie.

Cele de mai sus justifică folosirea expresiei „mulțimea-produs" fiindcă, în cazul mulțimilor finite, numărul cardinal al mulțimii-produs este produsul numerelor cardinale ale mulțimilor-factori.

TABLA LUI PITAGORA. Tabla înmulțirii, ca și tabla adunării sau cea a oricărei operații binare, are forma de tabel cu două intrări; în ea vom regăsi proprietățile $[A]$ și $[M]$.

3. ÎNMULȚIREA ȘI RELAȚIA DE ORDINE. Din proprietățile $[I]$ ale inegalităților referitoare la adunare deducem proprietățile referitoare la înmulțire.

$[J_1]$ Dacă b nu este egal cu 1, $a < ab$.

$[J_2]$ $[a < b] \Longrightarrow [am < bm, \ \forall m \in N]$

(înmulțirea celor doi membri ai unei inegalități cu un același număr).

$[J_3]$ $[a < b \ \text{ și } \ a' < b'] \Longrightarrow [aa' < bb']$

(înmulțirea membru cu membru a două inegalități de același sens).

DEMONSTRAȚII. $[J_1]$ rezultă din proprietățile adunării, iar $[J_2]$ rezultă din $[J_2]$. În ceea ce privește $[J_3]$, scriem

$$\left.\begin{array}{l} [a < b] \Longrightarrow [aa' < ba'] \\ [a' < b'] \Longrightarrow [ba' < ba'] \end{array}\right\} \Longrightarrow [aa' < bb']$$

REMARCĂ. Adunarea nu este distributivă faţă de înmulţire. Într-adevăr,

$$(a + b) \cdot (a + c) = aa + ac + ba + bc > aa + bc \geqslant a + bc.$$

V. Mulţimea N a întregilor naturali este arhimedeană.

Prin definiţie, $b < a$ asigură existenţa unui număr d în aşa fel încît să avem $a = b + d$. În general, nu există un număr q astfel încît să avem $a = bq$ (fapt care se vede din tabla lui Pitagora). Şirul $b, 2b, 3b, \ldots$ al *multiplilor* lui b nu conţine toate numerele; dacă a nu este unul din elementele acestui şir, vom arăta acum că şirul conţine totdeauna numere mai mari decît a.

Proprietatea lui Arhimede (numită uneori şi *axioma lui Arhimede*, fiindcă în unele expuneri această proprietate este luată drept axiomă).

Oricare ar fi numărul a mai mare sau egal cu b, există totdeauna sau un număr q astfel încît $a = bq$, sau un număr q astfel încît

$$bq < a < b(q + 1).$$

Altfel spus

$$\forall a,\ \forall b,\ a \geqslant b: \begin{cases} \exists q : a = bq \\ \quad \text{sau} \\ \exists q : bq < a < b(q + 1). \end{cases}$$

Este clar că cele două cazuri se exclud reciproc şi că, dacă q există, el este unic. Vom arata în continuare, folosind un raţionament prin recurenţă, că orice număr n din N verifică proprietatea că „este depăşit de şirul multiplilor lui b".

Numărul 1 are, evident, această proprietate, fiindcă $1 < b + 1 \leqslant 2b$.

Fie atunci p un număr care are proprietatea investigată:

$$\exists k : p < bk.$$

Din ea deducem

$$p + 1 < bk + 1 \leqslant bk + b = b(k + 1);$$

aşadar, $p + 1$ are şi el această proprietate.

Prin urmare, orice număr **întreg natural** a este depășit de multiplii lui b. Dacă notăm cu bk **multiplul cel mai mic** al lui b care depășește pe a, atunci

$$[a > b] \Longrightarrow [k > 1]$$

și

$$b(k-1) \leqslant a < bk.$$

Prin urmare, numărul $q = k - 1$ verifică

$$bq \leqslant a < b(q+1).$$

Această teoremă constituie **punctul de plecare** al teoriei întregilor naturali (v. Cartea a II-a: **Aritmetica**).

REMARCĂ. Orice submulțime **infinită** a mulțimii întregilor naturali este arhimedeană.

DEFINIȚIE. Dacă un număr m este **mai mare** sau egal cu fiecare element al unei mulțimi **ordonate**, m se numește un *majorant al mulțimii*; mulțimea este **majorată de** m. Dacă un majorant aparține mulțimii, înseamnă că el este **elementul** cel mai mare al acelei mulțimi. Am văzut, în cele de mai sus, că *șirul multiplilor unui întreg natural nu este majorat*.

§ 2. NUMERE RELATIVE. SIMETRIZARE

Am dat, în cele precedente, **caracteristicile numerelor naturale**. Știm că, printr-un fel de **dedublare numită** *simetrizare*, sîntem conduși să considerăm întregi pozitivi și întregi negativi, care, împreună cu zero, constituie *mulțimea întregilor relativi*. Prin contrast, vom spune că întregii **naturali** sînt *absoluți*.

Mai general, simetrizarea **aceasta poate fi efectuată** pe mulțimi mai generale de elemente, **numite „absolute"** — cu **condiția** însă să se renunțe la axioma de bine **ordonare** — așa că studiul simetrizării ar putea fi plasat ceva mai **departe**, de pildă, după introducerea numerelor raționale.

Mulțimea numerelor pozitive **nu are aceeași definiție** ca mulțimea numerelor absolute, dar **deoarece structurile** lor sînt *izomorfe*, ele sînt deseori confundate în vorbire, **printr-un** abuz de limbaj. (Spunem 4, în loc de $+4$.) **Firește, această confuzie** de termeni nu este permisă la începutul **studiului teoretic** pe care-l întreprindem acum.

I. Noțiunea de izomorfism a două structuri

Fie două mulțimi: E de elemente $a, b, c, \ldots$ și E' de elemente $a', b', c', \ldots$; să presupunem că între elementele acestor mulțimi a fost definită o corespondență biunivocă: spunem că a' este imaginea lui a, b' este imaginea lui b etc. Dacă în E este definită o operație o, putem introduce în E' o operație o' imagine a lui o prin condiția că rezultatul operației o' asupra unei perechi oarecare (m', p') este imaginea rezultatului operației o asupra perechii (m, p). Toate proprietățile lui o, cum sînt de pildă comutativitatea, sau asociativitatea, vor fi transmise operației imagine o'. Prin urmare, prin aceste operații, mulțimile E și E' vor fi înzestrate cu structuri analoage, care sînt una imaginea celeilalte și nu diferă decît prin notații. Dacă faptul nu riscă să creeze confuzii, putem chiar folosi unul și același simbol pentru a nota operațiile o și o', ceea ce va face ca, formal, calculele să fie aceleași în E și în E'. Spunem că cele două operații introduc *structuri izomorfe* pe E și pe E', sau că E și E' *sînt izomorfe pentru operațiile* o și o'.

Tot astfel, dacă în E și în E' sînt definite cîte o structură de ordine astfel încît

„m este înaintea lui p" $\Longleftrightarrow$ „m' este înaintea lui p'",

atunci cele două mulțimi sînt izomorfe în raport cu aceste relații de ordine.

II. Extensie prin simetrizare

Scopul nostru este să definim o mulțime Z suficient de cuprinzătoare pentru ca una din submulțimile ei să fie izomorfă cu mulțimea N a întregilor naturali pentru adunare și relația de ordine — și deci, și pentru înmulțire — și să fie astfel încît scăderea să fie *totdeauna* posibilă. Este ceea ce se numește a face o *extensie a lui* N *prin simetrizare*.

Vom preciza axiomele utilizate: axioma de bine ordonare nu intervine decît la sfîrșitul studiului.

Axiome care definesc mulțimea Z

a) Axiome referitoare la o primă operație numită adunare (notată $+$)

1. Axiomele $[A]$, din care decurg consecințele $[C]$.

2. Axiome creatoare de elemente noi:

$[S_1]$ Există un element neutru pentru adunare, numit *zero* și notat 0.

Așadar

$$0 \in Z\ ;\ a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in N.$$

$[S_2]$ Fiecare element a din Z este asociat cu un element a' astfel încît

$$a + a' = 0.$$

De remarcat că elementul asociat lui 0 este 0 și că

$$[a' = b] \Longleftrightarrow [b' = a], \text{ adică } \quad (a')' = a.$$

Spunem că a și a' sînt *simetrice pentru adunare*; spunem de asemenea că a și a' sînt *opuse* unul altuia. Pentru o operație oarecare notată $\circ$ și avînd un element neutru ν, două elemente care sînt astfel încît

$$a \circ a' = a' \circ a = \nu$$

se numesc simetrice. (Cuvîntul „opuse" este rezervat pentru operația notată $+$.)

CONSECINȚĂ (care justifică alegerea acestor axiome).

Fiecărei perechi (a, b) *din* Z *îi corespunde un număr* x *astfel încît* $a = b + x$. Într-adevăr, conform axiomelor $[A]$ și $[S_2]$, numărul $x = a + b'$ satisface această condiție.

În plus, această soluție este unică, fiindcă

$$[b + x = a \text{ și } b + y = a] \Longrightarrow [b + x = b + y] \Longrightarrow [x = y].$$

Scriem $x = a - b$; operația se numește *scădere* și x este *diferența* între a și b.

TEOREMĂ

$$[x = b - a] \Longrightarrow [a - b = x']$$

căci

$$[b = a + x \text{ și } a = b + y] \Longrightarrow [x + y = 0].$$

Așadar, în Z există o operație asociativă, care are un element neutru, și fiecare element are un simetric: spunem despre o astfel de mulțime că are o *structură de grup*. Deoarece operația este și comutativă, acesta este un *grup comutativ*, numit și *grup abelian*,

după numele ilustrului matematician norvegian ABEL (1802—1829). Deoarece operaţia este numită adunare şi se notează cu semul $+$, grupul este un *grup aditiv*. (Cu noţiunea de grup ne vom întîlni frecvent, de-a lungul acestei lucrări.)

b) **Axiome referitoare la o a doua operaţie numită înmulţire**

1. Va trebui să modificăm puţin axiomele care se refereau la întregii naturali:

Axiomele $[A]$. Ele se păstrează, cu excepţia lui $[A_2]$ care ar fi incompatibilă cu distributivitatea; o înlocuim cu

$$[A_2'''] \qquad a \neq 0 : [ab = ab'] \Longrightarrow [b = b']$$
$$b \neq 0 : [ab = a'b] \Longrightarrow [a = a'].$$

Aşadar: simplificare cu un element diferit de zero.

Axiomele $[M]$

$[M_1]$ se păstrează: *distributivitate în raport cu adunarea.*

$[M_2]$ este înlocuită cu $[M_2']$: *există un element neutru pentru înmulţire.* Îl vom nota μ. Aşadar

$$\forall a \in Z,\ \exists \mu \in Z : a\mu = \mu a = a.$$

2. Teoreme referitoare la înmulţire. TEOREMA 1. *Produsul oricărui element cu zero este zero.*

Într-adevăr, prin definiţie, $a + 0 = a$.

Deci, conform lui $[A_1]$:

$$a(a + 0) = aa$$

şi, conform lui $[M_1]$:

$$aa + a0 = aa;$$

aşadar

$$aa + a0 = aa + 0$$

de unde, prin simplificare, $a0 = 0$. Tot astfel, $0a = 0$.

TEOREMA 2. *Dacă un produs de doi factori este egal cu zero, cel puţin unul din factori este egal cu zero.*

Într-adevăr,

$$[ab = 0 \text{ şi } a \neq 0] \Longrightarrow [ab = a0 \text{ şi } a \neq 0] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [b = 0] \text{ (conform lui } [A_2''']).$$

TEOREMA 3. *Comparație între* ab, ab', $a'b$ și $a'b'$.

$$[b + b' = 0] \Longrightarrow [a(b + b)' = a0 = 0],$$

deci $ab + ab' = 0$.

Prin urmare $(ab)' = ab'$. Tot astfel

$$(ab)' = a'b,\ (ab')' = a'b' = ab.$$

În final, produsele sînt egale două cîte două, și opuse două cîte două:

$$ab = a'b',\ a'b = ab' = (ab)'.$$

TEOREMA 4. *Distributivitatea înmulțirii în raport cu scăderea.*

$$c(a - b) = c(a + b') = ca + cb' = ca + (cb)' = ca - cb.$$

CONSECINȚĂ. *Distributivitatea produsului în raport cu o succesiune oarecare de adunări și de scăderi.*

Mulțimea Z este acum înzestrată cu o structură de grup față de adunare, și cu o altă operație care este distributivă în raport cu prima: exprimăm toate acestea spunînd că Z este înzestrată cu o *structură de inel*. Deoarece înmulțirea este comutativă, spunem că inelul este *comutativ*. (În matematică se studiază și inele mai generale, renunțînd de exemplu, la axioma simplificării $[A_2']$, sau la comutativitatea produsului. Vom studia, ceva mai tîrziu, un alt inel: inelul polinoamelor [Cartea a II-a].)

Să remarcăm că, în mulțimea Z, înmulțirea nu induce o structură de grup, fiindcă nu se presupune că orice element are un simetric pentru înmulțire (el s-ar numi un *invers*).

c) **Axioma trichotomiei**

Mulțimea Z nu este încă complet caracterizată; trebuie să adăugăm axioma următoare:

1. Axioma $[P]$. *Elementele mulțimii se repartizează în trei clase*:

1) O clasă care nu cuprinde decît numărul 0.

2) O clasă închisă pentru adunare și pentru înmulțire. Dacă P este această submulțime, definiția ei este așadar

$$\forall a,\ \forall b : [a \in P \text{ și } b \in P] \Longrightarrow [a + b \in P \text{ și } ab \in P].$$

3) O clasă care cuprinde toate elementele opuse celor din P. Vom numi P' această submulțime.

Să numim *numere pozitive* elementele din P și *numere negative* pe cele din P'; despre elementul zero vom spune că este *nul*. Axioma se enunță astfel:

$[P]$: *Orice element din Z este nul, pozitiv sau negativ*, cazurile acestea fiind disjuncte. *Două elemente opuse nenule sînt unul pozitiv și celălalt negativ. Suma și produsul a două elemente pozitive sînt pozitive.*

CONSECINȚE. (Dacă atribuim un *semn* pentru a caracteriza numerele pozitive și un altul pentru a caracteriza numerele negative, această consecință se numește *regula semnelor*; vom alege ceva mai tîrziu aceste semne):

După teorema 3 a înmulțirii, *produsul a două numere negative este pozitiv*. Mai general, un produs care nu conține nici un factor nul este pozitiv dacă numărul de factori negativi este par, și este negativ dacă numărul acesta este impar.

În particular, oricare ar fi a nenul, aa este pozitiv.

Elementul neutru μ verifică $\mu\mu = \mu$, și este, deci, *pozitiv*.

2. Teorema ordinei. Să introducem relația notată $<$ și definită prin

$$a < b \iff [b - a \text{ este pozitiv}]$$

Este oare aceasta o relație de ordine?

Ea nu este reflexivă. Ea nu este nici simetrică, căci

$$b = a + d \iff a = b + d';$$

dacă d este pozitiv, d' este, așadar, negativ. Să verificăm acum tranzitivitatea:

$$\left.\begin{array}{l}[a < b] \iff [\exists d \text{ pozitiv} : b = a + d\,] \\ [b < c] \iff [\exists d' \text{ pozitiv} : c = b + d'] \end{array}\right\} \Longrightarrow [c = a + (d + d')];$$

or, $d + d'$ este pozitiv; prin urmare

$$[a < b \quad \text{și} \quad b < c] \Longrightarrow [a < c].$$

Așadar, prin relația astfel introdusă, *mulțimea E este total ordonată.*

CONSECINȚE

$$\text{deoarece } a - 0 = a, \qquad 0 < a \iff a \text{ pozitiv}$$

$$\text{deoarece } 0 - a = a', \qquad a < 0 \iff a \text{ negativ.}$$

Prin urmare (prin tranzitivitate), *orice număr negativ este mai mic decît orice număr pozitiv.*

3. Definiția valorii absolute. Valoarea absolută $|a|$ a unui număr a se definește prin

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

$$|a| = a \iff a \text{ pozitiv}$$

$$|a| = a' \iff a \text{ negativ.}$$

Prin urmare, $|a|$ este pozitiv sau nul.

TEOREMA 1.

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

TEOREMA 2.

$$(|a| + |b|)' \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

(rezultă din $|a|' \leqslant a \leqslant |a|$ și $|b|' \leqslant b \leqslant |b|$).

d) Ne rămîne să caracterizăm pe Z ca mulțime de **întregi** pozitivi, negativi și nul și, pentru aceasta, trebuie să introducem o axiomă de **bine ordonare** în submulțimea P a numerelor pozitive.

$[BO]'$: *Orice submulțime a lui P care nu este vidă are un element care este mai mic decît toate celelalte elemente ale submulțimii.*

Și, în particular,

$[BO_1]'$: *Submulțimea P are ea însăși un element minim.*

TEOREMĂ. *Elementul minim al lui P este elementul neutru μ al înmulțirii.*

Într-adevăr, fie p acest element minim; între elementele pozitive p și μ există relația de ordine $p \leqslant \mu$. Prin urmare

$$p - pp = p\mu - pp = p(\mu - p) \geqslant 0.$$

Or, inegalitatea este imposibilă, fiindcă altfel numărul pozitiv pp ar fi mai mic decît p, ceea ce ar contrazice definiția lui p; prin urmare numai egalitatea se poate realiza și $p = \mu$. De aceea, numerele pozitive sînt μ, $\mu + \mu$, $\mu + \mu + \mu$ etc.

CONCLUZIE. O mulțime Z care îndeplinește aceste condiții este o mulțime a cărei submulțime P este izomorfă cu mulțimea întregilor naturali N în raport cu adunarea, cu înmulțirea, cu axiomele de ordine, cu alte cuvinte — în raport cu toate pro-

prietăţile care caracterizează mulţimea *N*. *Prin urmare, toate mulţimile Z vor fi izomorfe cu cea pe care o vom construi acum*:

Drept submulţime *P*, luăm mulţimea întregilor naturali. Fiecărui număr întreg natural a îi asociem un element notat cu un simbol nou, a' [de pildă, lui 4 îi asociem simbolul $(4)'$]; în plus, introducem simbolul 0 şi constrîngem aceste simboluri să verifice axiomele enunţate mai sus.

Elementul neutru al înmulţirii este cel mai mic întreg natural; aşadar, este 1. Valorile absolute sînt întregii naturali.

Notaţia adoptată în realitate pentru asociatul a' al numărului natural este $-a$, scris cu ajutorul semnului scăderii. Aceasta nu poate genera nici o confuzie fiindcă, oricare ar fi elementul m, $m + a' = m - a$. Convenţia revine deci la a scrie

$$m + (-a) = m - a.$$

Se adoptă această convenţie chiar şi atunci cînd a este negativ: atunci $a' = -a$ este pozitiv.

În cazul unei mulţimi izomorfe cu cea pe care tocmai am constituit-o, numerele pozitive — în corespondenţă biunivocă cu întregii naturali — vor fi prevăzute cu un semn +; şi se adoptă convenţia $m + (+a) = m + a$.

Mulţimea întregilor relativi Z se scrie deci:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

REMARCĂ IMPORTANTĂ. Extensia prin simetrizare de mai sus, precum şi convenţia referitoare la semnele + şi —, se va păstra şi cînd vom face simetrizarea pornind de la mulţimi mai cuprinzătoare decît cea a întregilor naturali (fracţii, numere iraţionale), dar vom abandona axioma de bine ordonare şi consecinţele ei.

§ 3. FRACŢII ŞI NUMERE RAŢIONALE.

Ştim că numerele întregi, chiar şi cele relative, sînt insuficiente pentru nevoile măsurării mărimilor; practica introduce fracţii, de pildă 3/4, şi consideră că 3/4 şi 6/8 sînt echivalente din punct de vedere al acestor măsurări. Ce fel sînt numerele astfel introduse? Ne vom ocupa acum de definirea lor prin proprietăţile fundamentale binecunoscute, impuse de însăşi utilizarea acestor numere.

CUM SE PUNE PROBLEMA DIN PUNCT DE VEDERE MATEMATIC.

Definiția întregilor naturali nu permite rezolvarea ecuației $b + d = a$ decît în cazul în care a este mai mare decît b; în caz contrar, ecuația nu este satisfăcută de nici unul din numerele mulțimii. Am văzut că extensia prin care am creat mulțimea întregilor pozitivi, negativi sau nul a ridicat restricția și a asigurat existența diferenței d oricare ar fi numerele a și b ale mulțimii. A fost suficient, pentru aceasta, să introducem numărul zero și să asociem fiecărui element a simetricul lui pentru adunare, adică *opusul* lui.

În ceea ce privește înmulțirea, știm că ecuația $bq = a$, cînd b și a sînt date în mulțimea întregilor (naturali sau relativi) nu are, în general, soluție. Numărul q nu există decît pentru anumite perechi (a, b). Am exprimat acest fapt spunînd că mulțimea nu are o structură de grup pentru înmulțire.

Pentru a face posibilă totdeauna operația inversă înmulțirii, putem proceda ca la adunare: introducem un element neutru pentru înmulțire, și fiecărui element îi asociem un simetric care, în cazul de față, va fi numit *inversul* numărului respectiv. Elementul neutru se numește „element unitate" și se notează e. Este elementul 1, în cazul întregilor. Inversul lui b (de exemplu) va fi notat β. Așadar $b\beta = e$ și soluția ecuației $bq = a$ este $q = \beta a$.

Introducem în felul acesta *cîtimile*: jumătatea, treimea, pătrimea, cum au procedat încă și vechii egipteni.

Dar noi vrem o mulțime închisă pentru adunare. Or, suma a două cîtimi nu este o cîtime. Extensia propusă mai sus nu este suficient de cuprinzătoare. De aceea vom introduce o mulțime mai bogată, mai largă: mulțimea *fracțiilor*. Vom vedea însă că ea este prea cuprinzătoare (!), și, în cele din urmă, vom fi conduși la mulțimea mai puțin cuprinzătoare care corespunde scopului urmărit: mulțimea *numerelor raționale*.

I. Fracțiile

Numim *fracție orice pereche de întregi* a, b de semne oarecare (pentru început ne-am putea limita la întregi naturali), *cu condiția că* b *nu este nul*. Scriem fracția sub formă a/b, un simbol provizoriu pe care-l supunem axiomelor următoare:

a) **Relația de echivalență.** În extensia pe care dorim s-o realizăm, $bq = a$ trebuie să atragă după sine $mbq = ma$; prin

urmare, dacă q este notat cu a/b, el va fi notat și cu ma/mb, și dacă q este notat cu a/b și a'/b', el trebuie să poată fi notat și cu ab'/bb' și $a'b/bb'$.

Toate acestea justifică intuitiv următoarea convenție:

În mulțimea considerată există o relație de echivalență

$$[E] \quad [a/b \equiv a'/b'] \Longleftrightarrow [ab' = a'b].$$

Să verificăm că aceasta este realmente o relație de echivalență: reflexivitatea și simetria sînt evidente; să demonstrăm tranzitivitatea.

$$\left.\begin{array}{l} [a/b \equiv a'/b'] \Longleftrightarrow [ab' = a'b] \\ [a'/b' \equiv a''/b''] \Longleftrightarrow [a'b'' = a''b] \end{array}\right\} \Longrightarrow [aa'b'b'' = a'a''bb'].$$

Deoarece, prin definiție, b, b', b'' nu sînt nule, de aici deducem $ab'' = ba''$, chiar și atunci cînd $a' = 0$, fiindcă atunci $a = a'' = 0$.

CONSECINȚĂ:

$$a/b \equiv ma/mb.$$

APLICAȚIE. Aducerea la același numitor (regula cunoscută).

b) **Adunarea.** [Vrem să adoptăm o regulă care să conducă la $b(q + q') = a + a'$.]

1. *Definiția adunării a două fracții*:

fracții cu același numitor: $a/b + a'/b \equiv (a + a')/b$;

fracții cu numitori oarecare: după aducerea la același numitor și înlocuirea unei fracții cu o fracție echivalentă,

$$a/b + a'/b' \equiv (ab' + ba')/bb'.$$

ENUNȚ. Orice fracție echivalentă cu fracția care se obține — după aducerea la același numitor — adunînd numărătorii și păstrînd numitorul comun se numește *suma* fracțiilor date.

Așadar, în felul acesta *suma este definită pînă la o echivalență*.

2. *Operația introdusă verifică proprietățile* $[A]$, ca o consecință a proprietăților întregilor care figurează la numărători după aducerea la același numitor. Ea verifică $[S_1]$ dar, în cazul de față, elemente neutre sînt toate fracțiile, echivalente între ele, care au numărătorul nul și numitorul nenul, altfel oarecare. Fracțiile $0/p$ se numesc *fracții nule*.

Operația verifică $[S_2]$, dar fracțiile opuse lui a/b sînt $(-a)/b$, $a/(-b)$ și toate fracțiile echivalente lor. Deducem de aici regula de scădere

$$(a/b) - (a'/b') \equiv (a/b) + [(-a')/b'] \equiv (ab' - ba')/bb'.$$

c) **Înmulțirea.** [Vrem să adoptăm o regulă care să conducă la $(bb')qq' = aa'$.]

1. DEFINIȚIE. $(a/b)\,(a'/b') \equiv (aa')/(bb')$.

Orice fracție echivalentă cu fracția care are ca termeni produsele termenilor fracțiilor date se numește *produsul fracțiilor*.

2. Proprietățile $[A]$ și $[M]$ se verifică făcînd aducerea la același numitor; natural, $[A_2]$ are forma $[A_2''']$: simplificarea nu este permisă decît cu un element nenul.

$[M_2]$ are forma $[M_2']$: există un element neutru pentru înmulțire, care, aici, nu este definit decît pînă la o echivalență: p/p, oricare ar fi p nenul.

3. Elementul neutru ca factor al unui produs:

1) $(a/b)\,(0/q) \equiv 0/p$;

2) $[a \neq 0$ și $(a/b)(p/q) \equiv 0/n] \Longrightarrow [p = 0]$.

ENUNȚURI. Produsul oricărei fracții cu o fracție nulă este o fracție nulă.

Dacă produsul a două fracții este o fracție nulă, cel puțin una din fracții este o fracție nulă.

d) **Teorema** care justifică introducerea fracțiilor:

În mulțimea fracțiilor, împărțirea — operație inversă înmulțirii — este posibilă, cu condiția ca divizorul să nu fie o fracție nulă. Într-adevăr, orice fracție nenulă are o fracție inversă definită pînă la o echivalență: dacă $a \neq 0$, avem $(a/b)(b/a) \equiv n/n$ (elementul neutru al înmulțirii); prin urmare

$$[a' \neq 0 \text{ și } (a'/b')(u/v) \equiv a/b] \Longrightarrow [u/v \equiv (a/b)(b'/a')].$$

II. Numerele raționale

Pentru a realiza o unicitate autentică în operațiile de mai sus, este suficient să considerăm nu mulțimea fracțiilor ca atare, ci *mulțimea claselor de echivalență*. O fracție nu va mai interveni

decît ca reprezentantă a clasei din care face parte. Invers, caracterizăm fiecare clasă prin una din fracţiile care îi aparţin. *Fiecare clasă se numeşte un* NUMĂR RAŢIONAL.

Clasa fracţiilor nule este *numărul raţional nul*, ω, reprezentat de pildă de 0/1.

Clasa fracţiilor neutre pentru înmulţire va fi numărul raţional neutru pentru înmulţire, μ, reprezentat de pildă de 1/1.

Dacă α şi β sînt numere raţionale, $\alpha = \beta$ va însemna că α şi β fac parte din aceeaşi clasă de fracţii echivalente.

Odată stabilite toate acestea, toate proprietăţile enunţate pentru fracţii vor fi adevărate pentru numerele raţionale, de data aceasta — cu unicitate pentru rezultatele operaţiilor. Este tocmai ceea ce exprimă concluzia:

Mulţimea numerelor raţionale formează un grup comutativ în raport cu adunarea; înmulţirea, distributivă în raport cu adunarea, îi conferă o *structură de inel*. În plus, orice element — cu excepţia elementului nul ω — are un *element invers* (simetric pentru înmulţire). Această ultimă condiţie transformă structura de inel în *structură de corp*.

Notă: Iată definiţiile generale ale acestor structuri:

DEFINIŢII. O mulţime este un *grup* dacă este înzestrată cu o operaţie internă asociativă, care are un element neutru şi este astfel încît orice element are un simetric.

O mulţime este un *inel* dacă este înzestrată cu două operaţii interne, dintre care una îi conferă o structură de grup, iar a doua este asociativă şi distributivă faţă de prima.

Un inel este un *corp* dacă operaţia a doua înzestrează mulţimea cu o nouă structură de grup, cînd se extrage din această mulţime elementul neutru al primei operaţii.

Prima operaţie a unui inel, sau a unui corp, se notează cu semnul adunării; elementul ei neutru este zero. Operaţia a doua se notează cu semnul înmulţirii; ea poate să nu fie comutativă, dar atunci trebuie asigurată distributivitatea, la dreapta şi la stînga, faţă de adunare.

REMARCĂ. Noi n-am utilizat toate proprietăţile întregilor, în particular — axiomele de ordine; aceasta înseamnă că am fi putut opera asupra perechilor de elemente ale unei mulţimi mai generale decît cea a întregilor. Am fi avut atunci o structură de corp pe o mulţime alta decît inelul numerelor raţionale. Şi tocmai multivalenţa extensiei studiate justifică folosirea acestor termeni

generali. Corpurile definite așa cum am făcut-o noi, introducînd o relație de echivalență între elemente, se numesc *corpuri de cîturi*. Vom întîlni un alt exemplu de asemenea corp cînd vom trece de la inelul polinoamelor la corpul fracțiilor raționale ai căror termeni sînt polinoame.

III. În raport cu adunarea și înmulțirea, mulțimea Z a întregilor este izomorfă cu o submulțime a mulțimii Q a numerelor raționale.

1) Într-adevăr, să comparăm numărul rațional de reprezentant $a/1$ cu întregul a. Corespondența este biunivocă și asociază suma și produsul elementelor. Prin urmare luînd întregul a ca reprezentant al simbolului $a/1$, obținem un model al lui Q. Modelul acesta este efectiv adoptat în practică, așa că vom scrie 0 pentru ω, 1 pentru μ, a pentru clasa fracțiilor echivalente cu $a/1$, adică $2a/2$, $3a/3$, ...

Dar atunci

$$(b/1)\ (a/b) \equiv a/1$$

se scrie

$$b\ [a/b] = a$$

dacă notăm cu $[a/b]$ numărul rațional al cărui reprezentant este a/b. Prin urmare, *numărul rațional de reprezentant a/b este cîtul lui a împărțit la b.* Scriem $\frac{a}{b}$ și convenim să folosim această notație $\frac{a}{b}$ pentru a reprezenta cîtul lui a prin b, numărul rațional de reprezentant a/b, precum și fracția a/b ea însăși. Comitem prin aceasta un abuz de notație, fiindcă confundăm între ele mulțimi de structuri izomorfe.

2) Pentru ca izomorfismul între mulțimea întregilor și mulțimea numerelor raționale $\frac{a}{1}$ să fie extins la relațiile de ordine, trebuie să definim o asemenea relație și în mulțimea a doua:

$$\frac{a}{1} < \frac{b}{1} \iff a < b.$$

O vom extinde acum la întreaga mulțime a numerelor raționale:

Relația de ordine totală în mulțimea Q a numerelor raționale

a) Semnul unui număr rațional. Dacă două fracții a/b și a'/b' sînt echivalente, egalitatea $ab' = ba'$ care exprimă această echivalență demonstrează că a' și b' sînt de același semn sau de semne diferite, după cum a și b sînt sau nu de același semn. În plus, submulțimea formată din numerele raționale ρ ale căror reprezentanți sînt fracții a/b cu termeni de același semn este închisă pentru adunare și pentru înmulțire. Opusele numerelor ρ sînt formate din fracțiile $-a/b \equiv a/-b$ cu termenii de semne contrare. Toate acestea justifică definiția:

Spunem despre un număr rațional că este pozitiv dacă fracțiile care îi aparțin au termenii de același semn: fracțiile însele se numesc, în acest caz, fracții pozitive. Fracțiile, precum și numărul rațional pe care-l reprezintă, se numesc *negative* dacă cei doi termeni ai fracțiilor sînt de semne contrare.

b) Definiția relației de ordine, notată $<$:

$$[a/b < c/d] \Longleftrightarrow [(c/d) - (a/b) \text{ pozitiv}].$$

Iar pentru numere raționale,

$$[\rho < \sigma] \Longleftrightarrow [\sigma - \rho \text{ pozitiv}].$$

Se verifică imediat că aceasta este, într-adevăr, o relație de ordine: nereflexivă, nesimetrică, tranzitivă, aducînd fracțiile la un același numitor pozitiv; după aceea este suficient să se compare între ei numărătorii.

În plus, se poate verifica în același fel că

$$0 < \rho \Longleftrightarrow \rho \text{ pozitiv}$$

$$\rho < 0 \Longleftrightarrow \rho \text{ negativ}.$$

Proprietățile mulțimii Q

Teorema 1. *Mulțimea numerelor raționale pozitive este arhimedeană*, adică

$$\left.\begin{array}{c} \forall\rho,\ \forall\sigma,\ \rho \in Q,\ \sigma \in Q \\ 0 < \rho < \sigma \end{array}\right\} \Longrightarrow [\exists n \in N : \rho n > \sigma].$$

Existența acestui întreg pozitiv n rezultă, după aducerea la același numitor pozitiv, din proprietatea analoagă a mulțimii întregilor naturali.

Conchidem, ca în cazul numerelor naturale, că *şirul multiplilor* ρ, 2ρ, 3ρ ,... *ai unui număr raţional pozitiv nu este majorat.*

Teorema 2. *Între oricare două numere raţionale există numere raţionale* (această teoremă este contrară celei de bine ordonare a întregilor).

1. *Între* 0 *şi un număr raţional pozitiv oarecare* r *există numere raţionale.* Într-adevăr, fie a/b o fracţie care aparţine lui r. Prin ipoteză, a şi b sînt de acelaşi semn: îi putem presupune pozitivi. Scriem

$$a/b \equiv (na)/(nb).$$

Dacă r' este clasa fracţiilor echivalente cu $a'/(nb)$, inegalitatea $0 < r' < r$ este asigurată de inegalitatea $a < a' < na$; or, asemenea valori a' există dacă n este ales mai mare decît 1.

2. Din punctul 1. se deduce teorema generală, fiindcă $r_1 < r' < r_2$ este echivalentă cu

$$0 < r' - r_1 < r_2 - r_1.$$

Vom lua deci $r' = r + s$, unde s este cuprins între 0 şi $r_2 - r_1$.

ALT ENUNŢ. *Fiind dat un număr raţional* r, *oricare ar fi numărul pozitiv* ε *arbitrar ales, există numere raţionale cuprinse între* $r - \varepsilon$ *şi* $r + \varepsilon$

$$\forall r,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho : r - \varepsilon < \rho < r + \varepsilon.$$

Exprimăm această proprietate spunînd că mulţimea Q a numerelor raţionale este *peste tot densă.*

Rezultă de aici că numerele raţionale sînt suficiente pentru a exprima orice experienţă de măsurare, şi aceasta oricare ar fi precizia dorită, dinainte aleasă.

REMARCĂ. Mulţmea Q a numerelor raţionale este mai bogată decît mulţimea Z a numerelor întregi. Dar nu putem spune că în Q există mai multe elemente decît în Z: în ambele cazuri există o infinitate de elemente. Dacă vrem să exprimăm precis comparaţia între două infinităţi, sîntem conduşi la o noţiune care o înlocuieşte pe cea de număr cardinal al unei colecţii; este noţiunea de *putere* a unei mulţimi. Vom spune cîteva cuvinte despre ea în cap.3 al Cărţii a II-a.

§ 4. NOȚIUNI DESPRE NUMERELE REALE

Am văzut, mai înainte, că mulțimea numerelor raționale este suficientă pentru nevoile practicii și ale științei experimentale. Studiul geometriei teoretice a condus însă Școala pitagoreică la proprietatea pe care o enunțăm acum: dacă latura unui pătrat este luată drept unitate, diagonala lui este măsurată de un număr x care este astfel încît $x^2 = 2$. Or, nici un număr rațional nu satisface această ecuație. Într-adevăr, vom justifica — în cadrul aritmeticii — raționamentul următor: dacă ar exista o fracție $\frac{p}{q}$ care verifică $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, am putea presupune că fracția aceea este ireductibilă. Or, egalitatea se scrie $p^2 = 2q^2$; prin urmare p este par: $p = 2p'$, iar q este impar. Dar egalitatea devine atunci $4p'^2 = 2q^2$, adică $2p'^2 = q^2$, care cere ca q să fie par, ceea ce contrazice ipoteza.

După mărturia lui Platon (sec. al V-lea î.e.n.), aceeași concluzie de imposibilitate fusese formulată și pentru $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, ... pînă la $x^2 = 17$, evident — cu excepția valorilor $x^2 = 4$, 9 sau 16.

PUNEREA PROBLEMEI DIN PUNCT DE VEDERE MATEMATIC

Așa cum am făcut o extensie a mulțimii N a întregilor naturali la mulțimea Z, pentru ca ecuația $b + x = a$ să aibă totdeauna o soluție, și apoi extensia la mulțimea Q a numerelor raționale în așa fel ca ecuația $bq = a$ să aibă totdeauna o soluție (cu condiția că b nu este nul), tot astfel trebuie să facem o extensie a lui Q pentru ca ecuația $x^2 = a$ să aibă totdeauna o soluție, cel puțin cînd a este pozitiv, mulțimile precedente fiind, de fiecare dată, izomorfe cu o submulțime a mulțimii create.

Dar există multe alte ecuații care nu au soluție în mulțimea numerelor raționale; extensia pe care ne-o propunem s-o facem poate fi mai mult sau mai puțin largă. Pentru început ne limităm la rădăcinile pătrate.

I. Introducerea rădăcinilor pătrate

Ce ne furnizează mulțimea Q a numerelor raționale pentru studiul ecuației $x^2 = a$? Să ne limităm la cazul a = *întreg pozitiv*.

Dacă ecuația este imposibilă în mulțimea Q a raționalelor, această mulțime se împarte în două clase: clasa Q' a numerelor q' prea mici: $q'^2 < a$, și clasa Q'' a numerelor q'' prea mari: $q''^2 > a$.

a) Mulțimea Q' nu are un element maxim. Cu alte cuvinte, oricare ar fi $q' \in Q'$, există totdeauna alt element din Q' mai mare decît elementul ales.

Într-adevăr, fie $q' = \frac{m}{p}$. Prin ipoteză, $\left(\frac{m}{p}\right)^2 < a$.

Prin urmare, $ap^2 - m^2 = d$ este un întreg pozitiv, $d \geqslant 1$.

Să considerăm atunci numărul rațional $\frac{km+1}{kp}$, evident mai mare decît q'. Vom verifica imediat că luînd pe k suficient de mare, acest număr rămîne în clasa Q', cu alte cuvinte că avem

$$ak^2p^2 > (km+1)^2 \text{ , adică } k^2d > 2km + 1.$$

Este suficient să luăm, de pildă, $k = 2dm$, fiindcă inegalitatea dorită se scrie atunci

$$4dm^2(d^2 - 1) > 1,$$

care este îndeplinită dacă $d > 1$.

Dacă $d = 1$, vom lua $k > 2m$.

b) Tot astfel, *mulțimea Q''*, care este minorată de oricare număr *q', nu are un element minim.*

Dacă $q'' = \frac{m}{p}$, vom analiza de data aceasta numărul $\frac{km-1}{kp}$ din clasa Q''. Trebuie ca, plecînd de la

$$m^2 - ap^2 = d \geqslant 1,$$

să existe inegalitatea $(km-1)^2 > ak^2p^2$, prin urmare inegalitatea $k^2d > 2km - 1$.
Vom lua după aceea $k = 2dm$.

c) Putem face să corespundă unui număr q' din Q' un număr q'' din Q'' în așa fel încît $q'' - q'$ să fie mai mic decît orice număr rațional pozitiv ε, arbitrar ales.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in Q,\ \exists q' \in Q' \text{ și } \exists q'' \in Q'' : q'' - q' < \varepsilon.$$

Într-adevăr, putem totdeauna considera un număr *întreg pozitiv* p astfel încît

$$0 < \frac{1}{p} < \varepsilon$$

(dacă $\varepsilon = \alpha/\beta$, este suficient să luăm $p > \beta/\alpha$). Este suficient atunci să luăm $q' = m/p$, $q'' = (m+1)/p$, unde m este întregul care verifică

$$\left(\frac{m}{p}\right)^2 < a < \left(\frac{m+1}{p}\right)^2.$$

Or, acest număr m există realmente, căci şirul $1, 2^2, 3^3, \ldots n^2, \ldots$ al pătratelor întregilor nu este majorat; el depăşeşte orice întreg k (fiindcă conţine pe k^2), prin urmare, depăşeşte şi pe ap^2.

Exprimăm proprietatea *c)* prin propoziţia: putem găsi perechi q'', q' astfel încît $q'' - q'$ *să tindă către zero* (v. cap.4).

Ne putem da seama acum de natura axiomei creatoare a numărului nou care trebuie introdus între q' şi q'':

II. Axioma completitudinii

[Γ] *Orice submulţime majorată are un cel mai mic majorant.*

a) Mulţimea care verifică proprietăţile enunţate ale mulţimii Q a numerelor raţionale şi, în plus, axioma [Γ], se numeşte *mulţimea numerelor reale* şi se notează cu R. În realitate, axioma [Γ] cuprinde două axiome, pe care le putem enunţa separat:

[Γ_1] *Orice submulţime majorată a lui Q are un cel mai mic majorant care aparţine lui R şi, în mod excepţional, lui Q.*

[Γ_2] *Orice submulţime majorată a lui R are un cel mai mic majorant care aparţine lui R* (fără să fie nevoie, aici, să distingem submulţimea Q a lui R). Acest majorant se numeşte *marginea superioară* a submulţimii.

Vom admite compatibilitatea axiomelor care definesc numerele reale. Mulţimea acestor numere este deci înzestrată cu operaţii de adunare şi de înmulţire, cu proprietăţile enunţate pentru Q, şi ea este total ordonată; fiecare număr real este sau pozitiv, sau negativ, sau zero.

b) În aceste condiţii, să demonstrăm existenţa unui număr real r care satisface ecuaţia $x^2 = a$ (a = întreg pozitiv, care nu este pătratul unui număr raţional).

Să reluăm partiţia lui Q în două clase Q' şi Q''. Deoarece Q' este majorată, există un cel mai mic majorant în R, fie el r. (Ştim că r nu aparţine lui Q.) Dar orice număr $q'' \in Q''$ este majorant al

lui Q', prin urmare este mai mare decît r. Altfel spus, r este un minorant al lui Q''. Aşadar

$$\forall q' \in Q' \text{ şi } \forall q'' \in Q'', \quad q' < r < q''.$$

Mai există vreun alt număr $s \in R$ care verifică $q' < s < q''$? Dacă ar exista, am deduce

$$\forall q' \in Q' \text{ şi } \forall q'' \in Q'' : 0 \leqslant |s - r| < q'' - q'$$

prin urmare, oricare ar fi ε pozitiv, numerele astfel determinate ar verifica

$$0 \leqslant |s - r| < \varepsilon,$$

ceea ce implică $s = r$.

Aşadar, există în R un număr r, şi numai unul singur, care verifică

$$\forall q' \in Q' \text{ şi } \forall q'' \in Q'' : q'^2 < r^2 < q''^2.$$

Or, avem şi $q'^2 < a < q''^2$, prin urmare

$$0 \leqslant |a - r^2| < q''^2 - q'^2 < 3\varepsilon q'', \quad \forall \varepsilon,$$

ceea ce implică $r^2 = a$. Aşadar r este soluţia ecuaţiei $x^2 = a$; şi este unica soluţie pozitivă. Scriem $r = \sqrt{a}$. Unica soluţie negativă este $-\sqrt{a}$. a se citeşte „rădăcina pătrată a lui a".

c) Am demonstrat, admiţînd compatibilitatea axiomelor, existenţa rădăcinii pătrate pozitive a unui întreg pozitiv; din ea deducem existenţa rădăcinii pătrate a unui număr raţional pozitiv; am putea demonstra, prin metode analoage, existenţa rădăcinii pătrate a oricărui număr real pozitiv, dar şi cea a rădăcinilor cubice, a celor de ordinul 4, de ordinul n. În afară de aceasta, noi am mai introdus automat încă multe alte numere: fie, de pildă, ecuaţia

$$f(x) \equiv x^7 + x - 3 = 0$$

pe care ne-o propunem s-o studiem pentru $0 < x < 2$. Putem verifica că $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) < f(x_2)$. În mulţimea numerelor reale cuprinse între 0 şi 2, să distingem mulţimea X' a numerelor x' astfel încît $f(x') < 0$ şi mulţimea X'' a numerelor x'' care verifică $f(x'') \geqslant 0$; vom vedea (la p.107) că sîntem conduşi să afirmăm existenţa unui număr real r astfel încît

$$f(r) = 0.$$

Un asemenea număr, rădăcină a ecuației obținute egalînd cu zero un polinom cu coeficienți întregi, se numește *număr algebric*. Mulțimea numerelor algebrice conține așadar mulțimea radicalilor (rădăcinilor) de orice indice întreg natural.

Dar aceasta încă nu este totul. Studiul teoretic al cercului conduce la introducerea numărului π printre numerele reale (Cartea I, cap.5). Or, matematicianul LINDEMANN, completînd rezultatele obținute de LAMBERT (1761) și HERMITE (1872), a demonstrat în 1882 că π nu este un număr algebric. Asemenea numere se numesc *numere transcendente*.

Vedem deci că axioma [Γ] introduce în vrac numere foarte variate, necesare pentru ca mulțimea să fie *completă*. Cu toate acestea, în matematică sînt introduse și alte numere, de pildă pentru a atribui soluții ecuației $x^2 + 1 = 0$. Pentru a le crea, va trebui să abandonăm anumite axiome, cum ar fi axioma de ordine totală (Cartea a III-a, cap.6: Numere complexe).

III. Proprietăți ale mulțimii R a numerelor reale

Am construit mulțimea R a numerelor reale plecînd de la mulțimea numerelor raționale cu ajutorul axiomei creatoare [Γ] pe care o enunțăm acum riguros:

[Γ]: AXIOMA COMPLETITUDINII. *Orice submulțime A a lui R care este majorată are un cel mai mic majorant care se numește* **marginea superioară** *a lui A și se notează* Sup A.

În mod analog, considerînd ordinea inversă, definim **marginea inferioară**, Inf A, a oricărei submulțimi minorate A; ea este cel mai mare minorant.

Teoreme

a) Mulțimea numerelor reale este arhimedeană. Într-adevăr, șirul r, $2r$, $3r$, ... , nr, ... al multiplilor lui r nu poate fi majorat, căci atunci ar avea un cel mai mic majorant s, și $s - r$ ar fi depășit, așadar, și s ar fi depășit. (Raționăm prin recurență asupra întregului natural n.)

b) Teorema intervalelor cuprinse unul în altul.

DEFINIȚIE. Se numește *interval* (a, b), unde a și b aparțin lui R, mulțimea numerelor reale cuprinse între a și b. Cu mai multă precizie, deosebim, dacă este nevoie:

interval închis, $[a, b]$, mulțimea numerelor x astfel încît

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

interval deschis, $]a, b[$, mulțimea numerelor x astfel încît

$$a < x < b,$$

interval închis la stînga, deschis la dreapta, $[a, b[$, mulțimea numerelor x astfel încît $a \leqslant x < b$, și, în mod analog, interval deschis la stînga și închis la dreapta.

Notăm

$$[a, +\infty[\text{ și }]a, +\infty[\text{ sau, uneori } [a, \to [\text{ și }] a, \to [$$

mulțimile care verifică

$$a \leqslant x \quad \text{și} \quad a < x.$$

În mod analog, folosim notațiile

$$]-\infty, a] \text{ și }]-\infty, a[\text{ sau }]\leftarrow, a] \text{ și }]\leftarrow, a[$$

pentru

$$x \leqslant a \quad \text{și respectiv} \quad x < a.$$

Șir de intervale cuprinse unul în altul este, prin definiție, un șir de intervale (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... , (a_n, b_n), ... astfel încît

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1,$$

unele din aceste inegalități putînd deveni și egalități, cu condiția însă să mai existe inegalități, oricît de mare ar fi n.

Teoremă. *Fiind dat un șir de intervale închise, cuprinse unul în altul, a căror lungime tinde către zero, există un număr real și numai unul singur care este interior tuturor acestor intervale.*

Ipotezele sînt:

$$\begin{cases} [a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \\ \qquad \forall \varepsilon, \ \exists N : n > N \longrightarrow b_n - a_n < \varepsilon. \end{cases}$$

Șirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este nedescrescător și este majorat de fiecare din numerele b; prin urmare el are o margine superioară care aparține intersecției tuturor intervalelor. Dar intersecția nu poate conține decît un singur număr (căci diferența a două numere ar putea fi minorată prin numere ε).

Intersecția intervalelor se reduce deci la numărul ξ. Vom spune că șirul este „o capcană" care definește pe ξ.

EXEMPLE DE APLICAȚIE. Existența rădăcinilor pătrate, a rădăcinilor cubice etc.

IV. Mulțimea Q a numerelor raționale, ca submulțime a mulțimii R a numerelor reale

Fie r un număr real; oricare ar fi ε pozitiv, există numere raționale în intervalul $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Oricît de mic l-am alege pe ε pozitiv, așadar oricît de mic am alege intervalul centrat în r, acest interval conține numere raționale.

$$\forall r \in R, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in Q : r - \varepsilon < q < r + \varepsilon.$$

Această teoremă se demonstrează cu ajutorul mulțimilor Q' și Q'' de numere raționale care sînt valori aproximative prin lipsă și, respectiv, prin exces ale numărului r, așa cum am procedat la definirea lui $\sqrt{2}$.

Așadar, orice interval, (oricît de mic l-am alege), conține un număr rațional, și chiar o infinitate de numere raționale. Exprimăm acest fapt spunînd că *mulțimea Q a numerelor raționale este* **peste tot densă** *în raport cu mulțimea R a numerelor reale.*

Deși studiul precedent este cu totul sumar și incomplet, el va fi suficient pentru nevoile noastre. Cînd vom spune „un număr", în algebră, în analiză, în geometrie, va fi vorba totdeauna de un număr real oarecare, cu condiția să nu fie precizat altfel: număr absolut, număr întreg de un anumit semn, număr rațional sau nonrațional. Din contra, în *Aritmetică*, adică în *Teoria numerelor* vom studia succesiv, în capitole distincte, cîteva din proprietățile elementelor fiecăreia din mulțimile N, Z, Q, R; este ceea ce constituie obiectul Cărții a II-a.

CAPITOLUL 3

SPAȚII VECTORIALE

Considerînd corpul numerelor reale drept o mulțime de operatori, vom construi acum un capitol de algebră care admite, printre alte modele geometrice posibile, și geometria numită geometrie afină — cea care definește figuri cu ajutorul noțiunilor de paralelism și de raport între segmente paralele, și le studiază cu ajutorul translațiilor și al omotetiilor: pe scurt, geometria paralelogramului și a teoremei lui Tales.

Axiomele alese pentru a realiza aceste structuri generează o teorie abstractă, multivalentă. Din modelul geometric care ne este familiar vom reține vocabularul, în particular cuvintele „vector" și „paralelism", dar vom apela la el și ca sprijin al intuiției noastre

I. Vectori. Operații vectoriale

Vom considera mulțimea R a numerelor reale și o mulțime V de elemente $v, v', w, \ldots$ pe care le vom numi *vectori*. Pentru a evita confuziile, vom plasa deasupra literelor care reprezintă vectorii o săgeată și vom scrie $\vec{v}, \vec{v'}, \vec{w}, \ldots$, cel puțin la începutul studiului.

(În modelul geometric, acești vectori abstracți vor avea ca imagini așa-numiții *vectori liberi*, însă în cadrul altor modele, imaginile lor vor fi altele; de exemplu, V poate fi mulțimea polinoamelor, sau mulțimea funcțiilor liniare. Un exemplu esențial

este cel în care V este o mulțime $\mathcal{G}$ de mărimi fizice, lungimi, arii, mase etc., în care definim $G_1 + G_2$ și rG. În acest capitol ne vom limita însă la imaginea geometrică.)

a) Există O RELAȚIE DE ECHIVALENȚĂ, pe care o notăm $\equiv$ (mai tîrziu, cînd nu ne vom mai teme de confuzii, o vom nota cu $=$). $\vec{v} \equiv \vec{w}$ se citește „vectorul v (este) echivalent cu w" sau „(este) egal vectorial cu"; mai tîrziu vom spune „(este) egal cu w".
(În modelul geometric, această echivalență este *echipolența*.)

b) ADUNAREA VECTORIALĂ. V este înzestrată cu o operație internă numită *adunare*, definită prin axiomele $[A]$ care, în cazul de față, se scriu:

$$[A]\quad \begin{cases} [A_1] & [\vec{v} \equiv \vec{v}' \text{ și } \vec{w} \equiv \vec{w}'] \Longrightarrow [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v}' + \vec{w}'] \\ [A_2] & \begin{cases} [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v} + \vec{w}'] \Longrightarrow [\vec{w} \equiv \vec{w}'] \\ [\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{v}' + \vec{w}] \Longrightarrow [\vec{v} \equiv \vec{v}'] \end{cases} \\ [A_3] & \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \equiv \vec{r}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \\ [A_4] & \vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{w} + \vec{v} \end{cases}$$

oricare ar fi elementele $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{w}$, ... ale mulțimii V.

(În modelul geometric, cînd vectorii sînt reprezentați cu aceeași origine A, suma este reprezentată de diagonala paralelogramului construit pe AB și AC. Axioma $[A_1]$ afirmă că această diagonală rămîne echipolentă cu ea însăși dacă se schimbă poziția punctului A, ceea ce în teoria intuitivă a paralelogramelor reiese imediat. $[A_2]$ și $[A_3]$ sînt atunci evidente, așa cum este și $[A_4]$. Vedem deci că axiomele traduc realmente proprietățile pe care vroiam să le introducem în geometria noastră.)

CONSECINȚE. $[C]$; *comutativitate și asociativitate completă*, ca în capitolul 1. (Am putea urmări demonstrațiile pe o figură.)

AXIOME DE SIMETRIZARE

În plus, afirmăm (ca în cap.2, § 2, pentru mulțimea E):

[S_1] *Există un element neutru pentru adunare*, notat $\vec{0}$:

$$\forall \vec{v},\ \vec{v} + \vec{0} \equiv \vec{0} + \vec{v} \equiv \vec{v}$$

(În geometrie intuitivă, este elementul AB, cînd punctele A și B coincid.)

[S_2] *Oricărui element* $\vec{v}$ *diferit de* $\vec{0}$ *îi corespunde* $-\vec{v}$ *astfel încît*

$$\vec{v} + (-\vec{v}) \equiv \vec{0}.$$

Doi vectori semetrici în raport cu adunarea se numesc *opuși*. Această relație este simetrică:

$$-(-\vec{v}) \equiv \vec{v},\ \forall \vec{v} \in V.$$

CONSECINȚĂ. *Diferența vectorială*. Ecuația vectorială

$$\vec{v} + \vec{x} \equiv \vec{w}$$

admite soluția

$$\vec{x} \equiv \vec{w} + (-\vec{v}),$$

ceea ce se scrie

$$\vec{x} \equiv \vec{w} - \vec{v}.$$

Soluția este unică, pînă la o echivalență.

(În geometrie intuitivă, dacă AB este imaginea lui $\vec{v}$, BA este imaginea lui $-\vec{v}$.)

Așadar, prin această operație, mulțimea V este înzestrată cu o structură de grup abelian.

c) ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR CU UN NUMĂR REAL. *Aceasta este o operație externă care asociază fiecărei perechi formate dintr-un număr real* r *și un vector* $\vec{v}$, *un vector* $\vec{w}$.

Numărul real se scrie primul: $\vec{w} \equiv r\vec{v}$.

Presupunem că această operație verifică axiomele:

$$
[m]\;\begin{cases}
[m_1]\ \ [r = r' \text{ și } \vec{v} \equiv \vec{v'}] \Longrightarrow [r\vec{v} \equiv r'\vec{v'}] \\
[m_2]\ \begin{cases} [m_2']\ \text{Dacă } r \neq 0,\ [r\vec{v} \equiv r\vec{v'}] \Longrightarrow [\vec{v} \equiv \vec{v'}] \\ [m_2'']\ \text{Dacă } \vec{v} \not\equiv \vec{0},\ [r\vec{v} \equiv r'\vec{v}] \Longrightarrow [r = r'] \end{cases} \text{Simplificări} \\
[m_3]\ \ (rr')\vec{v} \equiv r(r'\vec{v}) \text{ Asociativitate} \\
[m_4]\ \begin{cases} [m_4']\ \ (r + r')\vec{v} \equiv r\vec{v} + r'\vec{v} \\ [m_4'']\ \ r(\vec{v} + \vec{v'}) \equiv r\vec{v} + r\vec{v'} \end{cases} \text{Distributivitate} \\
[m_5]\ \begin{cases} [m_5']\ \ \forall \vec{v} \in V : 1\vec{v} \equiv \vec{v} \\ [m_5'']\ \ \forall \vec{v} \in V : 0\vec{v} \equiv \vec{0} \\ [m_5''']\ \ \forall r \in R : r\vec{0} \equiv \vec{0} \end{cases} \text{Elementele neutre și înmulțirea}
\end{cases}
$$

Justificare în geometrie intuitivă: dacă AB reprezintă vectorul $\vec{v}$, atunci AC care se deduce din AB prin ometetia de raport r și de centru A reprezintă vectorul $\vec{w} = r\vec{v}$; proprietățile corespondente axiomelor se recunosc imediat. $[m_4]$ are ca imagine teorema lui Tales.

CONSECINȚE. Asociativitatea pentru un număr oarecare de elemente r, r', r'' etc. de numere reale se deduce din $[m_3]$. Distributivitatea pentru un număr oarecare de numere reale și pentru un număr oarecare de vectori se deduce din $[m_4]$.

REMARCĂ. Nu ntroducem o relație de ordine în V. Mai tîrziu (cap.5), vom introduce o altă relație de echivalență și atunci, între clasele de echivalență (lungimea vectorilor) se va introduce o relație de ordine, dar în capitolul de față nu va fi vorba de așa ceva.

NOTĂ DE TERMINOLOGIE. În cele de mai sus, noi am definit un spațiu vectorial pe corpul R al numerelor reale. Mai general, putem defini *un spațiu vectorial pe un corp K oarecare*; acesta din urmă se numește *corp de scalari* asociat spațiului vectorial, precum și *corp de operatori*. Dacă mulțimea de operatori nu are decît structură de *inel*, axiomele $[m]$ definesc un *modul*.

II. Spaţii vectoriale

Ştim că într-un plan, un vector este definit prin proiecţiile sale pe două axe; în spaţiu, trebuie date proiecţiile lui pe trei axe necoplanare. Vom prezenta acum toate acestea într-o formă axiomatică, pentru a defini un spaţiu vectorial abstract cu un număr oarecare de dimensiuni.

a) **Axiomele spaţiului vectorial cu n dimensiuni.** Există un sistem de n vectori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ astfel încît nici o mulţime de n numere reale $r_1, r_2, \ldots, r_n$, nu toate nule, nu poate asigura satisfacerea egalităţii vectoriale

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \equiv \vec{0}.$$

Acest sistem de vectori constituie *o bază* a spaţiului vectorial: avem aşadar

$[\beta_1]$ AXIOMA BAZEI

$$\exists(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) : \forall(r_1, r_2, \ldots, r_n),\ r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \equiv \vec{0}.$$

$[\beta_2]$ AXIOMA COMPONENTELOR

Fiind dată o bază, oricărui vector $\vec{v}$ i se asociază cel puţin o mulţime de n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care asigură satisfacerea egalităţii vectoriale

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv \vec{v}.$$

Aşadar

$$\forall\vec{v} \in V,\quad \exists(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv \vec{v}.$$

TEOREMĂ DE UNICITATE

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \equiv x_1'\vec{v}_1 + x_2'\vec{v}_2 + \ldots + x_n'\vec{v}_n$$

este echivalent cu

$$(x_1' - x_1)\vec{v}_1 + (x_2' - x_2)\vec{v}_2 + \ldots + (x_n' - x_n)\vec{v}_n \equiv \vec{0},$$

prin urmare, conform axiomei $[\beta_1]$

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ \ldots,\ x_n' = x_n.$$

DEFINIȚII. Fiecare din vectorii $\vec{x_i v_i}$ (unde i este un întreg $\leqslant n$) se numește *o componentă* a lui $\vec{v}$, componenta lui $\vec{v}$ pe $\vec{v_1}$, iar x_i este *măsura acestei componente*.

Prin urmare, odată aleasă o bază a spațiului vectorial, fiecare vector are un sistem de componente determinate în raport cu această bază.

Avertizare

Din motive tipografice, în lucrările tipărite vectorii sînt reprezentați cel mai adesea prin litere cu caractere grase, și nu prin litere cu o săgeată plasată deasupra, aceasta din urmă neavînd alt rol decît de a ne aminti originea geometrică sau cinematică a noțiunii abstracte. Ne vom folosi și noi de această uzanță. În cele ce urmează, vom întîlni, așadar, $\mathbf{v}$ în loc de $\vec{v}$ și $\mathbf{AB}$ în loc de $\vec{AB}$.

Într-un text manuscris, se va reveni însă la notația primitivă, pentru a evita orice confuzie.

b) **Problema schimbării bazei.** Așa cum vom vedea imediat, această problemă conduce la rezolvarea și discutarea unor sisteme de ecuații de gradul întîi. Presupunem că s-au studiat deja, în algebră, cazurile cele mai simple de asemenea sisteme, ca aplicații ale proprietăților numerelor reale (v. Cartea a II-a). De aceea, pentru a putea folosi aceste sisteme simple, presupuse că au fost studiate direct, ne vom limita la spații cu una sau două dimensiuni. Trebuie însă spus că, în cazul general, se procedează invers; studiul direct al spațiilor vectoriale cu n dimensiuni este cel care permite studiul sistemelor generale de ecuații liniare. Acest studiu constituie *algebra liniară*, pe care însă noi nu o vom dezvolta; ea introduce matrice și determinanți.

Fiind dată o bază a unui spațiu vectorial, problema constă în a determina condiția pentru ca un alt sistem de n vectori să formeze o bază, și în a determina componentele unui vector oarecare în raport cu această nouă bază, pornind de la componentele relative la baza veche.

1) SPAȚIU CU O DIMENSIUNE $n = 1$.

Baza este constituită dintr-un singur vector $\mathbf{v}_1$. În raport cu această bază, orice vector $\mathbf{v}$ este determinat prin $\mathbf{v} \equiv x_1\mathbf{v}_1$. Orice

alt vector, cu excepția vectorului nul $\mathbf{o}$, constituie și el o bază; într-adevăr, dacă

$$\mathbf{w}_1 \equiv a_1\mathbf{v}_1,$$

de aici deducem

$$\mathbf{v} \equiv x_1'\mathbf{w}_1 \equiv ax_1'\mathbf{v}_1.$$

Prin urmare, după teorema de unicitate

$$x_1 = a_1x_1';$$

așadar

$$x_1' = \frac{x_1}{a_1}.$$

valoare care este acceptabilă, deoarece a_1 nu este nul.

2) SPAȚIU CU DOUĂ DIMENSIUNI $n = 2$. O bază este constituită de o pereche de vectori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

α) *Condiția pentru ca o pereche* $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *să constituie o bază.*

Scriem (pentru a evita introducerea unor indici dubli)

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 \equiv a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \equiv a'\mathbf{v}_1 + b'\mathbf{v}_2, \end{cases}$$

ceea ce este posibil, fiindcă $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ constituie o bază.

Trebuie să exprimăm că nu există soluții nenule pentru ecuația vectorială

$$r_1\mathbf{w}_1 + r_2\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$$

care, folosind axiomele, se scrie:

$$(ar_1 + a'r_2)\mathbf{v}_1 + (br_1 + b'r_2)\mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{0}.$$

După axioma $[\beta_1]$, această relație este echivalentă cu sistemul de ecuații între numere

$$\begin{cases} ar_1 + a'r_2 = 0 \\ br_1 + b'r_2 = 0. \end{cases}$$

Știm (v. Cartea a II-a, Algebra) că condiția care exprimă că singura soluție este $r_1 = r_2 = 0$, este

$$\delta = ab' - a'b \neq 0.$$

Aceasta este deci condiția ca $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, să formeze o bază.
Dacă, din contra,

$$\delta = ab' - a'b = 0,$$

sistemul dă o infinitate de soluții nenule de forma

$$\begin{cases} r_1 = ka' \\ r_2 = -ka \end{cases} \quad \text{așadar } a'\mathbf{w}_1 \equiv a\mathbf{w}_2.$$

În acest caz, $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2$ fac parte dintr-o aceeași submulțime cu *o* dimensiune.

Spunem că ei sînt *coliniari sau paraleli.* Aceasta este condiția care, în spațiul nostru cu două dimensiuni, exprimă că acești doi vectori nu formează o bază.

β) *Calculul componentelor unui vector în noua bază.*

Fie că noua bază $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ este dată în raport cu baza veche prin

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 \equiv a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \equiv a'\mathbf{v}_1 + b'\mathbf{v}_2 \end{cases} \qquad ab' - a'b \neq 0.$$

Scriem

$$\mathbf{v} \equiv x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \equiv X\mathbf{w}_1 + Y\mathbf{w}_2.$$

Eliminarea lui $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2$ dă

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \equiv (aX + a'Y)\mathbf{v}_1 + (bX + b'Y)\mathbf{v}_2.$$

Teorema de unicitate cere atunci

$$\begin{cases} x = aX + a'Y \\ y = bX + b'Y, \end{cases}$$

precum și, datorită faptului că $ab' - a'b \neq 0$,

$$\begin{cases} X = \dfrac{b'x - a'y}{ab' - ba'} \\ Y = \dfrac{-bx + ay}{ab' - ba'} \end{cases}$$

3) ÎN SPAȚIUL CU TREI DIMENSIUNI, calculul este analog dar mai lung, și nu-l vom face. Vom admite rezultatul: condiția ca trei vectori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ să formeze o bază este ca un anumit polinom

Δ în raport cu cele 9 măsuri ale componentelor acestor vectori să nu fie nul. În cazul particular $\Delta = 0$, ei nu formează o bază și spunem că acești vectori sînt *coplanari*.

Cu ajutorul teoriei determinanților, putem generaliza aceste rezultate la un număr oarecare de dimensiuni ale spațiului. Posibilitatea de a găsi formulele pentru schimbarea bazei arată că *proprietatea a doi vectori de a fi echivalenți este independentă de alegerea bazei*. Exprimăm aceasta spunînd că ea este o *proprietate intrinsecă*. Numărul de vectori ai unei baze este determinat pentru fiecare spațiu vectorial: el dă *dimensiunea* acelui spațiu.

c) Orientarea spațiului vectorial

1) SPAȚIU CU O DIMENSIUNE. *Spunem despre un vector* $\mathbf{v} \equiv k\mathbf{v}_1$ *că este* **de același sens** *cu* $\mathbf{v}_1$ *dacă numărul* k *este pozitiv*.

Această relație este tranzitivă, căci, după formula pentru schimbarea bazei, dacă $\mathbf{v}$ este de același sens cu $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_1$ este de același sens cu $\mathbf{w}_1$, regula de înmulțire a numerelor reale arată că $\mathbf{v}$ este de același sens cu $\mathbf{w}_1$.

Cînd dăm un vector de bază, spunem că *orientăm dreapta*, iar despre orice vector care are același sens cu vectorul de bază spunem că este *pozitiv*.

2) SPAȚIU CU DOUĂ DIMENSIUNI. Fiind aleasă o bază $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, am văzut că perechea

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 \equiv a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \equiv a'\mathbf{v}_1 + b'\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

formează o bază cu condiția că $\delta = ab' - ba' \neq 0$.

Dacă presupunem că numerele a, b, a', b' variază continuu, perechea $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ va continua să formeze o bază atît timp cît numărul $\delta = ab' - ba'$ va păstra același semn. Vom spune că acest semn caracterizează *orientarea* bazei.

Baza inițială

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 \equiv 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \equiv 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

corespunde valorii $ab' - ba' = +1$.

Vom spune că toate perechile de vectori care sînt astfel încît diferența $ab' - ba'$ este pozitivă au *aceeași orientare* ca $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Să verificăm *tranzitivitatea acestei relații*: să presupunem că pere-

chea $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ are aceeași orientare ca perechea $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ care, la rîndul ei, are aceeași orientare ca $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$; cu alte cuvinte, că

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 \equiv a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \equiv a'\mathbf{v}_1 + b'\mathbf{w}_2 \\ ab' - ba' > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{u}_1 \equiv A\mathbf{w}_1 + B\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_2 \equiv A'\mathbf{w}_1 + B'\mathbf{w}_2 \\ AB' - BA' > 0. \end{cases}$$

Am văzut că formulele pentru schimbarea bazei dau

$$\mathbf{u}_1 \equiv \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \equiv (aA + a'B)\mathbf{v}_1 + (bA + b'B)\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u}_2 \equiv \alpha'\mathbf{v}_1 + \beta'\mathbf{v}_2 \equiv (aA' + a'B')\mathbf{v}_1 + (bA' + b'B')\mathbf{v}_2.$$

Or, diferența $\alpha\beta' - \beta\alpha' = (ab' - ba')(AB' - BA')$ este și ea pozitivă.

Așadar, *în orice spațiu cu două dimensiuni definit printr-o bază există două orientări contrare*. Orice bază care are aceeași orientare cu baza aleasă pentru a determina spațiul este considerată *pozitivă*.

Natural, *intervertirea celor doi vectori ai unei baze schimbă orientarea bazei*. La fel se întîmplă și la înlocuirea *unuia din vectori* cu opusul lui.

3) SPAȚIUL CU TREI DIMENSIUNI. Calculul arată că condiția pentru ca trei vectori dați în raport cu o bază să formeze și ei o bază este ca un anumit polinom Δ de cele 9 măsuri ale componentelor să nu fie nul. Acest polinom care, pentru spațiul cu trei dimensiuni, joacă același rol ca diferența $\delta = ab' - ba'$ pentru spațiul cu două dimensiuni, păstrează același semn cînd vectorii variază fără a înceta de a constitui o bază. Semnul lui caracterizează orientarea bazei. Calculul, analog celui pe care l-am făcut dar mai lung, arată că relația care se exprimă prin propoziția „au aceeași orientare" este tranzitivă.

Vom admite acest rezultat și vom conchide:

Cînd se dă o bază, automat se orientează spațiul vectorial cu trei dimensiuni. Orice bază cu aceeași orientare ca baza aleasă se consideră pozitivă. Permutarea a *doi* dintre cei 3 vectori ai bazei schimbă orientarea acesteia. La fel se întîmplă la schimbarea *unuia* din vectori în opusul lui.

III. Spațiu punctual imagine a unui spațiu vectorial

a) Vom defini acum o mulțime $\mathcal{E}$, asociată spațiului vectorial construit V, ale cărei elemente vor fi numite *puncte*.

Să presupunem că spaţiul vectorial are n dimensiuni. Considerăm un element numit *punct origine* (şi notat, în general, cu litera O), şi n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, asociate vectorilor din bază. Scriem

$$\mathbf{OA}_1 \equiv \mathbf{v}_1,\ \mathbf{OA}_2 \equiv \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_n \equiv \mathbf{v}_n.$$

Fiecare punct M, element al mulţimii $\mathcal{E}$, este asociat cu un vector $\mathbf{v}$ al spaţiului vectorial V şi scriem $\mathbf{OM} = \mathbf{v}$.

În fine, fiecărei perechi de puncte M, P îi asociem un vector din V prin următoarea convenţie:

Dacă $\mathbf{OM} \equiv \mathbf{v}$ *şi* $\mathbf{OP} \equiv \mathbf{v}'$, *scriem* $\mathbf{MP} \equiv \mathbf{v}' - \mathbf{v}$.

Cu alte cuvinte $\mathbf{MP} \equiv \mathbf{OP} - \mathbf{OM}$ (*formula lui Chasles*).

În spaţiul punctual $\mathcal{E}$, simbolul $\mathbf{MP}$ este numit tot vector, confundîndu-l cu imaginea lui din V. (Întîlnim aici acelaşi abuz de limbaj ca la confundarea de pildă, a numărului natural cu numărul pozitiv.) El este *vectorul de poziţie al lui P în raport cu M*.

Din proprietăţile spaţiului vectorial V rezultă că echivalenţa (sau echipolenţa) a doi vectori din $\mathcal{E}$ este o relaţie intrinsecă, adică independentă de bază, precum şi de originea O, aşa cum o arată calculul:

$$\mathbf{MP} \equiv \mathbf{OP} - \mathbf{OM} \equiv (\mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}) - (\mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}) \equiv \mathbf{O'P} - \mathbf{O'M}$$

b) SUMA VECTORIALĂ; PARALELOGRAMUL

O mulţime de 4 puncte A, B, C, D astfel încît

$$\mathbf{AB} \equiv \mathbf{DC} \tag{1}$$

se numeşte *paralelogramul ABCD*, sau, pe baza simetriei relaţiei de echivalenţă, paralelogramul $DCBA$. Însă

$$[\mathbf{AB} \equiv \mathbf{DC}] \Longleftrightarrow [\mathbf{AB} + \mathbf{BD} \equiv \mathbf{BD} + \mathbf{DC}] \Longleftrightarrow [\mathbf{AD} \equiv \mathbf{BC}] \tag{2}$$

pe baza formulei lui Chasles. Prin urmare, paralelogramul se poate numi şi $ADCB$, sau $BCDA$. Posibilitatea de a înlocui pe (1) cu (2), sau invers, constituie proprietatea fundamentală a paralelogramului. O vom numi *intervertirea punctelor mediane în echivalenţă*.

NOTĂ DESPRE INTERVERTIREA TERMENILOR MEDIANI. Să scriem în paralel cîteva formule similare, şi totuşi distincte, care vor fi întîlnite pe parcursul Cărţii I.

Mulțimea numerelor

$$a - b = c - d \Longleftrightarrow a - c = b - d.$$

Mulțimea fracțiilor sau a rapoartelor

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Mulțimea vectorilor

$$\mathbf{AB} \equiv \mathbf{CD} \Longleftrightarrow \mathbf{AC} \equiv \mathbf{BD}.$$

Mulțimea unghiurilor (cap. V, § 3)

$$(a, b) = (c, d) \pmod{2\pi} \Longleftrightarrow (a, c) = (b, d) \pmod{2\pi}$$

și o formulă asemănătoare pentru (mod π).

c) ÎNMULȚIREA CU UN NUMĂR. DREPTE. TEOREMA LUI TALES

1) COLINIARITATE. Spunem că trei puncte A, B, M sînt *coliniare* dacă există un număr k astfel încît $\mathbf{AM} \equiv k\mathbf{AB}$. Dacă numărul k parcurge mulțimea R a numerelor reale, mulțimea punctelor M definește o *dreaptă*. Aceasta înseamnă că, A și B fiind date, există o corespondență biunivocă între R și punctele dreptei (*dreapta reală*). A corespunde lui $k = 0$, iar B lui $k = 1$.

Fie M_0 și M_1 două puncte ale dreptei $\mathcal{D}$ definite de (A, B).

Din

$$\mathbf{AM}_0 \equiv k_0\mathbf{AB}, \quad \mathbf{AM}_1 \equiv k_1\mathbf{AB}$$

deducem

$$\forall M \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{M}_0\mathbf{M} \equiv h\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$$

cu

$$h = \frac{k - k_0}{k_1 - k_0}.$$

Prin urmare, *oricare două puncte ale unei drepte determină dreapta.*

Conform denumirii deja introduse, orice vector $\mathbf{v} \equiv \lambda\mathbf{AB}$ este paralel, sau coliniar, cu $\mathbf{AB}$ și cu $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$, oricare ar fi perechea de puncte M_0, M_1 ale dreptei; spunem că el este un *vector director al dreptei*. Dreptele care au aceiași vectori directori se numesc drepte *paralele*; ele pot fi drepte confundate, sau drepte fără puncte comune.

În particular, cele n drepte care trec prin originea O și au ca vectori directori cîte unul din cei n vectori de bază și se numesc *axe de coordonate*.

2) Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea vectorială dă

$$k\mathbf{AB} \equiv k\mathbf{AC} + k\mathbf{CB}.$$

Vom numi această relație *formula lui Tales*.

3) GEOMETRIA ANALITICĂ. Fiind dați cei n vectori ai bazei și originea O, axioma $[\beta_2]$ asociază fiecărui punct M al spațiului $\mathcal{E}$ o mulțime de n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prin relația

$$\mathbf{OM} \equiv x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Aceste numere constituie cele n *coordonate ale punctului*. Există o corespondență biunivocă între un punct al spațiului și o asemenea mulțime de n numere reale, așa că studiul spațiului se poate traduce în studiul mulțimii mulțimilor de n numere. Această traducere constituie *geometria analitică*. Vom da, în continuare, primele teoreme ale acestui studiu, pentru spațiile cu 2 sau cu 3 dimensiuni.

CONCLUZIE. Studiul spațiilor $\mathcal{E}$ este o *geometrie*. Cînd nu se introduc alte structuri decît cele definite mai sus, singurele teoreme fundamentale sînt formula lui Chasles și formula lui Tales. Geometria corespunzătoare se numește *geometrie afină*; ea va fi dezvoltată în partea întîi a Cărții a IV-a.

REMARCĂ. În cele ce urmează, echivalența vectorilor va fi notată cu semnul $=$. Sperăm că noțiunile precedente au fost suficient de bine înțelese și asimilate pentru a se evita orice confuzie. În caz de dubiu, se poate oricînd reveni la simbolul $\equiv$, rezervînd semnul $=$ pentru numerele reale.

CAPITOLUL 4

APLICAȚIILE UNEI MULȚIMI ÎNTR-O MULȚIME. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. FUNCȚII NUMERICE

Partea întîi
PUNCT DE VEDERE ALGEBRIC

§ 1. NOȚIUNEA GENERALĂ DE APLICAȚIE

I. Definiție

Fie două mulțimi E și F, distincte sau nu. Numim *aplicație* a lui E *în* F o lege care asociază fiecărui element al lui E un element al lui F și numai unul singur. Dacă notăm cu L această lege și cu x un element oarecare al lui E, elementul y asociat se numește *imaginea* lui x. Asocierea se notează

$$x \overset{L}{\longmapsto} y \quad \text{sau} \quad x \overset{L}{\longmapsto} y = L(x)$$

sau încă, urmînd tradiția, dar cu riscul de a face confuzie între funcție și imagine:

$$y = L(x) \quad (\textit{notația funcției de o variabilă})$$

Mulțimea imaginilor $L(x)$ ale elementelor x ale unei submulțimi $X \subset E$ se notează $L(X)$.

Imaginea $L(E)$ este inclusă în F. Dacă $L(E) = F$, spunem că L este o aplicație a lui E *pe* F; ea este o aplicație *surjectivă*, sau o *surjecție*.

Un caz foarte important este cel în care fiecare element al lui $L(E)$ este imaginea numai a unui singur element al lui E. Aplicația se numește atunci *injectivă*; ea este o *injecție a lui* E în F. Despre $y = L(x)$ se mai spune că este *consecventul* lui x care, la rîndul lui, este *antecedentul* lui y.

În fine, dacă injecția este surjectivă, spunem că ea este *bijectivă*. Ea definește o *corespondență biunivocă* între E și F. Invers, o corespondență biunivocă definește o aplicație bijectivă L a lui E pe F, și o aplicație bijectivă a lui F pe E, aplicație care se numește *reciproca* celei precedente și se notează L^{-1} sau $\overset{-1}{L}$, o notație pe care o vom justifica ceva mai tîrziu.

$$x \in E \underset{L}{\overset{L^{-1}}{\leftrightarrows}} y \in F$$

O injecție L a lui E în F este o bijecție a lui E pe $L(E)$.

Acești termeni „tehnici" care precizează cuvîntul „funcție" sînt foarte utili pentru a prescurta redactarea anumitor expuneri teoretice cu caracter general (v., de exemplu, Cartea a II-a, cap.3 al părții întîi.)

CÎTEVA EXEMPLE:

EXEMPLUL 1. E și F sînt mulțimea numerelor reale; $x \xrightarrow{L} x + 3$. În acest caz, $L(E) = F$.

EXEMPLUL 2. E și F sînt mulțimea numerelor reale; $x \xrightarrow{f} x^2$.

De data aceasta, $f(E)$ este mulțimea numerelor pozitive sau nule. Fiecare y, diferit de 0, este imaginea a două elemente x.

EXEMPLUL 3.

$$x = y^2 \xrightarrow{\varphi} y$$

nu este o aplicație decît dacă se precizează semnul lui y. Mulțimea de plecare E nu poate fi decît mulțimea numerelor pozitive sau nule, sau una din submulțimile acesteia.

EXEMPLUL 4. E este mulțimea perechilor de numere reale (x,y). F este mulțimea numerelor reale u. Aplicația este definită prin

$$(x, y) \xrightarrow{s} u = x + y.$$

Putem scrie, așa cum am mai spus, și $u = s(x, y)$, care este notația *funcției de două variabile*.

Așadar

$$s(x, y) = x + y.$$

EXEMPLUL 5. E și F sînt confundate — sînt mulțimea punctelor din plan. $x \overset{\mathbf{v}}{\searrow\!\nearrow} y$ este definită prin condiția că vectorul $\mathbf{xy}$ este echipolent cu un vector dat $\mathbf{v}$. Aplicația se numește o *translație* de vector $\mathbf{v}$. Ea este o *corespondență punctuală* între punctele planului.

EXEMPLUL 6. E este mulțimea punctelor unei circumferințe, F este mulțimea dreptelor din plan. Fiecărui punct x al lui E i se asociază tangenta în x la circumferință. Mulțimea $L(E)$ este mulțimea tangentelor la circumferință, care se mai numește și „circumferința tangențială", imagine a „circumferinței punctuale" E.

PRODUSUL A DOUĂ APLICAȚII

Fie mulțimile E, E_1, E_2. O aplicație L_1 asociază lui $x \in E$ o imagine $x_1 \in E_1$, iar o aplicație L_2 asociază lui x_1 o imagine $x_2 \in E_2$. Aplicația L care, oricare ar fi x din E, asociază lui x imaginea x_2 se numește *produsul* aplicațiilor L_1 și L_2. Folosim schema

$$\forall x,\quad x \in E \overset{L}{\searrow\!\nearrow} x_1 \in E_1 \overset{L_1}{\searrow\!\nearrow} x_2 \in E_2 \overset{L_2}{\searrow\!\nearrow}$$

Deoarece $x_1 = L_1(x)$ și $x_2 = L_2(x_1)$, scriem $x_2 = L(x) = L_2[L_1(x)]$ (*Notația funcției de funcție*). Dar aplicația L, considerată ca rezultat al unei operații numite *produs* în mulțimea aplicațiilor, va fi notată și $L = L_1 \times L_2$. Uneori, ca o reminiscență a notației funcției de funcție, se scrie și $L = L_2 \circ L_1$, expresie care trebuie citită *de la dreapta la stînga* (mai întîi L_1); noi însă *nu* vom folosi această din urmă notație.

PROPRIETĂȚILE PRODUSULUI A DOUĂ APLICAȚII. Să remarcăm înainte de toate că noi folosim un simbol $=$ care înseamnă că fiecare element al lui E dă aceeași imagine în urma celor două aplicații. Trebuie însă reținut că această relație de echivalență este relativă la mulțimea de plecare E: de pildă, vom vedea în geometria plană că dacă E este mulțimea punctelor unei drepte D, atunci o simetrie S în raport cu o dreaptă Δ și o anumită rotație R dau aceleași imagini; putem deci scrie $S = R$, dar relația nu mai este valabilă dacă extindem mulțimea de plecare la întregul plan.

Să examinăm acum axiomele $[A]$ pentru operația produs. Justificarea afirmațiilor care urmează rezultă din examinarea schemelor.

$[A_1]$ $L = L'$ și $M = M' \Longrightarrow L \times M = L' \times M'$

$$\forall x,\ x \overset{L}{\underset{L'}{\swarrow\!\searrow}} x_1 \overset{M}{\underset{M'}{\swarrow\!\searrow}} x_2$$

$[A_3]$ Asociativitate

$$\forall x,\ x \overset{L_1}{\searrow} x_1 \overset{L_2}{\searrow} x_2 \overset{L_3}{\searrow} x_3 \qquad x \overset{L_2L_3}{\searrow} x_3$$

$[A'']$ Simplificare la stînga $L \times M = L \times M' \Longrightarrow M = M'$

$$\forall x,\ x \overset{L}{\searrow} x_1 \overset{M}{\underset{M'}{\swarrow\!\searrow}} x_2$$

Simplificarea la dreapta s-ar putea însă să fie interzisă:
$[A_1^*]$ $L \times M = L' \times M$ este compatibilă cu $L \neq L'$.

$$\forall x,\ x \overset{L}{\underset{L'}{\swarrow\!\searrow}} x_1 \overset{M}{\searrow} x_2 \qquad x_1 \overset{M}{\searrow}$$

Această simplificare este permisă numai dacă x_2 nu are decît un singur antecedent prin M, adică dacă corespondența $E_1 \overset{M}{\searrow} M(E)$ este biunivocă.

EXEMPLU. În mulțimea numerelor reale nenule considerăm

$$x \overset{L}{\searrow} \frac{1}{x}; \quad u \overset{L'}{\searrow} -\frac{1}{u}; \quad v \overset{M}{\searrow} v^2.$$

Avem atunci $L \times M = L' \times M$, fără însă să avem $L = L'$.

În fine, $[A_2]$ (Comutativitatea) este în general falsă, așa cum o arată exemplele de mai sus.

Așadar, cuvîntul „produs" indică aici o operație care nu are toate proprietățile $[A]$.

II. Grupul aplicațiilor unei mulțimi pe ea însăși

(Amintim că spuneam despre o mulțime înzestrată cu o operație asociativă că formează un grup în raport cu această operație dacă: 1) produsul a două elemente ale mulțimii aparține mulțimii; 2) există un element neutru pentru acea operație; 3) fiecare element are un simetric, element care este astfel încît produsul acestor elemente este elementul neutru.)

Într-o aplicație a unei mulțimi E pe ea însăși se poate întîmpla ca un element să coincidă cu imaginea lui. Spunem că un asemenea element este *invariant* în aplicație.

Aplicația care este astfel încît fiecare element este invariant se numește *aplicație identică*. Ea este, evident, elementul neutru al produsului de aplicații. O reprezentăm prin simbolul $\mathcal{J}$.

Prin definiție, produsul a două aplicații este o aplicație și există asociativitate. În fine, am spus că o aplicație are o aplicație inversă dacă ea stabilește o corespondență biunivocă a lui E pe ea însăși.

$$\left[\forall x, \quad x \in E, \quad x \overset{L}{\underset{L'}{\rightleftharpoons}} y\right] \Longleftrightarrow [L \times L^{-1} = \mathcal{J}].$$

Prin urmare, *mulțimea aplicațiilor biunivoce ale lui E pe ea însăși formează un grup*.

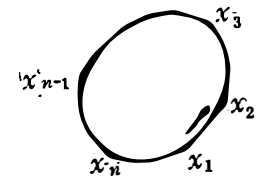
Se poate întîmpla ca și o submulțime a unor asemenea aplicații să formeze un grup: de exemplu, în mulțimea deplasărilor în spațiul E, mulțimea translațiilor, sau mulțimea omotetiilor și translațiilor.

APLICAȚIA PE EA ÎNSĂȘI A UNEI MULȚIMI CU UN NUMĂR FINIT DE ELEMENTE

Numerotînd elementele mulțimii, formăm din ele un *șir*:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Aplicația nu face decît să schimbe indicii; o numim o *permutare*. Mulțimea lor formează, evident, un grup.



Printre aceste permutări, distingem *permutarea circulară* care schimbă fiecare indice i în $i + 1$, iar ultimul indice n îl schimbă în primul indice, 1. Să considerăm puterile succesive ale unei permutări circulare: puterea a n — a este, evident, transformarea identică, și mulțimea acestor puteri formează un grup. Acestui grup îi este asociată o ordine a elementelor, presupuse plasate pe o linie închisă analoagă unei circumferințe. Pentru a defini permutarea circulară P de la care se pleacă, trebuie să se definească un sens de parcurgere a acestei

linii, dar deoarece $P^{n-1} = P^{-1}$, sensul nu intervine în grupul puterilor. Acest grup caracterizează un *ciclu* de n elemente. De exemplu, dacă există 4 elemente, există trei cicluri. Dacă aceste elemente sînt 4 puncte ale unui plan, mulțimea se numește cvadripunct sau, mai uzual dar impropriu, *cvadriunghi*; fiecare dintre cele trei cicluri determină cîte un *patrulater* (făcînd un desen, se vede imediat că ele sînt: unul convex și două stelate, sau sînt toate trei concave).

ALT EXEMPLU DE SUBGRUP AL GRUPULUI PERMUTĂRILOR. Fie mulțimea E a 4 numere reale a, b, c, d. Să considerăm toate permutările care păstrează valoarea lui $ab + cd$. Găsim 8 asemenea permutări, inclusiv operația identică: imaginea lui $\{a, b, c, d\}$ poate fi:

$\{a, b, c, d\}$, sau $\{a, b, d, c\}$, sau $\{b, a, c, d\}$, sau $\{b, a, d, c\}$ sau $\{c, d, a, b\}$, sau $\{d, c, a, b\}$, sau $\{c, d, b, a\}$, sau $\{d, c, b, a\}$.

(În primul rînd, se permută fie primele două elemente, fie ultimele două; apoi din ele se deduce rîndul al doilea, permutînd între ele prima pereche și perechea a doua.) Aceste 8 operații de schimbare de ordine formează, evident, un grup.

Asemenea grupuri sînt esențiale în teoria ecuațiilor (grupurile lui Galois).

§ 2. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE (GENERALITĂȚI)

I. Vocabular

O *transformare punctuală* este o aplicație pe el însuși a spațiului punctual, fie în geometria afină cu două sau 3 (sau n) dimensiuni, fie în geometria metrică pe care o vom introduce mai tîrziu.

Deseori transformarea se aplică unei submulțimi F a lui E pe care o numim *figură*. Imaginea lui F este o figură F'. Dacă notăm aplicația cu $\mathfrak{T}$:

$$F \searrow \underline{\mathfrak{T}} \nearrow F' \text{ sau, în altă notație, } F' = \mathfrak{T}(F).$$

Să ne limităm la cazul în care transformarea stabilește o corespondență biunivocă între figurile F și F', și aceasta oricare ar fi F; este cazul în care $\mathfrak{T}$ are o inversă, transformarea $\mathfrak{T}^{-1}$. Este

atunci totdeauna interesant să considerăm mulțimea puterilor pozitive și negative ale lui $\mathfrak{T}$ și să studiem șirul consecvenților și șirul antecedenților unui punct oarecare A

$$\ldots A^{-2} \overset{\mathfrak{T}}{\nearrow} A^{-1} \overset{\mathfrak{T}}{\nearrow} A \overset{\mathfrak{T}}{\nearrow} A' \overset{\mathfrak{T}}{\nearrow} A'' \ldots$$

Acest șir poate fi infinit sau nu: în acest din urmă caz, el se repetă periodic, și transformarea identică este o putere a lui $\mathfrak{T}$. (Exemplu: rotația de centru o și de unghi drept.)

Dacă transformarea este propria sa inversă, înseamnă că pătratul ei este transformarea identică; șirul punctelor se reduce la o pereche de puncte. Transformarea se numește atunci *reciprocă*, sau *simetrică*, sau *involutivă* (fiindcă simetria — în raport cu un punct, sau cu o dreaptă, sau cu un plan — ca și relația numită involuție sînt exemplele cele mai simple de asemenea transformări).

Știm că un *punct invariant* la $\mathfrak{T}$ este propria sa imagine (de exemplu, centrul unei rotații); pentru un asemenea punct, șirul antecedenților și al consecvenților se reduce la acel punct. O mulțime de puncte invariante formează o *figură invariantă punct cu punct* (de exemplu, planul P într-o simetrie în raport cu acest plan). Trebuie însă făcut deosebire între această noțiune și cea de *figură invariantă global*, sau *invariantă în ansamblu*: aceasta este o figură care suferă o aplicație *pe* ea însăși, fiecare punct al lui F avîndu-și imaginea în F, fără însă ca punctele să fie invariante (de exemplu, un plan F perpendicular pe planul P, într-o simetrie ortogonală în raport cu P). Această aplicație a lui F pe ea însăși se numește *restricția la F a transformării*. Firește, această restricție este susceptibilă de a fi definită pe figura F, luată singură. (În exemplul dat, este o simetrie în raport cu o dreaptă.)

Vom spune că un element — o lungime, un unghi, un volum, etc. — este invariant la transformare dacă el își conservă valoarea (exemplu: conservarea unghiurilor, la rotație). Tot astfel, și o relație poate fi invariantă (de exemplu, relația de paralelism se păstrează la rotații).

Mulțimea tuturor transformărilor biunivoce care păstrează o relație de echivalență dată formează un grup, datorită tranzitivității relației de echivalență.

În fine, cînd studiem o mulțime de transformări, trebuie totdeauna să ne întrebăm dacă produsul este sau nu comutativ.

II. Clasificarea transformărilor punctuale

În geometrie afină, operaţiile introduse asupra vectorilor permit să se definească transformări punctuale numite transformări afine. Geometria metrică ne va permite să introducem transformări metrice (de exemplu, rotaţia). La fel — geometriile proiective, analagmatice, despre care vom spune, de asemenea, cîteva cuvinte. Mulţimea tuturor transformărilor punctuale ale unei geometrii formează un grup care caracterizează acea geometrie: acest grup poate servi drept definiţie a acelei geometrii.

Vom studia, ca exerciţiu, transformări punctuale care nu sînt biunivoce, precum şi aplicaţii între mulţimi nepunctuale, în care, de exemplu, imaginea unui punct este o dreaptă, sau un plan.

III. Transmutata unei transformări punctuale printr-o alta

Fie o transformare punctuală $\mathfrak{T}$ prin care o figură F are ca imagine o figură F' din acelaşi spaţiu $\mathfrak{S}$. Să transformăm întregul spaţiu $\mathfrak{S}$, sau cel puţin mulţimea reuniune a lui F şi F', printr-o aplicaţie $\mathfrak{S}$, imaginea lui F fiind Φ, şi imaginea lui F' fiind Φ'. Aceasta stabileşte o corespondenţă punctuală între Φ şi Φ', de unde rezultă o transformare $\mathfrak{X}$, conform schemei

$$\begin{array}{ccc} \forall M \in F & \xrightarrow{\ \mathfrak{T}\ } & M' \in F' \\ \Big\downarrow \mathfrak{S} & & \Big\downarrow \mathfrak{S} \\ N \in \Phi & \xrightarrow{\ \mathfrak{X}\ } & N' \in \Phi' \end{array}$$

Această transformare $\mathfrak{X}$ se numeşte *transmutata* lui $\mathfrak{T}$ prin $\mathfrak{S}$. Schema arată însă că prin aceasta se presupune că $\mathfrak{S}$ are o inversă, pentru ca N să nu corespundă decît unui singur element M; aşa că avem

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^{-1} \times \mathfrak{T} \times \mathfrak{S},$$

adică

$$\mathfrak{X}(N) = \mathfrak{S}\{\mathfrak{T}[\mathfrak{S}^{-1}(N)]\}.$$

Dacă $\mathfrak{T}$ şi $\mathfrak{S}$ aparţin unui aceluiaşi grup de transformări, $\mathfrak{X}$ aparţine şi ca acelui grup.

Aşadar, o transmutaţie este o aplicaţie a mulţimii transformărilor punctuale în ea însăşi. (Exemplu: în plan, transmutînd o rotaţie de unghi α printr-o simetrie în raport cu o dreaptă, se obţine o rotaţie de unghi $-\alpha$.)

§ 3. FUNCŢII NUMERICE DE O VARIABILĂ (GENERALITĂŢI)

I. Definiţii

O funcţie numerică de o variabilă este o aplicaţie a mulţimii R a numerelor reale în ea însăşi. Mulţimea $X \subseteq R$ a elementelor x care au o imagine se numeşte *mulţimea de definiţie* a funcţiei. Mulţimea imagine Y este *mulţimea în care funcţia ia valori*. Aplicaţia se notează deseori cu litera f; scriem deci:

$$\forall x,\ x \in X,\quad x \searrow\!\!\!\!\!\!\_\_\_\_\!\!\!\!\nearrow y \in Y$$

sau, mai concis

$$\forall x,\ x \in X,\ y = f(x).$$

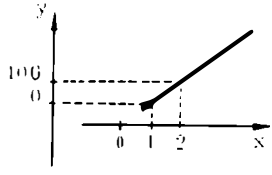
x se numeşte *variabilă*: este elementul generic al mulţimii de definiţie.

Semnul $=$ scris aici nu face decît să indice numele atribuit imaginii lui x. Dacă submulţimea X nu este precizată, se consideră submulţimea cea mai mare a lui R în care funcţia este definită (de exemplu, dacă funcţia este „rădăcina pătrată", mulţimea de definiţie este mulţimea numerelor pozitive sau nule.)

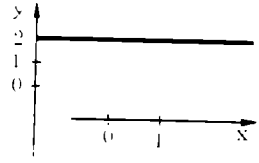
Grafic. Fiecărui x din X îi corespunde, aşadar, un y din Y: putem considera aceasta ca o relaţie între x şi y şi putem pune în evidenţă perechile ordonate (x,y) care satisfac această relaţie. Aceste perechi sînt susceptibile de a fi reprezentate ca puncte ale unui plan, x şi y fiind coordonatele punctului. În general, pentru a putea face geometrie analitică metrică în acest plan, se folosesc axe rectangulare cu unităţi egale, dar procedeul acesta nu are nimic esenţial: deseori se folosesc unităţi diferite pe cele două axe, şi nici măcar originile nu se fac coincidente. În toate cazurile, mulţimea punctelor care reprezintă perechile constituie *graficul* funcţiei.

EXEMPLE.

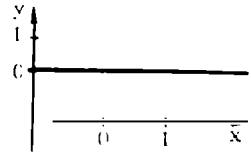
1) *Funcția factorial* $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots x$ definită pe mulțimea întregilor pozitivi. Ea se notează $y = x!$ Graficul ei se compune dintr-o mulțime numărabilă de puncte.



$y = 100\,(x - 1)$

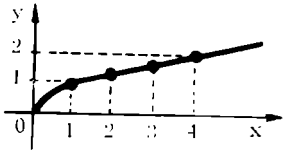


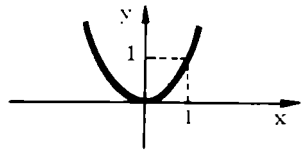
$y = 2$



$y = 0$

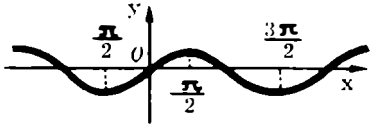
2) *Funcții afine*, al căror grafic este o dreaptă.





3) *Funcția rădăcina pătrată*. Funcția este definită pe mulțimea numerelor reale pozitive sau nule. Dacă considerăm ca mulțime X de plecare mulțimea întregilor pozitivi, funcția ia valori într-o altă mulțime decît mulțimea de plecare.

4) Să reprezentăm și graficele funcțiilor $y = x^2$ și $y = \sin x$.



Funcție reciprocă. Fie o funcție $\forall x \in X$, $x \searrow\!\!\nearrow y$ definită pe X și $Y = f(x)$ mulțimea imaginilor $f(x)$. Dacă fiecare $y \in Y$ nu este imagine decît a unui singur element $x \in X$, funcția f definește o *corespondență biunivocă* între X și Y. Spunem că f este o funcție *bijectivă de la X spre Y*; aceeași corespondență ar putea fi definită, la fel de bine, și printr-o funcție g bijectivă de la Y spre X.

$$\forall y \in Y,\ y \overset{g}{\searrow\!\!\nearrow} x \qquad x \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} y$$

Aceasta înseamnă că produsul funcțiilor f și g este transformarea identică

$$f \times g = \mathcal{J} \quad x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} x, \quad x \xrightarrow{\mathcal{J}} x$$

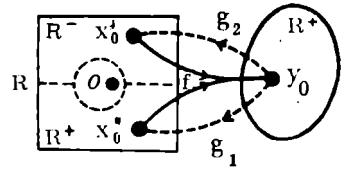
Funcțiile f și g se numesc *inverse* una alteia, sau *reciproce*; scriem $g = f^{-1}$ sau $f = g^{-1}$.

Dacă $\mathcal{C}$ este graficul funcției f, curbă tăiată în cel mult un punct de orice paralelă la axa x, graficul funcției g rezultă din $\mathcal{C}$ prin inversarea axei de plecare cu cea de sosire, adică prin simetria de axă $x = y$.

O funcție care este propria sau inversă se numește funcție *involutivă*

(de ex. $\forall x,\ x \xrightarrow{\quad} y = 3 - x$, care poate fi definită prin $x + y = 3$)

O funcție care nu este bijectivă definește o corespondență între $y_0 \in Y$ și o mulțime de valori ale lui x, mulțime numită *imaginea reciprocă* a lui y_0: o funcție reciprocă nu există decît de la Y *la mulțimea părților* lui X, dar ne interesează cazul în care există o funcție inversă între Y și o *submulțime* a lui X.



EXEMPLE.

1) $\forall x \in R,\ x \xrightarrow{\text{pătrat}} y = x^2,\ Y \subseteq R^+$.

Se demonstrează (sau se admite) că $Y = R^+$ și se definește

$$\forall u \in R^+,\ u \xrightarrow{g_1} v = \sqrt{u} \in R^+$$

și

$$\forall u \in R^+,\ u \xrightarrow{g_2} w = -\sqrt{u} \in R^-.$$

2) În cazul funcțiilor trigonometrice fundamentale, se definește *determinarea principală* a funcțiilor reciproce:

Inversarea funcției sinus:

$$X = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall u \in X,\quad u \xrightarrow{\text{Arc sinus}} \varphi = \text{Arc sin } u$$

(φ este arcul care aparține lui X și are ca sinus pe u).

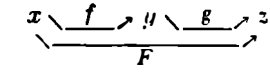
Inversarea funcției cosinus:

$$X = [0, \pi[,\ \forall v \in X,\quad v \xrightarrow{\text{Arc cosinus}} \varphi = \text{Arc cos } v.$$

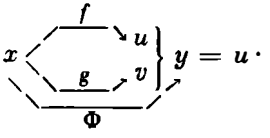
Inversarea funcției tangentă:

$$X = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall t \in X,\quad t \xrightarrow{\text{Arc tangentă}} \varphi = \text{Arc tg } t.$$

REMARCĂ. Vom avea ocazia să introducem în mulțimea funcțiilor numerice o structură de corp, care cuprinde o operație numită „produs" și corespunde unui *produs al imaginilor*. În acest caz este util să precizăm cîteva convenții de vocabular.



$F = f \times g = g \circ f$ *funcție compusă*
$F(x) = g[f(x)]$.
Dacă $F = \mathcal{J}$, f și g se numesc funcții *reciproce*.



$\Phi = f \cdot g$ funcție *produs*
$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$
Dacă $\Phi = \mathcal{J}$, f și g vor fi numite funcții *inverse*.

II. Creșterea și descreșterea unei funcții numerice în mulțimea ei de definiție.

Fie X o mulțime pe care este definită o funcție f. Spunem că funcția este *crescătcare* pe X dacă aplicația respectă ordinea. Altfel spus, dacă pentru orice pereche x_1, x_2 de valori x din mulțimea X, diferența $f(x_2) - f(x_1)$ are același semn ca $x_2 - x_1$. Dacă, oricare ar fi x_1 și x_2 din X, diferența $f(x_2) - f(x_1)$ arc, din contră, semnul lui $-(x_2 - x_1)$, spunem că funcția este *descrescătoare* pe X. În fine, spunem că funcția este *constantă* pe X dacă $f(x_2) - f(x_1) = 0$ oricare ar fi x_2 și x_1 din X.

În general, nici unul din aceste trei cazuri nu se realizează pe mulțimea de definiție; se caută atunci să se vadă dacă această mulțime nu poate fi divizată într-un număr finit sau infinit de submulțimi în care să fie verificat unul (oarecare) din aceste cazuri. Pe o asemenea submulțime X_1 a lui X spunem că funcția este *monotonă*; funcția inversă este atunci și ea determinată, cu excepția cazului în care funcția este constantă.

Pe grafic, creșterea se traduce prin faptul că toate coardele M_1M_2 sînt paralele cu vectori $\mathbf{i} + k\mathbf{j}$ cu $k > 0$ (dacă numim $\mathbf{i}$ și $\mathbf{j}$ vectorii unitari pe axele de coordonate). Într-adevăr, avem

$$\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = (x_2 - x_1)(\mathbf{i} + k\mathbf{j})$$

cu $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pozitiv, conform definiției creșterii. Acest număr k este *coeficientul director al coardei* M_1M_2.

Tot astfel, descreșterea unei funcții pe X este caracterizată prin faptul că toate coardele care unesc două puncte ale graficului au coeficienți directori negativi.

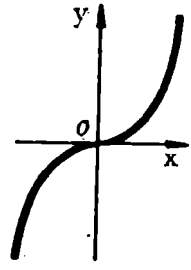
EXEMPLE 1) k este constant. Ecuația graficului este

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k \text{ sau } y = kx + (y_1 - kx_1);$$

o ecuație de gradul întîi care reprezintă o dreaptă. Funcția este

$$x \xrightarrow{\ f\ } kx + (y_1 - kx_1)$$

care se notează și $y = kx + (y_1 - kx_1)$. Ea se numește *funcție afină*. Printr-o veche confuzie între „linie" și „dreaptă", ea se mai



numea și funcție liniară, termen rezervat acum pentru funcțiile $y = kx$.

2) Funcția $y = x^3$ este crescătoare pe mulțimea numerelor reale căci

$$y_2 - y_1 = (x_2)^3 - (x_1)^3 = (x_2 - x_1)\left[x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right];$$

or, paranteza dreaptă se scrie $k = \frac{3}{4}(x_2 + x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$ și este deci pozitivă.

3) $n \in N$, $x \xrightarrow{\ \ \ } y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n = n!$ este crescătoare în N.

Partea a doua

PUNCT DE VEDERE TOPOLOGIC

§ 1. GENERALITĂŢI: VECINĂTĂŢI. LIMITE

Topologia este ştiinţa care dă formă matematică noţiunilor intuitive care se traduc prin „este vecin", „este puţin diferit de", „tinde către", exprimări care se introduc obligatoriu în fizică ca urmare a caracterului aproximativ al operaţiilor de măsurare, iar în geometrie — prin noţiunea intuitivă de continuitate.

Vecinătăţi

1) VECINĂTĂŢI ÎN MULŢIMEA R A NUMERELOR REALE

Fie un număr a; vom numi *vecinătate de ordinul* α a lui a, şi o vom nota $V_\alpha(a)$, mulţimea numerelor x care verifică

$$a - \alpha < x < a + \alpha, \quad \text{adică} \quad x \in]\, a - \alpha,\ a + \alpha[$$

Presupunem deci că α este neapărat *pozitiv*.

Intervalul este *deschis*, şi aceasta pentru a asigura proprietăţile următoare:

[V_1] *Oricare ar fi b din vecinătatea lui a, există o vecinătate a lui b inclusă în vecinătatea lui a.*

Va fi suficient să luăm drept număr β pe cel mai mic dintre numerele $a + \alpha - b$ şi $b - (a - \alpha)$, şi o vecinătate de ordinul β a lui b.

Nu este esenţial ca a să fie mijlocul intervalului, şi se numeşte de asemenea vecinătate a lui a orice interval deschis $]a - \beta,$

$a + \gamma[$, unde numerele β și γ sînt pozitive: un asemenea interval conține într-adevăr o vecinătate de ordinul α, α fiind cel mai mic dintre numerele β și γ.

Tot vecinătate a lui a (dar fără a preciza ordinul) se mai numește și orice submulțime care conține un interval deschis din care face parte a. Noi însă ne vom limita să folosim, ca vecinătate, un interval, și, în general, a va fi mijlocul acestuia.

Desprindem următoarele două proprietăți importante:

$[V_2]$ *Reuniunea, precum și intersecția, a două vecinătăți ale lui a este o vecinătate a lui a.*

$[V_3]$ *Dacă două numere a și b sînt distincte, există vecinătăți ale lui a și ale lui b care sînt disjuncte* (adică fără puncte comune). Aceasta este proprietatea de *separare*. Într-adevăr, este suficient să luăm, de exemplu, $V_\alpha(a)$ și $V_\alpha(b)$ cu $\alpha = \frac{1}{3} | b - a |$.

2) VECINĂTĂȚI ÎNTR-O MULȚIME OARECARE

a fiind un element al unei mulțimi E, este vorba de a defini o mulțime $\mathcal{V}$ de submulțimi $V(a)$ care conține pe a și satisface proprietățile $[V_1]$, $[V_2]$ și, dacă este posibil, și proprietatea $[V_3]$. Mulțimea $\mathcal{V}$ va fi ordonată prin incluziune.

a) ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE, am dat o definiție în acord cu noțiunea de *distanță* între două puncte de pe dreapta reală: $M_1M_2 = | x_2 - x_1 |$. În mulțimea punctelor dreptei, *vecinătățile unui punct A* de abscisă a sînt *segmentele deschise* care conțin pe A, imagini ale intervalelor deschise care conțin pe a. Vom lua, în general, segmente de centru A și vom numi $V_\alpha(A)$ și $V_\alpha(a)$ vecinătățile astfel definite prin $| x - a | < \alpha$. Astfel, înlocuirea numărului a printr-un element $x \in V_\alpha(a)$ introduce o *eroare absolută* $| x - a |$ mai mică decît α.

Putem conveni să adoptăm și o altă definiție a vecinătăților în mulțimea numerelor reale, în acord cu noțiunea de *eroare relativă*: x este vecin cu a dacă x/a este vecin cu 1. O vecinătate $W_\beta(a)$ va fi mulțimea numerelor x care verifică

$$0 < 1 - \beta < \frac{x}{a} < 1 + \beta, \text{ adică } | x - a | < \beta | a |.$$

Dacă este dat α, asigurăm incluziunea $W_\beta(a) \subset V_\alpha(a)$ prin $\beta < \alpha / | a |$.

Dacă este dat β, asigurăm incluziunea $V_\alpha(a) \subset W_\beta(a)$ prin $\alpha < \beta / | a |$, dar lucrul acesta nu este posibil decît într-un interval

mărginit (a_1, a_2) care nu conține pe 0. În mulțimea numerelor reale, pe dreapta reală, aceste două definiții determină *topologii diferite*.

b) PUNCTE ALE UNUI SPAȚIU CU DOUĂ DIMENSIUNI (sau cu 3, sau cu n dimensiuni). În geometrie afină, un punct A este determinat prin $\mathbf{OA} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

Vom defini, în mod firesc, o vecinătate $V_{\alpha,\beta}(A)$ ca fiind mulțimea punctelor M, $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, care verifică

$$x \in]a - \alpha, a + \alpha[\text{ și } y \in]b - \beta, b + \beta[$$

așadar, ca fiind interiorul unui paralelogram care depinde de bază; dacă însă se face o schimbare de bază, se va adopta intersecția celor două paralelograme corespunzătoare.

În geometrie metrică (vezi capitolul următor), se va adopta o definiție legată de noțiunea de distanță între două puncte. O vecinătate de ordinul α a unui punct A va fi mulțimea punctelor M care verifică $AM < \alpha$. Acesta este un *disc deschis*.

Mai general, în spațiul cu n dimensiuni, o asemenea submulțime se numește *disc deschis n-dimensional*.

c) VECINĂTATE A UNUI VECTOR. Asociem mulțimii vectorilor un spațiu punctual prin relația $\mathbf{OL} = \mathbf{V}$. În felul acesta, $\mathbf{L_0L} = \mathbf{V} - \mathbf{V_0}$. O vecinătate a lui $\mathbf{V_0}$ este imaginea unei vecinătăți a lui L_0.

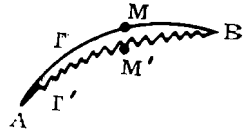
d) VECINĂTĂȚI ALE UNEI DREPTE ÎN MULȚIMEA $\mathfrak{D}$ A DREPTELOR D DIN PLAN. O dreaptă D depinde de doi parametri: o definim, de exemplu, prin ecuația ei $y = mx + p$, stabilind o corespondență biunivocă între perechile (m,p) din R^2 și dreptele D. Sau, la fel de bine, introducem punctele în care dreapta taie axele de coordonate, sau piciorul perpendicularei coborîte dintr-un punct dat, pe dreapta D. Vom spune că două drepte sînt *vecine* dacă cei doi parametri care o determină au valori vecine. Aceste definiții satisfac condițiile $[V_1]$, $[V_2]$ și $[V_3]$. Fiecare vecinătate de o anumită specie conține vecinătăți de celelalte tipuri, așa că diferitele definiții propuse determină o aceeași topologie.

Trebuie notat că *nu* definim pe două drepte vecine o corespondență prin puncte vecine: topologia planului riglat nu este legată de cea a planului punctual. Cele două puncte de vedere pot fi corelate dacă se consideră o regiune mărginită a planului și segmente de drepte.

e) VECINĂTĂȚI ALE UNEI APLICAȚII. Să considerăm, de exemplu, mulțimea rotațiilor în geometrie plană. O rotație r este determinată de poziția centrului și de valoarea unghiului: trei parame-

tri. Vom spune că două rotații r' și r'' sînt „vecine" dacă acești parametri iau valori vecine. De altfel, imaginile M' și M'' ale unui același punct M nu vor fi vecine decît dacă se consideră o regiune mărginită care cuprinde centrele rotațiilor.

f) VECINĂTĂȚI ALE UNEI CURBE. Într-o mulțime de curbe, două arce Γ și Γ' care unesc A cu B pot fi numite vecine dacă se poate stabili o corespondență a lui Γ pe Γ', astfel încît fiecare punct $M \in \Gamma$ și imaginea lui $M' \in \Gamma'$ să fie la o distanță mai mică decît α. O asemenea vecinătate va fi acceptabilă într-o teorie a ariilor. Dar într-o teorie a lungimilor, evident, va trebui să se pretindă mai mult: în punctele asociate va trebui ca și tangentele la cele două curbe să aibă direcții vecine: studiul lungimii presupune vecinătăți nu numai punctuale, ci și tangențiale.



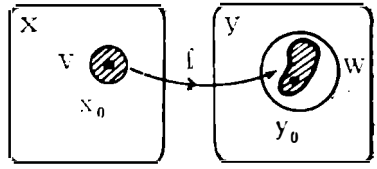
Dacă curbele sînt grafice ale unor funcții numerice de o aceeași variabilă, se va putea defini funcțiile ca fiind vecine dacă graficele lor sînt vecine, impunînd condiții mai mult sau mai puțin exigente: vecinătate exclusiv punctuală, sau vecinătate punctuală și tangențială (ceea ce implică funcțiile derivate).

Continuitate și limită

Este vorba de două mulțimi E și F de elemente y și x, în care au fost definite vecinătățile $V_\alpha(x_0)$ și $W_\beta(y_0)$. O aplicație f a lui E în F asociază unui element x o imagine $y = f(x)$. Se studiază corespondența între vecinătăți.

CONTINUITATE. Fie dat un punct x_0 de imagine $y_0 = f(x_0)$. Spunem că aplicația f este *continuă* în x_0 dacă, oricare ar fi vecinătatea $W(y_0)$, există o vecinătate $V(x_0)$ astfel încît

$$x \in V(x_0) \Longrightarrow y \in W(y_0)$$



Altfel spus, $f[(V(x_0)] \subset W(y_0)$. Aceasta înseamnă a spune că există o vecinătate $V(x_0)$ inclusă în mulțimea imaginilor reciproce ale elementelor lui W.

LIMITĂ. În cazul în care funcția nu este definită în x_0 dar este definită în vecinătățile „găurite" $V(x_0) - \{x_0\}$, atunci, dacă există un element λ astfel încît funcția să devină continuă dacă i se atribuie lui x_0 această imagine, elementul λ se numește *limita lui* f în x_0. Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \qquad \text{sau} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$$

Unicitatea limitei rămîne să fie studiată în fiecare situație concretă.

EXEMPLUL TANGENTEI ÎNTR-UN PUNCT AL UNEI CIRCUMFERINȚE. (Folosim proprietățile binecunoscute care rezultă din definiție.)

Fie așadar E mulțimea punctelor M ale unei circumferințe ($OM = R$) și un punct $A \in E$. Considerăm vecinătățile de ordin α definite prin

$$M \in V_\alpha(A) \iff \widehat{AOM} < \alpha.$$

Pe de altă parte, fie F mulțimea dreptelor D care trec prin A. Definim o vecinătate de ordin ε a unei drepte D_0 prin

$$D \in W_\varepsilon(D_0) \iff \widehat{D_0, D} < \varepsilon.$$

În fine, fiecărui punct M îi asociem dreapta D care trece prin M. Această dreaptă AM este determinată numai dacă M nu se confundă cu A, așa că aplicația este definită în $E - \{A\}$ (adică în E din care s-a eliminat punctul A).

Imaginea lui $V_\alpha(A) - \{A\}$ este mulțimea dreptelor D care verifică

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \widehat{AOD} < \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare, dacă considerăm dreapta T perpendiculară în A pe raza OA, vedem că această imagine este vecinătatea $W_\varepsilon(T)$ pentru $\varepsilon = \alpha/2$, din care s-a eliminat dreapta T.

Reciproc, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ dinainte ales, $W_\varepsilon(T) - \{T\}$ este imaginea unei vecinătăți $V_\alpha(A) - \{A\}$ pentru $\alpha = 2\varepsilon$.

(Judecăm aici intuitiv: așadar, dacă accept să neglijez un unghi α, pot confunda dreapta AM cu dreapta T, cu condiția ca M să fie suficint de vecin cu A.)

Rezultatul obținut prin reciprocă se scrie:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha : [M \in V_\alpha(A) - \{A\}] \Longrightarrow [D \in W_\varepsilon(T)].$$

Aceasta se traduce prin una din propozițiile:

„D tinde către T cînd M tinde către A";

„D admite limita T cînd M tinde către A".

Scriem (folosim săgeți drepte)

$$\text{„}D \to T \text{ cînd } M \to A\text{"} \quad \text{sau} \quad D \underset{M \to A}{\to} T$$

De reținut că aceste propoziții au sens numai global, fiindcă luate separat, părțile lor componente nu au nici o semnificație.

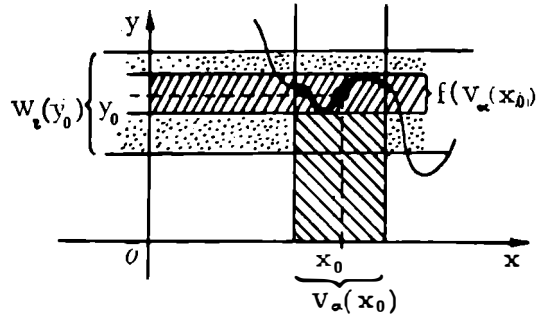
§ 2. STUDIUL LOCAL AL UNEI FUNCȚII NUMERICE

a) Presupunem că o funcție $y = f(x)$ este definită în toate punctele unui interval $]a, b[$; acest interval, fiind deschis, este vecinătate pentru toate punctele sale. Toate vecinătățile $V_\alpha(x_0)$ pe care le vom considera vor fi presupuse incluse în $]a, b[$, ceea ce înseamnă că vom lua pe α suficient de mic pentru a asigura această condiție.

Fie așadar, $x_0 \in\ ]a, b[$; notăm $y_0 = f(x_0)$. Imaginea unei vecinătăți $V(x_0)$ este o submulțime a numerelor reale care conține pe y_0 dar, dacă nu se face nici o ipoteză asupra funcției f, nu este sigur că ea este o vecinătate a lui y_0. Ne interesează cazul următor:

CONTINUITATEA ÎN PUNCTUL x_0

Spunem că funcția este continuă în punctul x_0 dacă, oricare ar



fi $\varepsilon > 0$, $y \in W_\varepsilon(y_0)$ oricare ar fi x într-o vecinătate $V_\alpha(x_0)$, numărul pozitiv α depinzînd de ε.

Altfel spus: *O funcție definită în* $]a, b[$ *este continuă într-un punct* x_0 *al acestui interval dacă, oricare ar fi numărul pozitiv* ε, *există*

un număr pozitiv α *astfel încît* $|x - x_0| < \alpha$ *implică* $|y - y_0| < \varepsilon$.

În limbaj simbolic aceasta se scrie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |y - y_0| < \varepsilon.$$

Așa cum se vede clar din grafic, aceasta înseamnă că imaginea lui $V_\alpha(x_0)$ este inclusă în $W_\varepsilon(y_0)$. Nu se pune însă în nici un fel problema de a căuta cel mai mare număr α care asigură această condiție.

EXEMPLU. Funcția de gradul întîi $y = mx + p$ este continuă în orice punct fiindcă inegalitatea $|y - y_0| < \varepsilon$ există de îndată ce $|x - x_0| < \varepsilon/|m|$. Vom lua de pildă, $\alpha = \frac{\varepsilon}{2|m|}$.

Se vede clar că α depinde de ε. Dacă funcția nu este de gradul întîi, α depinde, evident, și de x_0.

Noi știm să exprimăm continuitatea într-un punct cu ajutorul noțiunii de limită: ne aflăm în cazul simplu în care este inutil să excludem pe x_0. Putem enunța: *Spunem despre o funcție definită pe* $]a, b[$ *că este* CONTINUĂ ÎNTR-UN PUNCT x_0 *al acestui interval dacă* $f(x)$ *tinde către* $f(x_0)$ *cînd* x *tinde către* x_0.

b) Spunem despre o funcție că este DEFINITĂ ÎN VECINĂTATEA LUI x_0 *dacă ea este definită în anumite puncte*, DIFERITE DE x_0, *ale oricărei vecinătăți* $V_\alpha(x_0)$, *oricît de mic ar fi* α. Se poate însă ca ea să nu fie definită în x_0; se pune atunci problema de a ști dacă ea are o limită L cînd x tinde către x_0, adică dacă, X fiind mulțimea în care este definită $f(x)$, există L astfel încît

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha : [x \in X, |x - x_0| < \alpha] \Longrightarrow [|f(x) - L| < \varepsilon].$$

Cazul cel mai simplu, singurul pe care îl vom întîlni în Cartea a III-a, este cel în care funcția este definită într-un întreg interval $]a,b[$, cu excepția punctului x_0. În acest caz, dacă funcția are o limită L cînd x tinde către x_0, o putem face să fie *definită și continuă în* x_0: este suficient pentru aceasta să atribuim imaginii lui x_0 valoarea L. Spunem că L este *valoarea adevărată a funcției în* x_0.

c) DERIVATA ÎNTR-UN PUNCT

Presupunem funcția definită pe $]a,b[$ și continuă în x_0. Alegînd un ε, din care rezultă un $W_\varepsilon(y_0)$, există un $V_\alpha(x_0)$ astfel încît

$$x \in V_\alpha(x_0) \Longrightarrow y \in W_\varepsilon(y_0).$$

Punctul M de pe grafic, de coordonate x, y, este deci vecin cu punctul M_0 de coordonate x_0, y_0. Noi am vrea însă să precizăm și dacă direcția dreptei M_0M este sau nu vecină cu o anumită direcție. Considerăm de aceea coeficientul director al dreptei M_0M:

$$g(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

funcție care nu este definită pentru $x = x_0$, dar care este definită în oricare alt punct al vecinătății $V_\alpha(x_0)$.

Dacă $g(x)$ are o limită k cînd x tinde către x_0, adică dacă

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists \alpha' : |x - x_0| < \alpha' \Longrightarrow \left| \frac{y - y_0}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon',$$

vom spune că *funcția f admite o derivată în* x_0, derivată care este numărul k. Aceasta înseamnă a spune că dreptele M_0M din mulțimea dreptelor din plan care trec prin M_0, sînt într-o vecinătate de ordin ε' arbitrar de mic a dreptei T care trece prin M_0 și are coeficientul unghiular k, cînd M este într-o vecinătate a lui M_0 de ordin α' suficient de mic. Prin definiție, această dreaptă T se numește *tangenta* la grafic în punctul M_0. Prin urmare, a spune că funcția admite o derivată în x_0 este echivalent cu a spune că graficul ei admite o tangentă în M_0 și că valoarea acestei derivate este coeficientul director al acestei tangente.

1) **Remarci importante.** În cele de mai sus, am presupus în mai multe rînduri că o funcție admite o limită pentru o valoare x_0 a variabilei. Trebuie să demonstrăm teorema:

Unicitatea limitei. *Dacă o funcție admite o limită L cînd x tinde către* x_0, *această limită este unică.*

Altfel spus, o funcție nu poate tinde către două limite L și L_1 cînd x tinde către x_0. Aceasta rezultă din proprietatea $[V_3]$ de separare care este adevărată pentru vecinătățile definite de noi în mulțimea numerelor reale în care ia valori funcția considerată: dacă $L \neq L_1$, putem considera două vecinătăți *disjuncte* $W_\varepsilon(L)$ și $W_\varepsilon(L_1)$. (Este suficient să luăm $\varepsilon < \frac{1}{3} |L - L_1|$). Atunci, dacă L este o limită, există α astfel încît imaginea lui $V_\alpha(x_0)$ să fie inclusă în $W_\varepsilon(L)$; așadar această imagine nu are puncte în $W_\varepsilon(L_1)$ și L_1 nu poate fi limită.

2) **Teoremă.** *Dacă două funcții f și g definite în vecinătatea lui* x_0 *au aceeași valoare pentru orice x din* $]a, b[$, *cu excepția, poate, a*

punctului $x = x_0$, și dacă una din ele are o limită L cînd x tinde către x_0, atunci și cealaltă funcție se comportă la fel.

Aceasta este o consecință imediată a definiției. În particular, dacă una din funcții, de pildă $g(x)$, este continuă în x_0, cealaltă funcție are o limită în x_0 și această limită este $g(x_0)$.

EXEMPLU: Să comparăm, pentru $x = 3$, funcțiile

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{și} \quad g(x) = x + 3.$$

Funcția f va fi definită și continuă în $x = 3$ dacă îi atribuim valoarea $g(3) = 6$.

3) Teoremele referitoare la operațiile asupra limitelor și asupra funcțiilor continue și derivabile vor fi studiate în Cartea a III-a. Vom avea nevoie totuși să folosim pe parcursul acestei Cărți proprietăți care rezultă imediat din definiții: limita sumei unui număr finit de funcții care au fiecare cîte o limită este egală cu suma limitelor. O proprietate analoagă este valabilă în cazul unui produs.

d) CREȘTEREA ȘI DESCREȘTEREA ÎNTR-UN PUNCT. Fie o funcție $f(x)$ definită în $]a, b[$ și un punct x_0 al acestui interval. Dacă există o vecinătate $V_\alpha(x_0)$ în care funcția verifică

$$\forall x \in V_\alpha(x_0), \quad g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

spunem că funcția este *crescătoare în punctul* x_0. (Comparăm, așadar, o valoare oarecare din $]a, b[$ cu valoarea dată x_0, și nu — așa cum am făcut în cazul creșterii într-un interval — cu două valori oarecare x_1 și x_2 din interval.)

Dacă o funcție admite într-un punct o *derivată pozitivă* k, ea este crescătoare în acel punct, fiindcă putem defini pe α în așa fel încît să asigurăm $|g(x) - k| < \frac{1}{2}k$ și deci, $g(x) > 0$.

Reciproc, să presupunem $g(x) > 0$ pentru orice x din (a, b). Nimic nu dovedește că $f(x)$ are o derivată în x_0; dar dacă are o derivată, această derivată nu poate fi negativă. De unde enunțurile

Teoreme. *Dacă o funcție definită în (a, b) este continuă în $x_0 \in]a, b[$ și admite în acest punct o derivată k,*

$$k > 0 \Longrightarrow f(x) \text{ este crescătoare în } x_0$$
$$k < 0 \Longrightarrow f(x) \text{ este descrescătoare în } x_0,$$
$$f(x) \text{ crescătoare în } x_0 \Longrightarrow k \geqslant 0$$
$$f(x) \text{ descrescătoare în } x_0 \Longrightarrow k \leqslant 0$$

§ 3. TRECEREA DE LA STUDIUL LOCAL LA STUDIUL GLOBAL

În cele ce urmează, presupunem funcția $f(x)$ definită într-un interval închis $[a, b]$ și continuă în fiecare punct al acestui interval. Se pune problema de a trece de la un punct x_1 la un alt punct x_2 printr-un lanț de vecinătăți.

1. Teoreme fundamentale

a) Teorema continuității uniforme

După definiția continuității într-un punct, odată ales un număr pozitiv ε, pentru orice punct x_0 din $]a, b[$ există un număr α_0 astfel încît

$$x \in]x_0 - \alpha_0,\ x_0 + \alpha_0[\Longrightarrow |y - y_0| < \varepsilon.$$

În orice vecinătate $V_{\alpha 0}(x_0)$ de lungime $2\alpha_0$, graficul funcției este aproximat, pînă la un ε, de un segment al dreptei $y = y_0$. Dar pentru a afirma că în felul acesta se obține o acoperire a lui $]a, b[$ cu ajutorul unui *număr finit* de asemenea vecinătăți, ar trebui să cunoaștem un minorant nenul al acestor lungimi $2\alpha_0$, pentru diferitele puncte x_0. Această cerință conduce la o noțiune nouă:

DEFINIȚIA CONTINUITĂȚII UNIFORME. Spunem că o funcție definită pe un interval închis $[a, b]$ este *uniform continuă* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $d > 0$ astfel încît, pentru orice pereche x_1, x_2 din interval

$$|x_1 - x_2| < d \quad \text{implică} \quad |y_1 - y_2| < \varepsilon.$$

În limbaj simbolic, aceasta se scrie

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_1 \text{ și } x_2 \in [a, b],\ \exists d > 0 : |x - x_0| < d \Longrightarrow |y_1 - y_2| < \varepsilon.$$

Această condiție pare mai exigentă decît continuitatea în fiecare punct, dar se constată că, în cazul funcțiilor numerice pe un interval al numerelor reale, cele două noțiuni coincid. Aceasta rezultă din teorema următoare:

Teorema continuității uniforme. *Orice funcție definită pe un interval închis și continuă în fiecare punct este uniform continuă în acel interval.*

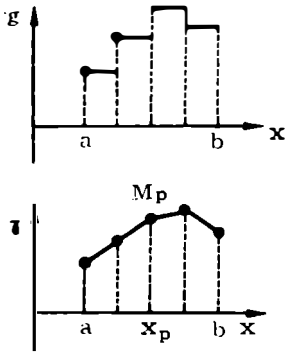
(Vom aduna la un loc, ceva mai departe, demonstrațiile diferitelor teoreme, demonstrații care pot fi omise la o primă lectură.)

CONSECINȚE. După ce am acoperit intervalul $[a, b]$ cu intervale consecutive (i_p) de lungime d, intervale care sînt în număr finit, vom putea alege cîte o valoare x_p a lui x în fiecare interval (i_p) și vom putea aproxima, pînă la un ε, funcția dată prin reuniunea de segmente de drepte care reprezintă funcțiile constante $y = y_p$ în fiecare din intervalele (i_p). Funcția $g(x)$, „constantă pe porțiuni" astfel introdusă se numește *funcție în scară.*

Prin urmare, dacă $f(x)$ este uniform continuă pe $[a, b]$, există o infinitate de funcții în scară care o aproximează pînă la un ε.

Invers, dacă, oricare ar fi ε, există o subdiviziune a lui $[a, b]$ în intervale de lungimi cel puțin egale cu d și o funcție în scară constantă pe fiecare din aceste intervale și care verifică

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon/2,$$



funcția continuă $f(x)$ ete uniform continuă pe $[a, b]$, fiindcă

$$|x_1 - x_2| < d \Longrightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Alte funcții care aproximează funcția dată pînă la un ε și care sînt, și ele, „liniare pe porțiuni" dar care, de data aceasta, sînt continue, sînt cele al căror grafic este reuniunea segmentelor care unesc punctele consecutive

$$M_p(x_p, y_p) \text{ și } M_{p+1}(x_{p+1}, y_{p+1})$$

Fie $\gamma(x)$ o asemenea funcție.

b) Teorema marginilor

Mulțimea Y a valorilor luate de o funcție $y = f(x)$ definită și continuă într-un interval închis este mărginită superior și inferior.

Aceste margini aparțin mulțimi Y, adică sînt valori ale funcției pentru anumite valori ale lui x din interval.

c) Teorema valorilor intermediare

Orice valoare cuprinsă între marginile lui Y *aparține lui* Y.

Aceste ultime două teoreme exprimă că imaginea unui interval închis al lui X este un interval închis al lui Y.

Demonstrații

În cele ce urmează vom defini elemente în mulțimea numerelor reale prin „capcanele" definite în cap. 2, § 4, III, adică prin șiruri de intervale cuprinse unele în altele și ale căror lungimi tind către zero:

$$\begin{cases} [a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N : n > N \Longrightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon. \end{cases}$$

Fie ξ numărul definit de șir. Să remarcăm că orice vecinătate $V_\alpha(\xi)$ a lui ξ conține intervale ale șirului:

$$\forall \alpha > 0,\ \exists N : n > N \Longrightarrow V_\alpha(\xi) \supset [a_n,\ b_n].$$

a) *Teorema continuității uniforme*

1) O funcție f continuă în orice punct al unui interval închis $[a, b]$ de lungime $b - a = \delta$ este *uniform continuă* în acel interval dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $d > 0$, astfel încît $f(x)$ este aproximată, pînă la un ε, de o constantă, în orice interval inclus în $[a, b]$ a cărui lungime nu depășește d. Aceasta ne permite să introducem pentru $x \in [a, b]$ una din funcțiile în scară $g(x)$ vecine cu $f(x)$, care iau un număr finit k de valori.

Dacă $[a, b]$ este descompus în p intervale parțiale prin $p - 1$ valori intermediare $a < a' < a'' < \ldots\ a^{(p-1)} < b$, continuitatea uniformă în fiecare interval parțial implică continuitatea uniformă în $[a, b]$, fiindcă $f(x)$ apare ca fiind aproximată prin funcții în scară care iau

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p$$

valori constante. (Este suficient, evident, să considerăm una din aceste funcții g.)

2) Dacă f n-ar fi uniform continuă în $[a, b]$, atunci, subdivizînd acest interval, în cel puțin unul din intervalele parțiale, continui-

tatea funcției n-ar fi uniformă. Să convenim să subdivizăm $[a, b]$ în două intervale egale, de lungime $(1/2)\delta$, și să numim $[a_1, b_1]$ unul din intervalele în care continuitatea nu este uniformă. Reiterînd subdiviziunea, obținem o „capcană":

$$\{ [a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots .$$

$$b_n - a_n = \delta/2^n$$

un șir de intervale în care continuitatea nu este uniformă.

Acest șir definește un număr ξ, pentru care f este continuă:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists V_\alpha(\xi) : \forall \begin{cases} x' \\ x'' \end{cases} \in V_\alpha(\xi), \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Dar vecinătatea $V_\alpha(\xi)$ conține intervale $[a_n, b_n]$ și lipsa continuității uniforme dă, pentru același ε și pentru unul din aceste intervale $[a_n, b_n]$,

$$\exists \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \in [a_n, b_n]: \ |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon.$$

S-a ajuns deci la o contradicție.

Prin urmare, continuitatea în $[a, b]$ este, în mod necesar, continuitate uniformă.

b) Teorema marginilor

Datorită continuității uniforme, odată ales ε, aproximăm pe $f(x)$ printr-o funcție în scară $g(x)$. Aceasta nu ia decît k valori; prin urmare ea este *mărginită;* în consecință, și $f(x)$ este mărginită în $[a, b]$. Mulțimea valorilor ei în $Y \subset R$ are deci o margine superioară M și o margine inferioară m. Să considerăm, de pildă, marginea M.

În descompunerea deja operată a intervalului $[a, b]$ în două subintervale egale, fiecare subinterval are o margine superioară, și cea mai mare dintre aceste valori este egală cu M. Aceasta înseamnă că M este marginea superioară a funcției în cel puțin unul din intervalele parțiale, interval pe care îl vom numi $[a_1, b_1]$. Reiterînd subdiviziunea, ajungem din nou la o „capcană". În fiecare interval al acestui șir marginea superioară este M. Fie ξ numărul definit de capcană.

Evident, $f(\xi) \leqslant M$. Dar inegalitatea $f(\xi) < M$ este imposibilă, fiindcă din ea am deduce o vecinătate $V_\alpha(\xi)$ în care marginea

superioară ar fi mai mică decît M, dar care ar conține intervale $[a_n, b_n]$.

Așadar, punînd $\xi = x_M$, avem $f(x_M) = M$.

În mod analog se demonstrează existența unui număr $x_m \in [a, b]$ astfel încît $f(x_m) = m$.

Diferența $M - m$ se numește *oscilația* funcției în $[a, b]$.

c) Teorema valorilor intermediare

Fie μ cuprins între m și M. Să presupunem, pentru a fixa ideile, că $x_m < x_M$ și fie $\mathcal{H}$ mulțimea valorilor $x \in [x_m, x_M]$ care verifică $f(x) \geqslant \mu$. Această mulțime — care nu este vidă, fiindcă îl conține pe x_M — este minorată de x_m; prin urmare, ea are o margine inferioară x_μ. Aceasta înseamnă că

1) x_μ este un minorant al lui $\mathcal{H}$:

$$x \in \mathcal{H} \Longrightarrow x \geqslant x_\mu .$$

2) Valoarea x_μ este cel mai mare minorant:

$$\forall V_\alpha(x_M), \qquad V_\alpha(x_\mu) \cap \mathcal{H} \neq \varnothing .$$

Dar atunci inegalitatea $f(x_\mu) > \mu$ este imposibilă fiindcă altfel ar exista o vecinătate $V_\alpha(x_\mu) \subset \mathcal{H}$, în timp ce $V_\alpha(x_\mu)$ ar conține valori $x < x_\mu$, ceea ce este în contradicție cu 1).

Însă și $f(x_\mu) < \mu$ este imposibilă, fiindcă altfel ar exista o vecinătate $V_\alpha(x_\mu)$ ale cărei elemente ar verifica $f(x) < \mu$ și am avea

$$V_\alpha(x_\mu) \cap \mathcal{H} = \varnothing ,$$

ceea ce este în contradicție cu 2).

Prin urmare $f(x_\mu) = \mu$.

REMARCĂ. Putem enunța proprietățile *b)* și *c)* spunînd: *Imaginea printr-o funcție continuă a unui interval închis* $[a, b]$ *este un interval închis.*

II. Aplicații la funcții definite, continue, derivabile

Să presupunem nu numai că funcția $y = f(x)$ este definită și continuă pe intervalul închis $[a, b]$, dar și că admite în fiecare punct x_0 al acestui interval o derivată k. Mulțimea acestor numere k constituie *funcția derivată* $f'(x)$.

Completăm teorema marginilor remarcînd că $f'(x_m)$ și $f'(x_M)$ sînt nule dacă x_m și x_M sînt *în interiorul* intervalului, adică dacă aceste valori aparțin intervalului deschis $]a, b[$. Într-adevăr, raportul

$$g(x) = \frac{f(x) - m}{x - x_m}$$

are semnul lui $x - x_m$ și, prin urmare, nu are un semn constant în vecinătatea lui x_m. Limita lui, $f'(x_m)$ — care există, prin ipoteză, nu poate fi deci diferită de zero. La fel pentru $f'(x_M)$.

ENUNȚ. *Dacă $f(x)$ este definită, continuă, derivabilă în $[a, b]$ și dacă ea își atinge marginile în x_m și x_M care aparțin lui $]a, b[$, derivata funcției este nulă în aceste puncte.*

Corolar: TEOREMA LUI ROLLE. *Dacă o funcție definită și continuă în $[a, b]$ admite derivată în orice punct al lui $]a, b[$ și dacă $f(a) = f(b)$, există cel puțin o valoare $\xi \in]a, b[$ în care derivata este nulă.*

Într-adevăr, dacă funcția este constantă în $[a, b]$, derivata ei este nulă în toate punctele; dacă nu este constantă, ea are sau o margine superioară M pe care o atinge în $]a, b[$, sau o margine inferioară m pe care o atinge în $]a, b[$, sau are și una și alta. De exemplu, dacă ea ia valori mai mari decît $f(a) = f(b)$, marginea M există, de unde rezultă $x_M \in]a, b[$ și $f'(x_M) = 0$.

Consecință: TEOREMA CREȘTERILOR FINITE. Să nu mai presupunem $f(a) = f(b)$; dreapta AB, unde A are coordonatele $(a, f(a))$ iar B are coordonatele $(b, f(b))$, nu mai este paralelă cu axa absciselor x. Așa cum am văzut, această dreaptă este graficul funcției

$$\varphi(x) = kx + f(a) - ka, \text{ unde } k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funcția $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ este continuă, derivabilă în intervalul considerat și nulă în extremitățile acestui interval; îi putem deci aplica teorema lui Rolle; există deci un număr $\xi \in]a, b[$ astfel încît

$$F'(\xi) = 0;$$

însă

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \varphi'(\xi) = f'(\xi) - k,$$

prin urmare, $f'(\xi) = k$.

Așadar: *în condițiile enunțate, există un punct în* $]a, b[$ *în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu coarda* AB. Concluzia se scrie:

$$\exists \xi \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

(Cuvîntul „finită" în expresia „creștere finită" este folosit în opoziție cu definiția derivatei, în care creșterile $b - a$ și $f(b) - f(a)$ tind către 0 și sînt ceea ce se numeau cîndva — și se mai numesc încă, uneori, în mod cu totul impropriu — „infiniți mici".)

Studiul creșterii unei funcții într-un interval cu ajutorul derivatei

Presupunem în continuare funcția $f(x)$ definită, continuă în $[a, b]$ și derivabilă în $]a, b[$.

a) Dacă o **funcție** este constantă într-un interval, știm că derivata ei este nulă în toate punctele acelui interval. Reciproc, să presupunem că **derivata** este nulă în toate punctele lui (a, b). După teorema creșterilor finite, orice coardă a graficului este paralelă cu axa x; prin **urmare**, funcția este constantă în interval.

De unde — următoarele două enunțuri foarte importante:

Dacă o funcție are o derivată invariabil nulă într-un interval, ea este constantă în acel interval.

Dacă două funcții au aceeași derivată $\varphi(x)$ *într-un interval, ele nu diferă între ele decît printr-o constantă.* (Într-adevăr, calculul limitelor arată că **derivata** unei diferențe este diferența limitelor). Vom utiliza această teoremă în cap.6 al acestei Cărți.

b) Dacă o **funcție care** admite o derivată într-un interval este crescătoare în **acel interval**, ea este crescătoare și în orice punct al intervalului, iar derivata ei este pozitivă sau nulă. Reciproc, să presupunem **derivata** (strict) pozitivă în orice punct al intervalului. După **teorema creșterilor** finite, toate coardele au pante pozitive; prin **urmare**, funcția este crescătoare în interval. Această creștere se notează cu semnul $\nearrow$; așadar

$$\forall x \in (a, b),\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f \nearrow \text{ în } (a, b)$$

$$\forall x \in (a, b),\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f \searrow \text{ în } (a, b).$$

Rezultă de aici că pentru a determina intervalele în care o **funcție continuă, derivabilă** este crescătoare sau descrescătoare, este suficient să se studieze semnul acestei derivate. În fiecare

interval în care acest semn rămîne neschimbat, funcţia este crescătoare (dacă semnul este $+$) sau descrescătoare (dacă semnul este $-$). În fiecare din aceste cazuri spunem că funcţia este *monotonă* în interval. Corespondenţa între x şi y este atunci biunivocă şi, după teorema valorilor intermediare, funcţia inversă f^{-1} este definită şi continuă pe intervalul $[m, M]$.

DEFINIŢII. O funcţie continuă admite *un maxim* în x_0 dacă ea este crescătoare într-un interval (a, x_0), şi descrescătoare în (x_0, b); $f(x_0)$ este deci marginea superioară a lui $f(x)$ în (a, b). Dacă funcţia este derivabilă, $f'(x_0) = 0$.

În mod analog se defineşte *un minim*.

III. Extensia noţiunilor de vecinătate şi de limită

Există considerente care ne determină să adăugăm mulţimii numerelor reale două elemente notate $+\infty$ şi $-\infty$ care sînt definite ca fiind marginile superioară şi inferioară ale numerelor reale; trecem, în felul acesta, de la mulţimea R deschisă, la mulţimea închisă R, numită „dreaptă încheiată".

Într-un interval închis $[a, b]$, extremităţile a şi b nu au, firește, vecinătăţi incluse în interval; sîntem conduşi să considerăm „semivecinătăţi la dreapta" pentru a, adică intervale $[a, a + \alpha[$, şi semivecinătăţi la stînga pentru b, adică intervale $]b - \beta, b]$. Tot astfel, vom defini semivecinătăţi la dreapta pentru $-\infty$: intervale $[-\infty, A[$, şi semivecinătăţi la stînga pentru $+\infty$: intervale $]A, +\infty]$.

Deducem de aici definiţii pentru limita la dreapta sau la stînga, pentru limita egală cu $-\infty$ şi pentru limita egală cu $+\infty$. De exemplu: „$f(x)$ tinde către L cînd x tinde către $+\infty$" înseamnă:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A : x > A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tot astfel, „$f(x)$ tinde către $+\infty$ cînd x tinde către x_0" înseamnă:

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A.$$

Teoremele fundamentale referitoare la funcţiile continue nu sînt valabile decît pentru intervale (a,b) mărginite, adică neinfinite. Funcţia era presupusă definită, neinfinită în aceste intervale. Totuşi, dacă funcţia tinde către infinit pentru (de exemplu) $x = b$, teorema valorilor intermediare rămîne valabilă.

Dacă într-un punct x_0 funcția nu are derivată, dar dacă raportul creșterilor are o limită k_1 la dreapta, vom spune că valoarea k_1 este derivata la dreapta. Se poate întîmpla ca o funcție să aibă într-un punct o derivată la dreapta și o derivată la stînga de valori diferite: spunem că graficul prezintă un *punct unghiular cu semitangente* (Exemplu: $y = |x|$ în punctul $x = 0$).

Notăm, în fine, că continuitatea într-un punct se exprimă prin conjuncția a două condiții:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon \qquad (2)$$

Condiția (1) caracterizează *semicontinuitatea inferioară*, iar (2) *semicontinuitatea superioară*.

Un șir este o funcție $n \searrow \nearrow u_n$ definită în N. Acest șir are o limită L dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in N : n > A \Longrightarrow |u_n - L| < \varepsilon.$$

IV. Aplicații ale noțiunii de continuitate

Studiată de noi pentru funcțiile numerice, noțiunea de continuitate se extinde și la alte aplicații.

În geometrie, elementele unei mulțimi de puncte, de drepte, de cercuri..., sau ale unei mulțimi de transformări, translații, omotetii... pot depinde de valoarea unei lungimi, a unui unghi... care se numește atunci *parametru*. Problema continuității poate fi abordată de îndată ce s-a ales o definiție a vecinătăților în mulțimea de sosire, ceea ce se exprimă spunînd că s-a ales *o topologie* în această mulțime.

În cinematică, parametrul este *timpul*. O figură poate fi supusă unei transformări continue în timp. Dacă această figură rămîne egală cu ea însăși (o noțiune de geometrie metrică), spune că ea efectuează o *mișcare*.

Dacă coordonatele unui punct M sînt funcții continue de un parametru t care parcurge un interval (t_0, t_1) al mulțimii numerelor reale, vom spune că M generează *un arc de curbă*. Dacă corespon-

dența astfel stabilită între t și M este biunivocă, arcul este *simplu*. (Arcul nu se poate încolăci peste el însăși, formînd un punct dublu.) O curbă care devine un arc simplu cînd se exclude din ea *unul oarecare* din punctele ei se numește *curbă simplă închisă*, sau *curbă Jordan* (exemplu: o circumferință, conturul unui paralelogram etc.). Dacă se elimină două puncte ale unei curbe simple închise, mulțimea este formată din două arce simple, fără puncte comune; ea nu mai este *conexă*. Aceste noțiuni sînt, evident, esențiale pentru studiul împărțirii în regiuni a spațiului prin curbe și suprafețe, fapt însă pe care aici nu facem decît să-l semnalăm.

CAPITOLUL 5

INTRODUCERE ÎN GEOMETRIA METRICĂ

§ 1. DEFINIȚIA SPAȚIILOR METRICE EUCLIDIENE

Vom construi acum o geometrie, numită *geometrie metrică euclidiană*, pe care o vom deduce din geometria afină prin adăugare de noi axiome. Aceasta înseamnă că vom păstra ca esențială noțiunea de paralelism. O elaborare axiomatică autonomă a acestei geometrii ne-ar permite, introducînd axiomele referitoare la paralelism nu de la început ci mai tîrziu, să punem în evidență bifurcarea spre alte geometrii, în particular, spre geometria lui Lobacevski (v. Cartea a III-a, cap. 3). Proprietățile cele mai esențiale ale spațiului vectorial metric ne vor conduce la alegerea a trei axiome, foarte intuitive și suficient de puternice pentru a ne furniza imediat proprietățile triunghiurilor isoscele și teorema lui Pitagora. Ele ne vor permite să regăsim rapid baza plecînd de la care știm de acum să construim geometria elementară numită geometrie „sintetică", în opoziție cu geometria „analitică".

Pornim de la un spațiu vectorial cu mai mult de o dimensiune. Vectorii sînt repartizați în clase de echivalență prin relația de paralelism. Dacă $\mathbf{v}$ este un vector paralel cu un vector $\mathbf{u}$ ales de noi, știm că există un număr k astfel încît $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. Considerînd vectorul $\mathbf{u}$ drept vector unitar pe direcția comună celor doi vectori, numărul k este măsura relativă (sau măsura algebrică) a lui $\mathbf{v}$. Numărul absolut $|k|$ va fi numit lungimea lui $\mathbf{v}$, pe care o notăm $|\mathbf{v}|$.

Convenim, în fine, conform uzanțelor, să notăm cu $=$ echivalența vectorilor pe care la începutul studiului am notat-o, din prudență, cu semnul $\equiv$.

I. Introducerea unei metrici

A înzestra spaţiul vectorial cu o metrică înseamnă a permite compararea lungimilor vectorilor neparaleli. Trebuie deci presupus că există un instrument oarecare, numit „transportor de lungimi", care permite să se definească, pe mulţimea vectorilor, *o nouă relaţie de echivalenţă*. Despre doi vectori echivalenţi prin această nouă relaţie vom spune că au aceeaşi lungime. Astfel spus, lungimea este o clasă de echivalenţă. Vom scrie $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ (folosind tot semnul $=$).

Axioma L_1 a transportului lungimii. *Fiind dat un vector* $\mathbf{u}$ *de direcţie* δ *şi o direcţie* δ_1, *există o pereche de vectori opuşi* $\mathbf{v}$ *şi* $-\mathbf{v}$, *şi numai una singură, de aceeaşi lungime ca* $\mathbf{u}$ *şi de direcţie* δ_1.

Dacă $\mathbf{u}$ este luat ca vector unitar al direcţiei δ, $\mathbf{v}$ sau $-\mathbf{v}$ va fi luat ca vector unitar al lui δ_1. În felul acesta, *orice vector are o lungime* măsurată de un număr absolut $|k|$ şi, reciproc, orice număr absolut este măsura lungimii vectorilor unei clase de echivalenţă. Vom spune, pe scurt, că numărul k *este lungimea acestor vectori*. Numărul 0 este lungimea vectorilor nuli.

Pentru ca noţiunea precedentă să fie utilizabilă, trebuie introduse axiome care să precizeze relaţia între vectori unitari egali, distincţi — adică de direcţii diferite. Vom alege acum nişte axiome care fac să intervină suma vectorilor.

Axioma (p) **a perpendicularităţii.** *Oricărui vector unitar* $\mathbf{i}$ *îi corespunde un vector unitar* $\mathbf{j}$ *care este astfel încît vectorii* $\mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ *şi* $\mathbf{s}' = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *au aceeaşi lungime;* ceea ce se scrie:

$$|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = |-\mathbf{i} + \mathbf{j}|.$$

Spunem că $\mathbf{j}$ este *perpendicular* pe $\mathbf{i}$; se vede uşor că el este perpendicular şi pe $-\mathbf{i}$.

Să remarcăm că $\mathbf{j}$ nu poate fi paralel cu $\mathbf{i}$, căci atunci el ar fi $\mathbf{i}$ sau $-\mathbf{i}$, ceea ce nu poate conveni; într-adevăr

$$|\mathbf{i} + \mathbf{i}| = |2\mathbf{i}| = 2 \quad \text{şi} \quad |\mathbf{i} - \mathbf{i}| = 0.$$

În consecinţă, $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ formează o bază. O asemenea bază se numeşte *ortonormală* (sau *ortonormată*).

Axioma (i) **a izotropiei** (sau a echivalenţei bazelor ortonormale). *Fie* $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ *o bază ortonormală şi un vector* $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; *lungimea lui* $\mathbf{v}$ *este o funcţie simetrică de* $|x|$ *şi* $|y|$:

$$|\mathbf{v}| = \mathfrak{L}(x, y) = \mathfrak{L}(y, x),$$

unde $\mathfrak{L}$ nu-şi schimbă valoarea dacă se schimbă semnul lui x sau al lui y. *Această funcţie nu depinde decît de x şi de y*, aşa că toţi vectorii care au aceleaşi componente în raport cu nişte baze ortonormale oarecare au aceeaşi lungime.

În particular, următorii 8 vectori: $\pm x\mathbf{i} \pm y\mathbf{j}$, $\pm y\mathbf{i} \pm x\mathbf{j}$ au aceeaşi lungime. Afirmaţia este compatibilă cu axioma perpendicularităţii (p), fiindcă aceea implică

$$|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = |-\mathbf{i} + \mathbf{j}|;$$

dar (p) implică şi $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = |\mathbf{i} - \mathbf{j}|$, ceea ce exprimă că şi $\mathbf{i}$ este perpendicular pe $\mathbf{j}$; aşadar, pentru doi vectori unitari, *relaţia de perpendicularitate este simetrică*. Cei doi vectori $\pm\mathbf{i}$ sînt, prin urmare, perpendiculari pe fiecare din vectorii $\pm\mathbf{j}$, şi reciproc.

DETERMINAREA FUNCŢIEI $\mathfrak{L}(x, y)$

Fie o bază ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ şi un vector *unitar* $\mathbf{u}$ din spaţiul vectorial cu două dimensiuni astfel determinat; $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$. Avem, aşadar, $\mathfrak{L}(\alpha, \beta) = 1$. Examinînd cei 8 vectori $\pm\ \alpha\mathbf{i} \pm \beta\mathbf{j}$ şi $\pm\ \beta\mathbf{i} \pm \alpha\mathbf{j}$, se constată că doi dintre ei sînt perpendiculari pe $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} \quad \text{şi} \quad -\mathbf{v} = -\beta\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j},$$

căci

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\alpha + \beta)\mathbf{i} + (\beta - \alpha)\mathbf{j} \quad \text{şi} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = (\alpha - \beta)\mathbf{i} + (\alpha + \beta)\mathbf{j};$$

altfel spus, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ formează o bază ortonormală. Să exprimăm însă pe $\mathbf{i}$ cu ajutorul acestei baze, eliminînd pe $\mathbf{j}$; obţinem

$$(\alpha^2 + \beta^2)\,\mathbf{i} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v},$$

prin urmare, luînd lungimea acestui vector orientat de $\mathbf{i}$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \equiv \mathfrak{L}(\alpha, \beta) = 1.$$

Aşadar, orice vector unitar reperat în raport cu o bază ortonormală, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, este astfel încît $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Rezultă de aici, pentru un vector neunitar:

$$\mathbf{U} = k\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad x = k\alpha, \quad y = k\beta,$$

că lungimea lui este

$$|\mathbf{U}| = |k| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

Prin urmare, *singura funcție* $\mathfrak{L}(x, y)$ *care poate conveni axiomei* (*i*) *este* $\mathfrak{L}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se verifică ușor că **ea satisface** toate condițiile impuse; în particular,

$$|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = |-\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}.$$

CONSECINȚĂ. *Unicitatea perechii* $(\mathbf{j}, -\mathbf{j})$ *de vectori unitari perpendiculari pe* $\mathbf{i}$, *într-un spațiu vectorial cu două dimensiuni.*

Fie un vector unitar din acest spațiu

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}, \text{ cu } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Avem

$$|\mathbf{u} + \mathbf{i}| = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1 + 2\alpha}$$

$$|\mathbf{u} - \mathbf{i}| = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \beta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\alpha}.$$

Aceste două lungimi nu pot fi egale decît pentru $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$; așadar $\mathbf{u}$, perpendicular pe $\mathbf{i}$, nu poate fi decît $\mathbf{j}$ sau $-\mathbf{j}$.

Prin urmare, fiind dat un vector unitar $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, **singurii** vectori unitari perpendiculari pe el din spațiul vectorial cu **două** dimensiuni sînt

$$\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j} \text{ și } -\mathbf{v} = -\beta\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$$

pe care i-am identificat deja ca atare.

Se numesc *direcții perpendiculare* direcțiile a doi vectori **unitari** perpendiculari, și vectori perpendiculari — vectorii care **au** asemenea direcții; ei sînt deci astfel încît

$$\mathbf{U} = k\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{V} = k'\mathbf{v} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j},$$

unde

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Deducem de aici

$$\begin{cases} x = k\alpha \\ y = k\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = k'\beta, \text{ de unde } xx' + yy' = 0 \\ y' = -k'\alpha \end{cases} \tag{2}$$

Invers, fie

$$\mathbf{U} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = k\mathbf{u}, \quad \mathbf{V} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} = k'\mathbf{v}$$

unde $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt unitari; relația $xx' + yy' = 0$ implică perpendicularitatea vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$.

Într-adevăr, punînd $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j}$, ajungem la

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1, \ \alpha'^2 + \beta'^2 = 1 \end{cases}, \text{ adică } \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{-\beta'}{\alpha} = \rho,$$

cu

$$\rho^2 = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 1,$$

așadar

$$\rho = \pm 1 \text{ și } \begin{cases} \alpha' = \beta \\ \beta' = -\alpha \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha' = -\beta \\ \beta' = \alpha. \end{cases}$$

CONCLUZIE. *În spațiul vectorial cu două dimensiuni, presupunînd că vectorii sînt determinați cu ajutorul unei baze ortonormale, lungimea unui vector este dată de formula*

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

iar condiția de perpendicularitate a doi vectori (se mai spune și *condiția de ortogonalitate)* este

$$xx' + yy' = 0 \tag{2}$$

II. Aplicație la spațiul punctual cu două dimensiuni

Spațiul este reperat printr-o origine O și o bază ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Fiecare punct M este definit prin $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

a) Numim *distanță între două puncte* M, M' lungimea $|\mathbf{MM'}| = |\mathbf{M'M}|$; o notăm MM'. Prin urmare,

$$MM' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

b) RELAȚIE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Fie un triunghi ABC, $\mathbf{AB} = c\mathbf{u}$, $AC = b\mathbf{v}$, $b > 0$, $c > 0$, unde $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sînt vectorii unitari pe AB și AC.

Fie $\mathbf{u}'$ vectorul unitar perpendicular pe $\mathbf{u}$ ales în așa fel încît, în determinarea lui $\mathbf{v}$ în raport cu baza ortonormală obținută,

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}', \qquad (\alpha^2 + \beta^2 = 1),$$

numărul β să fie pozitiv. Spunem că $\mathbf{u}'$ este de aceeași parte cu $\mathbf{v}$ în raport cu suportul lui $\mathbf{u}$. Deducem de aici

$$\mathbf{BC} = \mathbf{AC} - \mathbf{AB} = b\mathbf{v} - c\mathbf{u} = (b\alpha - c)\mathbf{u} + b\beta\mathbf{u}'.$$

Să notăm $|\mathbf{BC}| = BC = a$; rezultă că

$$a^2 = (b\alpha - c)^2 + (b\beta)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\alpha \tag{3}$$

Prin urmare, $\alpha = 0 \iff a^2 = b^2 + c^2$. Acesta este cazul în care AB este perpendiculară pe AC. Spunem atunci că *triunghiul este dreptunghic* în A; latura BC se numește ipotenuza triunghiului. Rezultatul obținut este *teorema lui Pitagora*.

În cazul general

$$\alpha > 0 \iff a^2 < b^2 + c^2 \quad \text{și} \quad \alpha < 0 \iff a^2 > b^2 + c^2.$$

Acest număr α introdus prin $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}'$ se numește *cosinusul perechii* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ și scriem $\alpha = \cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Numărul β se numește *sinusul* aceleiași perechi și scriem $\beta = \sin(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Vom studia aceste numere ceva mai departe. Aici vom remarca doar că aceste numere sînt cuprinse între -1 și $+1$, fiindcă ele verifică relația $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Din formula (3) rezultă deci

$$(b-c)^2 \leqslant a^2 \leqslant (b + c)^2, \text{ adică } |b - c| \leqslant a \leqslant |b + c| \tag{3'}$$

unde egalitatea nu se poate realiza decît pentru $\alpha = \pm 1, \beta = 0$ caz în care cele trei puncte A,B,C sînt coliniare. Relația (3') se numește *inegalitatea triunghiului*. Ea este suficientă pentru a exprima că trei numere pozitive a, b, c sînt măsurile celor trei laturi ale unui triunghi, fiindcă dacă b și c sînt date, atunci, conform egalității (3), a ia toate valorile de la $|b - c|$ la $|b + c|$, cînd α ia toate valorile din $[-1, +1]$.

c) Fiind dată o dreaptă d, prin orice punct A trece o perpendiculară pe această dreaptă, și numai una singură, fiindcă direcția ei este determinată de vectorii unitari $\mathbf{j}$ și $-\mathbf{j}$ perpendiculari pe vectorii directori $\mathbf{i}$ și $-\mathbf{i}$ ai dreptei d.

Mediatoarea unui segment este perpendiculara pe direcția acelui segment dusă prin mijlocul segmentului. Din axioma (*i*) rezultă

ca un caz particular, că orice punct al mediatoarei este echidistant de extremităţile segmentului. Mai general, teorema lui Pitagora demonstrează că distanţa de la un punct A pînă la un punct M al unei drepte este o funcţie crescătoare de distanţa de la M pînă la piciorul perpendicularei coborîte din A pe acea dreaptă.

Teoremă. *Fiind dată o dreaptă d, fiecărui punct M îi corespunde un punct M' astfel încît d este mediatoarea lui MM'.* Condiţia exprimă, într-adevăr, că mijlocul H al lui MM' este piciorul pe d al perpendicularei pe d duse prin M. Acest punct H este deci determinat şi M' se deduce imediat prin construcţia

$$MH \perp d,\ H \in d,\ \mathbf{MM'} = 2\mathbf{MH}$$

(folosind simbolul obişnuit $\perp$ pentru a indica ortogonalitatea). Transformarea punctuală astfel definită: $M \leftrightarrow M'$ cînd d este dat, se numeşte *răsturnare în raport cu d* (se mai spune şi *simetrie* sau *răsucire în jurul lui d*). Dreapta d se numeşte *axă de răsturnare* (de simetrie) (însă cuvîntul „axă" este impropriu, fiindcă nu se presupune că d este înzestrată cu un sens pozitiv, aşa cum impune, în general, folosirea acestui termen).

Teoremă. *Într-o răsturnare, distanţa între două puncte oarecare este invariantă.*

Aceasta rezultă din expresia analitică a unei răsturnări: fie $\mathbf{i}$ un vector unitar care orientează d, $\mathbf{j}$ un vector unitar perpendicular pe $\mathbf{i}$ şi O un punct pe d. Corespondenţa este definită prin

$$\forall M,\ \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},\ \mathbf{OM'} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j};$$

prin urmare, pentru o pereche de puncte şi perechea imagine:

$$\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j},\ \mathbf{M_1'M_2'} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} - (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

şi distanţa $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ este păstrată.

O transformare punctuală care păstrează distanţele se numeşte o *izometrie*. Conchidem deci: *o răsturnare este o izometrie.*

d) CIRCUMFERINŢĂ

1) Presupunînd că s-a ales vectorul unitar în planul metric, fie un punct dat O şi un număr pozitiv R. Să considerăm mulţimea vectorilor unitari $\mathbf{v}$. Mulţimea punctelor M definite prin $\mathbf{OM} = R\mathbf{v}$ se numeşte *circumferinţă*. O este centrul circumferinţei, iar R măsura razei ei. Analitic, dacă α şi β sînt perechile de numere reale care

verifică $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, circumferința este locul punctelor M definite prin $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} = R\alpha\mathbf{i} + R\beta\mathbf{j}$, adică locul punctelor ale căror coordonate satisfac $x^2 + y^2 = R^2$.

Teoremă. *Orice dreaptă care trece prin centru este axa unei răsturnări care lasă circumferința global invariantă.*

Într-adevăr, în această răsturnare fiecare vector **OM** își păstrează lungimea și originea O. Aceste axe se numesc *diametre* ale circumferinței. RECIPROC, *o figură care rămîne invariantă la* ORICE *răsturnare a cărei axă trece printr-un punct O este o reuniune de circumferințe de centru O.*

Într-adevăr, fie M un punct al acestei figuri; orice vector $\mathbf{OM'}$ de aceeași lungime ca **OM** este simetricul acestuia în raport cu mediatoarea lui MM', dreaptă care trece prin O; prin urmare, întreaga circumferință de centru O și care trece prin M face parte din figură.

2) Să considerăm acum un punct M al circumferinței de centru O și de rază R.

$$\mathbf{OM} = R(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}), \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

și să considerăm pe α și β drept niște variabile legate prin relația scrisă și variind conform tabelului:

α	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
β	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Prima parte a tabelului, care corespunde perechilor de valori $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, permite să se stabilească o corespondență biunivocă între punctul M și intervalul $[-1, +1]$ al numerelor reale λ, prin relația $\lambda = \alpha$.

Această corespondență este continuă, fiindcă unei vecinătăți a lui M pe circumferință îi corespunde o vecinătate a lui L pe dreapta reală. (O vecinătate a lui M în plan este aici mulțimea punctelor a căror distanță pînă la M este mai mică decît o valoare dată.) Exprimăm acest fapt spunînd că partea corespunzătoare din circumferință este *un arc simplu*. Acest arc se numește o *semicircumferință* (*semicerc*) fiindcă reuniunea acestui arc cu simetricul lui în raport cu o dreaptă convenabilă este circumferința întreagă: această dreaptă este diametrul care unește cele două *extremități ale arcului*, imaginile extremităților intervalului $[-1, +1]$.

Să considerăm a doua parte a tabelului (fără a relua valoarea $+1$ a lui α)

$$+1 < \alpha \leqslant -1, \quad \beta \leqslant 0.$$

Ea ne permite să stabilim o corespondenţă biunivocă continuă cu intervalul $]+1, +2]$ al numerelor reale λ prin relaţia

$$\lambda = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha.$$

Curba în întregime este deci în corespondenţă biunivocă continuă cu intervalul $[0, 2]$ al numerelor reale, cu condiţia să considerăm cele două extremităţi ale acestui interval drept un singur punct. Exprimăm aceasta spunînd că circumferinţa este *o curbă simplă închisă*. Este clar că intervalul $[0, 2]$ ar fi putut fi înlocuit cu orice alt interval închis (cf. cap. 4).

3) Cînd se dă o circumferinţă (centru O, raza R), prin aceasta se determină trei submulţimi ale căror puncte-elemente sînt caracterizate respectiv prin

$$\begin{cases} OM = R & : \text{circumferinţa} \\ OM < R & : \text{regiunea interioară circumferinţei} \\ OM > R & : \text{regiunea exterioară circumferinţei.} \end{cases}$$

Fie A şi B două puncte situate în regiunea interioară: segmentul AB este în întregime în această regiune, fiindcă el este inclus în coarda determinată de dreapta AB. Spunem că această regiune este *convexă*.

Dacă A şi B sînt, ambele, în regiunea exterioară, punctele pot fi şi acum unite printr-un arc simplu fără puncte comune cu circumferinţa: vom considera, de exemplu, segmentul AC al semidreptei OA, unde C este pe circumferinţa de centru O care trece prin B, şi vom lua apoi unul din arcele CB ale acestei circumferinţe.

Dacă, din contra, A şi B sînt unul — de exemplu, punctul A — în interior iar celălalt — punctul B — în exterior, orice arc simplu care uneşte A cu B are cel puţin un punct comun cu circumferinţa. Într-adevăr, punctul generic M al arcului este în corespondenţă biunivocă şi continuă cu numărul t care parcurge un interval $[a, b]$; prin urmare, coordonatele x şi y ale lui M sînt funcţii continue de t, şi acelaşi lucru este valabil şi pentru $d = OM$.

Prin urmare, d ia toate valorile intermediare între OA și OB (după teorema din cap. 4), deci ia, în particular, și valoarea R.

Primele două rezultate exprimă că fiecare din cele două regiuni, cea interioară și cea exterioară, sînt *conexe*. Se demonstrează că rezultatul al treilea decurge din faptul că circumferința este o curbă simplă închisă.

4) DISTANȚA DE LA UN PUNCT PÎNĂ LA O MULȚIME

Fie A un punct care aparține sau nu unei mulțimi E. Mulțimea distanțelor AM, cînd M parcurge E, are o margine inferioară d (axioma de bine ordonare), care se numește *distanța de la A pînă la mulțimea E*.

$$A \notin E \Longrightarrow d \geqslant 0; \quad A \in E \Longrightarrow d = 0.$$

Teorema 1. *Distanța de la un punct A pînă la o dreaptă Δ este distanța de la A pînă la piciorul perpendicularei pe Δ care trece prin A.*

Dacă dreapta este definită prin

$$M \in \Delta \Longleftrightarrow \mathbf{OM} = \lambda \mathbf{i}$$

și dacă

$$\mathbf{OA} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}:$$

$$d^2 = \operatorname{Inf} [(a - \lambda)^2 + b^2]$$

prin urmare, $d = |b|$ care se obține pentru $\lambda = a$.

Corolar. *Mulțimea punctelor a căror distanță la o dreaptă Δ este dată este reuniunea a două drepte paralele cu Δ.*

Teorema 2. *Mulțimea punctelor echidistante de două drepte concurente este reuniunea a două drepte.*

Fie Δ_1 și Δ_2 cele două drepte concurente. O circumferință centrată în punctul $\Delta_1 \cap \Delta_2$ taie pe Δ_1 în A și A', și pe Δ_2 în B și B'. Mediatoarea μ a lui AB și mediatoarea μ', distinctă de μ, a lui AB' sînt două axe de răsturnare care schimbă între ele Δ_1 și Δ_2; prin urmare punctele reuniunii $\mu \cup \mu'$ satisfac condițiile cerute.

Alte puncte nu mai există, fiindcă fiecărei distanţe d îi corespunde o pereche δ_1, δ_1' de paralele la Δ_1 şi o pereche δ_2, δ_2' de paralele la Δ_2, de unde rezultă o mulţime de 4 puncte acceptabile

$$(\delta_1 \cup \delta_1') \cap (\delta_2 \cup \delta_2')$$

care nu poate fi decît mulţimea celor 4 puncte deja cunoscute

$$(\delta_1 \cup \delta_1') \cap (\mu \cup \mu').$$

5) TOPOLOGIA ASOCIATĂ METRICII

a) Aşa cum am indicat în cap.4, o vecinătate de ordinul α a unui punct A este mulţimea punctelor M care verifică $AM < \alpha$; este interiorul circumferinţei de centru A şi rază α. Această vecinătate $V_\alpha(A)$ se numeşte *disc deschis*. El satisface definiţia generală a unei *mulţimi deschise* $\mathcal{O}$:

$$\forall M \in \mathcal{O}, \quad \exists \alpha : V_\alpha(M) \subset \mathcal{O}.$$

Un *disc închis* se defineşte prin $AM \leqslant \alpha$.

Despre punctele circumferinţei spunem că aparţin *frontierei* discului deschis, conform definiţiei metricei: *frontiera unei mulţimi este mulţimea punctelor a căror distanţă pînă la mulţimea dată este nulă, ca şi distanţa lor pînă la mulţimea complementară.*

Reuniunea unei mulţimi şi a frontierei ei este *o mulţime închisă*. Complementara acesteia din urmă nu are nici un punct frontieră. Rezultă că ea satisface definiţia unei mulţimi deschise.

Reuniunea unei mulţimi deschise cu numai o parte din frontiera ei nu este nici deschisă, nici închisă.

Nu trebuie însă să se creadă că orice mulţime deschisă şi frontiera ei sînt analoage cu o regiune care poate fi colorată, respectiv cu conturul unei asemenea regiuni, aşa cum ar sugera-o exemplele elementare: un disc şi circumferinţa lui, interiorul unui triunghi şi linia frîntă care îl înconjură.

b) TANGENTE

Aşa cum am văzut, introducerea unei topologii permite definirea tangentelor la curbe. Studiul tangentelor la circumferinţă a fost făcut folosind noţiunea de unghi (cap.4, partea a II-a, § 1, II). Să reluăm însă chestiunea din punctul de vedere pe care ne plasăm acum.

6) TANGENTE LA CIRCUMFERINȚĂ

a) TANGENTA ÎNTR-UN PUNCT A.

Să alegem o bază ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ astfel încît $\mathbf{OA} = R\mathbf{i}$. Orice punct M de pe circumferință este determinat de $\mathbf{OM} = R(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ cu $x^2 + y^2 = 1$, de unde rezultă $\mathbf{AM} = R[(x-1)\mathbf{i} + y\mathbf{j}]$.

A spune că M este într-o vecinătate de ordin α a lui A înseamnă a, spune că

$$(1-x)^2 + y^2 < \alpha^2,$$

ceea ce implică

$$|x-1| < \alpha \quad \text{și} \quad |y| < \alpha.$$

$\mathbf{AM}$ este paralel cu vectorul

$$\mathbf{W}_M = \frac{x-1}{y}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

și inegalitatea

$$\left|\frac{x-1}{y}\right| = \left|\frac{-y}{x+1}\right| < \varepsilon$$

este satisfăcută dacă $\alpha < 3\varepsilon$.

Prin urmare, cînd M tinde către A, direcția lui $\mathbf{AM}$ tinde către direcția lui $\mathbf{j}$, care este perpendiculară pe raza OA. Perpendiculara t în A la OA este așadar, conform definiției, tangentă în A la circumferință.

b) TANGENTA CONTINUĂ ÎN PUNCTUL A. Să luăm două puncte M_1 și M_2 arbitrare în vecinătatea de ordinul α a lui A și să considerăm dreapta suport a coardei M_1M_2. Această dreaptă are puncte în vecinătatea lui A; pe de altă parte, direcția ei este cea a vectorului $(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$, sau a vectorului

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\mathbf{i} + \mathbf{j} = -\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

cu

$$\left|\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}\right| < \frac{2\alpha}{2(1-\alpha)}$$

care este mai mic decît ε dacă $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Prin urmare, *cînd* M_1 *și* M_2 *tind către* A *după o lege oarecare, dreapta* M_1M_2 *are o limită care este tangenta* At. Spunem că această tangentă *este o tangentă continuă în* A. (De exemplu, dacă dreapta M_1M_2 se rotește în jurul unui punct oarecare din plan, concluzia rămîne valabilă.)

III. Geometrie metrică în spațiul cu trei dimensiuni

a) Două drepte se corespund prin izometrie într-o dublă infinitate de moduri. (Se alege imaginea unui punct al uneia din drepte și sensurile omoloage.)

Două plane se corespund prin izometrie: Fie, în planul P, sistemul de referință constituit dintr-un punct O și o bază ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Trebuie ales, în planul P', imaginea lui O, imaginea lui $\mathbf{i}$ și sensul asociat sensului $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Corespondența este atunci definită prin egalitatea coordonatelor: este o corespondență liniară cu proprietatea că o bază ortonormală rămîne ortonormală. Ea este determinată de imaginea unui punct O, de cea a unei semidrepte Ox și de cea a semiplanului limitat de suportul lui Ox.

b) Plan perpendicular pe o direcție.

Fie $\mathbf{i}$ un vector unitar care orientează direcția dată. Printr-un punct oarecare O al spațiului cu trei dimensiuni, ducem

$$\mathbf{OS} = \mathbf{i} \quad \text{și} \quad \mathbf{OS'} = -\mathbf{i},$$

apoi, în două plane care trec, ambele, prin SS', luăm respectiv vectorii unitari $\mathbf{j}_1$ și $\mathbf{j}_2$ perpendiculari pe $\mathbf{i}$ și considerăm A și B definite prin $\mathbf{OA} = \mathbf{j}_1$ și $\mathbf{OB} = \mathbf{j}_2$.

În planele SAS' și SBS', știm că avem

$$SA = S'A \quad \text{și} \quad SB = S'B.$$

Deci, în izometria care face să se corespundă semiplanele ABS și ABS' limitate, fiecare, de dreapta AB, S și S' sînt omoloage.

Fie așadar M un punct oarecare de pe dreapta AB. El este invariant în izometrie, prin urmare $MS = MS'$. Aceasta, în planul SMS', dovedește că M este pe mediatoarea lui SS', prin urmare, OM este perpendicular pe $\mathbf{i}$. Or, deoarece M este arbitrar pe dreapta AB, vectorul director al lui OM, $\mathbf{j}$, este arbitrar în planul orientat de $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$. De unde — enunțul:

Dacă o direcție este perpendiculară pe doi vectori care orientează un plan, ea este perpendiculară pe orice vector paralel cu acel plan.

Reciproc, fie $\mathbf{j}_3$ un vector perpendicular pe $\mathbf{i}$ într-un plan altul decît *SOA* și *SOB*. Dreapta orientată de $\mathbf{j}_3$ și dusă prin *O* este unica perpendiculară pe $\mathbf{i}$ din acest plan, prin urmare ea se confundă cu dreapta *OM* comună acestui plan și planului *OAB*. Prin urmare, toți vectorii perpendiculari pe $\mathbf{i}$ sînt paraleli cu un același plan determinat de două dintre aceste perpendiculare.

Planele paralele între ele astfel definite, și care depind de punctul ales *O*, se numesc plane *perpendiculare pe direcția definită de* $\mathbf{i}$.

Dacă alegem doi vectori unitari dintr-un astfel de plan, care sînt perpendiculari unul pe celălalt, fie ei $\mathbf{j}$ și $\mathbf{k}$, cei trei vectori unitari $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sînt perpendiculari doi cîte doi. Spunem că ei formează o *bază ortonormală a spațiului.*

Să alegem un punct *O* și să luăm ca axe de coordonate trei axe, orientate de vectorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ care formează o bază ortonormală. Obținem un *triedru de coordonate tridreptunghic*, în raport cu care orice punct *M* al spațiului este definit prin coordonatele sale x, y, z

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Lungimea vectorului $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ este $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Însă, deoarece $\mathbf{v}$ este în planul orientat de $\mathbf{i}$ și $\mathbf{j}$, el este un vector perpendicular pe $\mathbf{k}$; prin urmare, lungimea lui *OM* este, după teorema lui Pitagora

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

CONSECINȚĂ. *Distanța între două puncte date prin coordonatele lor este:*

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (2)$$

REMARCĂ. Despre dreptele care nu sînt în același plan spunem că sînt *ortogonale* dacă sînt orientate după vectori perpendiculari.

IV. Orientarea spațiilor metrice cu două și trei dimensiuni

a) SPAȚIU CU DOUĂ DIMENSIUNI. Fie $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ o bază ortonormală; o altă bază

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} \\ \mathbf{v} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} \end{cases}$$

are sau nu aceeaşi orientare ca (**i**, **j**) în funcţie de semnul diferenţei $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, care, prin ipoteză, este nenulă (v. cap.3). Deoarece transformarea identică corespunde la $\alpha = \beta' = 1$, $\beta = \alpha' = 0$, orientarea se păstrează pentru $\alpha\beta' - \beta\alpha' > 0$.

Prin urmare, dacă se dă un vector unitar $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ şi cei doi vectori unitari perpendiculari

$$\mathbf{v}_1 = -\beta\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 = +\beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j},$$

baza ortonormală (**u**, $\mathbf{v}_1$) are deci aceeaşi orientare ca (**i**, **j**,) iar (**u**, $\mathbf{v}_2$) are orientare contrară. Vom spune că $\mathbf{v}_1$ *este direct perpendicular pe* **u** *în raport cu* (**i**, **j**).

Studiul făcut în cap.3 demonstrează că dacă (**i'**, **j'**) are aceeaşi orientare ca (**i**, **j**), $\mathbf{v}_1$ este direct perpendicular pe **u** şi în raport cu baza (**i'**, **j'**). (Faptul se poate verifica aici prin calcul.)

b) SPAŢIU CU TREI DIMENSIUNI. Fie dată o bază ortonormală (**i**, **j**, **k**). Pentru a scrie condiţia de ortogonalitate a doi vectori unitari

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k}, \quad \begin{cases} \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}$$

scriem că, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Obţinem astfel $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$.

Să exprimăm că un al treilea vector unitar $\mathbf{w} = \alpha''\mathbf{i} + \beta''\mathbf{j} + \gamma''\mathbf{k}$ este perpendicular pe fiecare din primii doi: adăugăm primelor trei egalităţi:

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0.$$

Deducem din ele

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{\beta''}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{\gamma''}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = \pm 1 = \varepsilon \cdot 1.$$

Baza a doua este identică cu prima dacă

$$\begin{cases} \alpha = 1, & \beta = \gamma = 0 \\ \beta' = 1, & \alpha' = \gamma' = 0 \\ \gamma'' = 1, & \alpha'' = \beta'' = 0. \end{cases}$$

Pentru a obține acest caz, trebuie luat $\varepsilon = +1$; așadar noua bază ortonormală va avea aceeași orientare ca $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dacă luăm

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Expresiile introduse mai sus sînt importante și le vom studia mai îndeaproape în paragraful următor.

§ 2. PRODUSE DE VECTORI ÎN SPAȚIUL CU TREI DIMENSIUNI

În paragraful precedent am pus în evidență, pentru orice pereche de vectori unitari raportați la o bază ortonormală

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k}$$

pe de o parte, numărul

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

care, egalat cu zero, exprimă ortogonalitatea vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$, iar pe de altă parte, un vector unitar $\mathbf{w}$ perpendicular pe planul de orientare definită de perechea $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, și astfel încît baza $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ are aceeași orientare cu $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, vector definit prin

$$\mathbf{w} = (\beta\gamma' - \gamma\beta')\mathbf{i} + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\mathbf{j} + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\mathbf{k}.$$

În geometrie analitică, se întîmplă rar ca vectorii dați să fie unitari. Să considerăm, de aceea, doi vectori oarecare raportați la baza ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$\mathbf{A}$ de lungime a, dat de $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = a\mathbf{u} = a(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})$

$\mathbf{B}$ de lungime b, dat de $\mathbf{B} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = b\mathbf{v} = b(\alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k})$.

Dacă numerele date sînt x, y, z, x', y', z', proiecțiile vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ se calculează cu ajutorul unor radicali care dau pe a și b, conform formulei teoremei lui Pitagora. Vom evita însă asemenea expresii introducînd, pur și simplu,

pe de o parte numărul relativ $p = xx' + yy' + zz'$

pe de altă parte vectorul $\mathbf{Q} \equiv (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - x'y)\mathbf{k}$.

Numărul p se numeşte *produsul scalar* al celor doi vectori şi se notează $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Vectorul $\mathbf{Q}$ se numeşte *produsul vectorial* al vectorilor şi se notează $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ab(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{1}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = xx' + yy' + zz' \tag{2}$$

În particular, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = a^2$.

I. Produs scalar

1) Scris sub forma (2), se vede imediat că produsul scalar este *comutativ*. De reţinut că nu poate fi vorba decît de produsul a *doi* vectori, fiindcă acest produs este un număr; nu este vorba de o operaţie internă. Astfel, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ este produsul dintre $\mathbf{C}$ şi un număr.

2) Pornind de la forma (1), rezultă imediat proprietatea referitoare la înmulţirea cu un număr real m, exprimată prin

$$(m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

3) Produsul scalar este *distributiv în raport cu adunarea* vectorilor, fapt care rezultă din forma biliniară — liniară în x, y, z şi în x', y', z' — a expresiei (2):

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2).$$

De unde, mai general,

$$(\Sigma \mathbf{A}_i) \cdot (\Sigma \mathbf{B}_j) = \Sigma(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_j), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{matrix}$$

4) *Produsul scalar este intrinsec*, adică independent de alegerea bazei, *cu condiţia să se fi ales aceeaşi unitate de lungime pentru toate bazele*.

Am putea demonstra această proprietate esenţială calculînd expresiile lui $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{B}$ după schimbarea bazei. Dar este mai elegant şi mai interesant să deducem acest rezultat din distributivitatea în raport cu adunarea şi din proprietatea care ne-a servit ca punct de plecare: *Ortogonalitatea a doi vectori se exprimă prin faptul că produsul lor scalar este nul.* Remarcăm mai întîi că produsul scalar

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nu se schimbă dacă înlocuim pe $\mathbf{B}$ prin proiecţia lui ortogonală $\mathbf{B}_1$ pe $\mathbf{A}$, fiindcă aceasta revine la a adăuga lui $\mathbf{B}$ un vector perpendicular pe $\mathbf{A}$.

Însă $\mathbf{B}_1 = \frac{b_1}{a}\,\mathbf{A}$, dacă b_1 este măsura algebrică a lui $\mathbf{B}_1$ în raport cu vectorul unitar $\mathbf{u}$ care are sensul lui $\mathbf{A}$.

În felul acesta $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1 = ab_1$.

Prin urmare, *produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre lungimea unuia din ei şi măsura algebrică a proiecţiei ortogonale a celuilalt pe primul vector.*

Rezultă de aici că acest produs este, într-adevăr, independent de baza ortonormală, atît în ceea ce priveşte poziţia cît şi orientarea acesteia, cu condiţia ca unitatea de lungime să fi fost aleasă aceeaşi pentru toate bazele. Se vede uşor că a înmulţi unitatea cu λ conduce la a împărţi pe a şi pe b_1 la acest număr, aşadar, la a împărţi produsul scalar la pătratul acestui număr.

CONSECINŢĂ. *Semnul produsului scalar* indică ordinea $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}'$ sau, din contra, ordinea $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ a vectorilor coplanari $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ şi a vectorului $\mathbf{A}'$ perpendicular pe $\mathbf{A}$ de partea de care este situat $\mathbf{B}$. În paragraful 3 în care vom introduce unghiurile, vom exprima acest fapt prin enunţul:

Unghiul ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) este ascuţit, drept sau obtuz după cum produsul $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ este pozitiv, nul sau negativ.

EXEMPLE DE APLICAŢII

În geometrie analitică, produsul scalar este folosit încontinuu:

1) De exemplu, un *plan* poate fi caracterizat ca fiind mulţimea punctelor M astfel încît, A fiind un punct dat şi $\mathbf{V}$ un vector dat, $\mathbf{AM}$ este ortogonal pe $\mathbf{V}$. Aceasta se va scrie $\mathbf{V} \cdot \mathbf{AM} = 0$.

2) O sferă, definită prin centrul ei şi un punct A, este locul punctelor M astfel încît

$$\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OM} = \mathbf{OA} \cdot \mathbf{OA},$$

adică

$$(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OM}) - (\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OA}) = 0$$

care se poate scrie

$$(\mathbf{OM} - \mathbf{OA}) \cdot (\mathbf{OM} + \mathbf{OA}) = 0$$

pe baza distributivităţii şi a comutativităţii.

Prin urmare, dacă introducem punctul A' definit prin $\mathbf{OA'} = -\mathbf{OA}$, definiţia devine $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{A'M} = 0$, de unde enunţul:

Orice sferă este locul punctelor M astfel încît, A şi A' fiind diametral opuse pe acea sferă, AM şi AM' sînt perpendiculare.

3) Distributivitatea şi comutativitatea arată imediat că pentru orice mulţime de patru puncte A, B, C, D avem

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{DB} + \mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC} = 0$$

(se introduc vectori cu originea A).

În particular, dacă două din aceste produse sînt nule, atunci şi al treilea este nul, de unde, enunţurile:

În plan, cele trei înălţimi ale unui triunghi sînt concurente (cele patru puncte joacă acelaşi rol. Ele formează ceea ce se numeşte un *cvadriunghi ortocentric*).

În spaţiu, dacă două perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sînt perechi de muchii ortogonale, atunci şi muchiile celei de a treia perechi sînt ortogonale (spunem că avem un tetraedru *cu muchii opuse ortogonale*).

După cum vedem, calculul cu produse scalare seamănă cu cel cu numere algebrice, numere care sînt măsuri de vectori în geometrie cu o dimensiune: numai interpretarea depinde de numărul de dimensiuni ale spaţiului în care se operează.

În fizică, dacă unul din vectori este geometric, iar celălalt reprezintă o forţă, produsul scalar măsoară un *lucru mecanic*, de unde — numeroase aplicaţii.

II. Produs vectorial (Geometrie cu trei dimensiuni)

Fie din nou cei doi vectori

$$\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = a\mathbf{u} = a(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})$$

$$\mathbf{B} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = b\mathbf{v} = b(\alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k})$$

şi produsul lor vectorial

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k}$$

$$= ab\mathbf{w} = ab\,[(\beta\gamma' - \gamma\beta')\mathbf{i} + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\mathbf{j} + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\mathbf{k}]$$

În particular, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

1) *Produsul nu este comutativ* $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})$.
Uneori se spune că este *antisimetric*.
În particular,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$
$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Vedem că, pentru a determina produsul vectorial, pe lîngă alegerea unității de lungime, trebuie precizată și orientarea bazei.

2) Oricare ar fi numărul real m, se verifică imediat că

$$(m\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = m(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}).$$

3) *Produsul vectorial este distributiv față de adunarea vectorilor.*
Aceasta rezultă din faptul că cele trei măsuri ale componentelor sînt liniare în x, y, z și în x', y', z'.

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_2),$$

de unde

$$(\Sigma \mathbf{A}_i) \wedge (\Sigma \mathbf{B}_j) = \Sigma(\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{B}_j).$$

În calcule, trebuie să fim însă atenți la necomutativitate. De exemplu,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}).$$

Prin aceasta, calculele capătă un aspect diferit de cele considerate de noi pînă acum.

4) *Produsul vectorial este independent de bază*, cu condiția *să se păstreze unitatea de lungime și orientarea spațiului.*

Folosim o metodă analoagă celei care ne-a reușit la produsul scalar. Datorită distributivității în raport cu adunarea vectorilor și ținînd seama că produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul, *putem înlocui*, *în* $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, *unul din vectori*, de exemplu pe $\mathbf{B}$, *prin proiecția lui ortogonală pe planul perpendicular pe celălalt vector.*

Presupunînd că cei doi vectori $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ nu sînt coliniari, fie $\mathbf{u}$ vectorul unitar care orientează pe $\mathbf{A}$ și $\mathbf{u}'$ vectorul unitar coplanar cu $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ și astfel încît $\mathbf{A} \wedge \mathbf{u}'$ și $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ au același sens. Avem $\mathbf{A} = a\mathbf{u}$ și $\mathbf{B} = b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{u}'$, unde b_2 este pozitiv.

Rezultă $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = ab_2(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}') = ab_2\mathbf{w}$, dacă $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'$.
Această expresie arată clar că produsul vectorial este determinat independent de bază, odată ce s-a ales unitatea de lungime și orientarea spațiului.

Mai mult, să introducem $\mathbf{A}' = a\mathbf{u}'$, și cum $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$, avem $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} = ab_2$. De unde formula importantă

$$\boxed{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{w}}\ .$$

5) Deoarece, odată alese unitatea de lungime și orientarea spațiului, produsul vectorial a doi factori este un vector, putem considera produse de trei, patru, ... n vectori. De exemplu,

$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Însă *produsul vectorial a mai mulți vectori nu este asociativ*. Faptul se vede clar pe exemplul precedent, fiindcă

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Putem considera și *produse mixte* în care una din operații este un produs scalar iar cealaltă un produs vectorial. Astfel,

$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$$
$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Însă o expresie de genul $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$ nu are sens, fiindcă paranteza este un număr.

EXEMPLU DE APLICAȚIE. Produsul vectorial nu este un vector ca oricare altul, fiindcă nu este suficient să se dea o figură, trebuie să fie date, în plus, o unitate de lungime și orientarea spațiului. Un asemenea vector este numit uneori *vector polar*. În fizică el apare sub numele de *vector moment* (al unei forțe, de pildă). În geometrie, el este folosit pentru a caracteriza direcțiile planelor prin direcția sa, și pentru a evalua arii plane prin măsura sa. El formează al 3-lea vector al unei baze ortonormale, cînd primii doi vectori unitari sînt dați.

Fiind dată o dreaptă D definită printr-un punct A și un vector director $\mathbf{u}$, tangenta într-un punct M la cercul de axă D care trece prin $\mathbf{M}$ este orientată de

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{AM}.$$

Dacă M descrie un cerc cu o viteză unghiulară ω, plasăm pe D, alegînd un sens convenabil, un vector $\mathbf{\Omega}$ de măsură ω și viteza lui M este

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{AM}.$$

Această formulă este fundamentală în studiul mișcării unui corp solid.

III. Notația trigonometrică

Geometria tradițională — numită și geometrie „sintetică", în opoziție cu geometria analitică care utilizează un sistem de coordonate — introduce încă de la început, nu numai lungimile ci și unghiurile. Din punct de vedere istoric, faptul se explică, în etapa de început, prin aceea că privirea și gesturile obișnuite ne dau intuiția acestor obiecte, iar mai tîrziu, în stadiul științific, prin nevoile astronomiei și ale geodeziei, discipline în care măsurarea unghiurilor este de importanță primordială.

Din punctul de vedere pe care ne-am plasat noi — cel al spațiului vectorial metric — obiectele care se asociază, în mod firesc, perechilor de vectori și perechilor de direcții, prin intermediul vectorilor lor directori, sînt produsul scalar și cel vectorial. Înainte de a introduce unghiurile în paragraful următor, să extindem la perechile de vectori oarecare definițiile cosinusului și sinusului introduse în § 1, II, *b* pentru vectorii unitari.

Fie doi vectori $\mathbf{A} = a \cdot \mathbf{u}$ și $\mathbf{B} = b \cdot \mathbf{v}$, cu a și b pozitivi și $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ unitari. Introducem, prin definiție:

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ și } \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Introducem vectorul unitar $\mathbf{u}'$ perpendicular pe $\mathbf{u}$ și coplanar cu $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ și scriind $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}'$, avem, prin definiție,

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \quad \text{și} \quad \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \beta.$$

Prin urmare:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ab \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B});$$

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})|, \quad |\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = ab\,|\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$$

și

$$[\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})]^2 + [\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})]^2 = 1$$

dă

$$[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]^2+[|\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}|]^2=a^2b^2.$$

APLICAŢII

1) *Formula fundamentală a triunghiurilor.* Să ridicăm la pătrat (scalar) cei doi membri ai egalităţii vectoriale $\mathbf{BC}=\mathbf{AC}-\mathbf{AB}$. Obţinem

$$BC^2=AC^2+AB^2-2(\mathbf{AC}\cdot\mathbf{AB})$$
$$=AC^2+AB^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos(\mathbf{AC},\mathbf{AB}).$$

2) *Formula fundamentală a triedrelor.* Fie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, vectorii care orientează cele trei muchii ale triedrului, şi $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ vectorii unitari perpendiculari pe $\mathbf{u}$ respectiv în planele $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$. Să facem, membru cu membru, produsul scalar al egalităţilor $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}'$ şi $\mathbf{w}=\alpha'\mathbf{u}+\beta'\mathbf{u}''$.

Obţinem, remarcînd că $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}''=0$.

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\alpha\alpha'+\beta\beta'(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}''),$$

adică

$$\cos(\mathbf{v},\mathbf{w})=\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})\cos(\mathbf{u},\mathbf{w})+\sin(\mathbf{u},\mathbf{v})\sin(\mathbf{u},\mathbf{w})\cos(\mathbf{u}',\mathbf{u}'').$$

Să notăm, aşa cum se obişnuieşte, cu a, b, c feţele şi cu A unghiul plan $(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$; formula se scrie

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A.$$

§ 3. UNGHIURI

Revenim la § 1 şi introducem unghiurile independent de § 2 în care am studiat produsele de vectori.

I. Cosinusul şi sinusul unei perechi ordonate de vectori unitari

Considerăm vectori coplanari cu baza ortonormală $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Fie un vector $\mathbf{u}$ şi vectorul lui direct perpendicular $\mathbf{v}$, definiţi prin

$$\mathbf{u}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j},\quad \mathbf{v}=-\beta\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j} \tag{1}$$

cu $\alpha^2+\beta^2=1$.

Fie $\mathbf{w}$ un vector unitar oarecare, coplanar cu cei precedenți. Ne amintim formula schimbării bazei:

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (\alpha a - \beta b)\mathbf{i} + (\beta a + \alpha b)\mathbf{j} \tag{2}$$

cu $a^2 + b^2 = 1$.

Prin definiție, introducem (ca mai sus)

$$\begin{cases} a = \text{cosinus } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ b = \text{sinus } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{cases}$$

sau, prescurtat

$$\begin{cases} a = \cos (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ b = \sin (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{cases}$$

În particular,

$$\begin{cases} \alpha = \cos (\mathbf{i}, \mathbf{u}) \\ \beta = \sin (\mathbf{i}, \mathbf{u}) \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \alpha a - \beta b = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \\ \beta a + \alpha b = \sin (\mathbf{i}, \mathbf{w}). \end{cases}$$

Sistem fundamental. Formula schimbării bazei dă

$$\begin{cases} \cos(\mathbf{i},\mathbf{w}) = \cos(\mathbf{i},\mathbf{u}) \cos(\mathbf{u},\mathbf{w}) - \sin(\mathbf{i},\mathbf{u}) \sin(\mathbf{u},\mathbf{w}) \\ \sin(\mathbf{i},\mathbf{w}) = \sin(\mathbf{i},\mathbf{u}) \cos(\mathbf{u},\mathbf{w}) - \cos(\mathbf{i},\mathbf{u}) \sin(\mathbf{u},\mathbf{w}) \end{cases} \tag{I}$$

$\forall$ $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ coplanari, unitari.

Prin urmare, dacă planul este orientat, sinusul și cosinusul unei perechi ordonate de vectori unitari sînt perfect determinați. Dacă se schimbă orientarea, cosinusul nu se schimbă, dar sinusul ia valoarea opusă (se schimbă $\mathbf{j}$ în $-\mathbf{j}$).

CONSECINȚE IMEDIATE:

(1) Din (1) obținem

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} \\ \mathbf{j} = \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \end{cases}$$

prin urmare

$$\begin{cases} \cos (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \cos (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \cos (\mathbf{j}, \mathbf{v}) = \sin (\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \sin(\mathbf{u}, \mathbf{j}) \\ \sin (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = -\sin (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \sin (\mathbf{j}, \mathbf{v}) = -\cos (\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{j}) \end{cases}$$

În particular,

$$\begin{cases} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1 \\ \sin(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\mathbf{i}, -\mathbf{i}) = -1 \\ \sin(\mathbf{i}, -\mathbf{i}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0 \\ \sin(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\mathbf{i}, -\mathbf{j}) = -1 \\ \cos(\mathbf{i}, -\mathbf{j}) = 0. \end{cases}$$

(2) Dacă au fost alese două numere a și b care satisfac $a^2 + b^2 = 1$ dar în rest arbitrare, atunci oricărui vector unitar $\mathbf{u}$ îi corespunde, în planul orientat, un vector $\mathbf{w}$ bine determinat și astfel încît $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = a$, $\sin(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = b$ și invers, oricărei perechi de vectori unitari $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, dați în această ordine, îi corespunde perechea (a, b) care satisface $a^2 + b^2 = 1$.

DEFINIȚIE. Vom spune că două perechi $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ care corespund unei aceleiași perechi de numere a, b sînt *congruente*. Aceasta definește, evident, o relație de echivalență între perechile de vectori unitari. O vom extinde acum la perechile de vectori oarecare.

II. Congruența perechilor de vectori. Unghiuri

a) Numim *vector unitar director al unui vector* $\mathbf{V}$, vectorul unitar $\mathbf{v}$ astfel încît $\mathbf{V} = k\mathbf{v}$, unde k este pozitiv. Aceasta înseamnă că $|\mathbf{V}| = k$.

Spunem că o pereche $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ de vectori oarecare este congruentă cu o altă pereche $(\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2')$ dacă perechile lor de vectori unitari directori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ și $(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2')$ sînt congruente. Vom scrie

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \equiv (\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2').$$

În particular, toate perechile formate din doi vectori coliniari sînt congruente între ele.

Toate perechile astfel încît vectorul al doilea este direct perpendicular pe primul vector sînt congruente între ele.

Fiecare clasă de echivalență este caracterizată prin perechea de numere a, b, care sînt respectiv cosinusul și sinusul perechilor de vectori unitari din clasa considerată. Aceste numere vor fi numite cosinusul și sinusul acelei clase, precum și cosinusul și sinusul fiecărei perechi din acea clasă.

Fiecare clasă de echivalență se numește *unghiul perechii ordonate de vectori*. Unghiul perechilor congruente cu $(\mathbf{i}, \mathbf{i})$ se numește *unghi*

nul, iar cel al perechilor congruente cu $(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$ se numește *unghi plat*.

b) **Adunarea unghiurilor.** Vom defini acum între clase o operație internă pe care o vom numi *adunare*.

Fie o clasă reprezentată prin perechea $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ și o alta de reprezentant $(\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2')$.

Plecînd de la un vector unitar, de exemplu $\mathbf{i}$, să definim alți doi vectori, unitari și ei, prin

$$(\mathbf{i}, \mathbf{v}) \equiv (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \quad \text{și} \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2').$$

Sistemul fundamental (I) arată că, oricare ar fi $\mathbf{i}$, perechea $(\mathbf{i}, \mathbf{w})$ este perfect determinată pînă la o echivalență. Ea definește clasa numită *clasa sumă* și scriem

$$(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) + (\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2').$$

În particular, $(\mathbf{i}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ (*Formula lui Chasles*).

Prin urmare, dacă notăm cu C și C' două clase, sistemul (I) se scrie

$$\begin{cases} \cos (C + C') = \cos C \cos C' - \sin C \sin C' \\ \sin (C + C') = \sin C \cos C' + \cos C \sin C' \end{cases} \qquad (I')$$

PROPRIETĂȚI ALE ADUNĂRII

(1) Există un *element neutru*: clasa pe care am numit-o unghi nul.

Fiecărui unghi îi corespunde un *unghi opus*, fiindcă $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + (\mathbf{V}, \mathbf{U}) \equiv (\mathbf{U}, \mathbf{U})$. Unicitatea clasei opuse rezultă din (I'), folosind relațiile

$$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 = 1, \qquad (\cos C')^2 + (\sin C')^2 = 1$$

deoarece

$$\begin{cases} \cos (C + C') = 1 \\ \sin (C + C') = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos C = \cos C' \\ \sin C = -\sin C' \end{cases}$$

Operația verifică axiomele $[A]$ din cap. 1.

$[A_1]$ rezultă din definiție, $[A_4]$ (comutativitatea) rezultă din formulele (I);

$[A_3]$ rezultă imediat din formula lui Chasles:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{w}).$$

$[A_2]$ se deduce din proprietăţile precedente şi din existenţa elementului opus.

Din cele precedente, se deduce *scăderea* — operaţia inversă adunării.

(2) Nu există însă posibilitatea de a stabili o corespondenţă biunivocă între mulţimea claselor şi mulţimea numerelor pozitive şi negative, din cauza următoarei proprietăţi:

Unghiul plat este propriul său opus; într-adevăr,

$$(\mathbf{i},\ -\mathbf{i}) + (-\mathbf{i},\ \mathbf{i}) \equiv (\mathbf{i},\ \mathbf{i}).$$

c) **Măsura unghiurilor.** Vrem să atribuim claselor pe care le-am denumit unghiuri, numere pozitive, negative sau nule, în aşa fel încît sumei a două clase să-i corespundă suma numerelor ataşate celor două clase. Vom reuşi să facem aceasta cu ajutorul următoarei leme:

1) BISECTOAREA UNEI PERECHI DE VECTORI. Fie $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ vectorii daţi. Există o direcţie şi numai una singură (adică un vector unitar $\mathbf{w}$ şi opusul lui, $-\mathbf{w}$, care face unghiuri opuse cu vectorii daţi:

$$(\mathbf{w},\ \mathbf{V}_1) \equiv -(\mathbf{w},\ \mathbf{V}_2)$$

adică, după relaţia lui Chasles, $(\mathbf{V}_1,\ \mathbf{w}) + (\mathbf{V}_2,\ \mathbf{w}) = (\mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2)$.

Dacă $\mathbf{i}$ orientează pe $\mathbf{V}_1$ şi $\mathbf{j}$ este direct perpendicular pe el,

$$\mathbf{V}_2 = |\mathbf{V}_2|\,(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}),\quad \mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

condiţia dă

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} 2x^2 = a + 1 \\ 2xy = b \end{cases}$$

care determină doi vectori opuşi.

Putem deosebi unul, $\mathbf{w}$, din aceşti doi vectori, prin condiţia că x este pozitiv; atunci y, dacă nu este nul, are sigur semnul lui b. Dacă unghiul $(\mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2)$ este nul, acest vector $\mathbf{w}$ se confundă cu $\mathbf{i}$. Numim vectorul $\mathbf{w}$ *vectorul bisector principal* al lui $(\mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2)$.

2) Putem oare atribui fiecărui unghi un număr prin condiţiile că unghiurilor opuse li se atribuie numere opuse, iar sumei unghiurilor i se atribuie un număr sumă?

Unghiului nul, care este elementul neutru al sumei unghiurilor, sîntem obligaţi să-i atribuim numărul 0. Să numim p numărul atribuit unghiului plat; acestui unghi trebuie însă să-i atribuim şi numărul $-p$. Dar atunci unghiului nul trebuie să-i atribuim şi numărul $2p$, aşa că dacă unui unghi oarecare îi atribuim un număr θ, aceluiaşi unghi trebuie să-i atribuim şi numărul $\theta + 2kp$, unde k este un întreg pozitiv sau negativ. Aşadar, *măsurarea unghiurilor nu se poate face decît cel mult pînă la un* $2p$.

Vom lua pe p pozitiv şi vom atribui numărul $+p/2$ unghiului $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ cînd $\mathbf{j}$ este direct perpendicular pe $\mathbf{i}$ în planul orientat.

3) După teorema lui Chasles, este suficient să considerăm vectorii unitari $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ pentru care a şi b sînt pozitivi şi să atribuim perechilor $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ corespunzătoare, numere cuprinse între 0 şi $p/2$.

Împărţim deci în două unghiul drept $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ prin vectorul lui bisector principal, apoi împărţim în două fiecare unghi obţinut şi aşa mai departe, atribuind, în fiecare etapă, unghiurilor congruente astfel obţinute numerele

$$\frac{p}{2}, \frac{p}{2^2}, \frac{p}{2^3}, \ldots$$

Fiecărui unghi dat $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ i se atribuie atunci o valoare, exactă sau aproximativă, de forma

$$\frac{p}{2}\left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \ldots + \frac{n_q}{2^q}\right),$$

unde numărătorii $n_1, n_2, \ldots, n_q$ sînt 0 sau 1, şi invers, unui număr de acest tip îi corespunde un unghi $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$. Dacă acceptăm să luăm întregul q suficient de mare, paranteza se poate apropia de orice număr cuprins între 0 şi 1, cu o aproximaţie oricît de bună vrem: într-adevăr, paranteza este de fapt un număr scris în sistemul de numeraţie cu baza 2, care are partea întreagă egală cu 0 şi q cifre la dreapta virgulei.

În felul acesta, după o trecere la limită $(q \to \infty)$, *atribuim fiecărui unghi considerat un număr* θ *cuprins între* 0 *şi* $p/2$, *şi invers*. Scriem

$$\theta = (\mathbf{j}, \mathbf{u}).$$

Pentru un unghi oarecare, numărul cuprins între $-p$ și $+p$ se numește *determinarea principală*. Celelalte determinări se deduc din ea adăugînd un multiplu oarecare de $2p$. Egalităţile referitoare la unghiuri sînt scrise deci pînă la un $2p$; ele sînt în realitate *congruențe* de modul $2p$ (v. Cartea a II-a, cap.1, § 2).

§ 4. LIMITE REFERITOARE LA FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE. RADIAN. CALCULUL LUI π

I. Unghiuri și coarde

1) Într-o circumferinţă de rază 1, fie baza ortonormală

$$\mathbf{OA} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{OB} = \mathbf{j},$$

apoi

$$(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \varphi, \quad \mathbf{OC} = \mathbf{U} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j},$$

de unde

$$\mathbf{AC} = \mathbf{u} - \mathbf{i} = (a-1)\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 = (a-1)^2 + b^2 = 2(1-a). \end{cases} \tag{I}$$

Să considerăm acum unghiul jumătate

$$\frac{\varphi}{2} = (\mathbf{i}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{OD} = \mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

$\mathbf{V}$ este determinat de

$$\begin{cases} 2x^2 = a + 1 \\ 2xy = b, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} x^2 = 1 - \dfrac{c^2}{4} \\ AD^2 = c'^2 = 2(1-x) = 2\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{c^2}{4}}\right) \\ \qquad = 2\dfrac{1-x^2}{1+x} = \dfrac{c^2}{2(1+x)} < \dfrac{c^2}{2}. \end{cases} \tag{II}$$

Prin urmare, coarda c' care corespunde unghiului jumătate la centru verifică $c' < c/\sqrt{2}$.

Or, unghiului $p/2$ îi corespunde coarda de lungime $\sqrt{2}$; prin urmare, unghiului măsurat de $(p/2)\,(p/2^q)$ îi va corespunde o coardă de lungime mai mică decît $(1/\sqrt{2})^{q-1}$. Aşadar, *cînd unghiul tinde către zero, coarda tinde şi ea către zero în circumferinţa de rază unitate.*

În aceleaşi condiţii, după teorema lui Pitagora

$$(1 - a)^2 + b^2 = c^2,$$

numerele $1 - a = 1 - \cos \varphi$ şi $b = \sin \varphi$ tind şi ele către zero, aşa că

funcţiile $\cos \varphi$ *şi* $\sin \varphi$ *sînt continue în vecinătatea lui* $\varphi = 0$.

Formulele

$$\cos (\theta_0 + \varphi) = \cos \theta_0 \cos \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi$$

$$\sin (\theta_0 + \varphi) = \sin \theta_0 \cos \varphi + \cos \theta_0 \sin \varphi$$

în care facem pe φ să tindă către zero demonstrează *continuitatea funcţiilor* $\cos \theta$ *şi* $\sin \theta$ *pentru toate valorile lui* φ.

2) Pentru a obţine *derivata* funcţiilor cosinus şi sinus în raport cu unghiul, vom împărţi la φ creşterile

$$\cos (\theta_0 + \varphi) - \cos \theta_0 = \frac{\cos \theta_0}{1 + \cos \varphi}(-\sin^2 \varphi) - \sin \theta_0 \sin \varphi$$

$$\sin (\theta_0 + \varphi) - \sin \theta_0 = \frac{\sin \theta_0}{1 + \cos \varphi}(-\sin^2 \varphi) + \cos \theta_0 \sin \varphi.$$

Cînd φ tinde către zero, $\cos \varphi$ tinde către 1, $\sin \varphi$ tinde către 0; problema se reduce deci la a găsi limita lui $(\sin \varphi)/\varphi$. (Admitem aici teoremele despre limite demonstrate în Cartea a III-a.)

Însă în cercul de rază unitate, coarda corespunzătoare unghiului φ care este astfel încît $\cos \varphi = a$ şi $\sin \varphi = b$ are o lungime c care, după formulele (I), verifică

$$c^2 = 2(1 - a) = 2\frac{b^2}{1 + a},$$

prin urmare, $\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{2}{1 + a}}$ care tinde către 1 cînd φ tinde către 0.

În circumferința de rază unitate, raportul dintre coarda corespunzătoare unui unghi care tinde către zero și sinusul acelui unghi tinde către 1.

Prin urmare, limita raportului $(\sin \varphi)/\varphi = b/\varphi$ este aceeași ca cea a raportului c/φ.

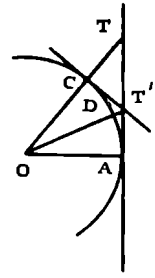
Or, acest raport și limita lui — dacă ea există — depind, evident, de numărul, arbitrar ales de noi și pe care l-am numit p, atribuit unghiului plat, dar nu depinde de unitatea de lungime, fiindcă măsura lui c nu depinde de această unitate.

Vom arăta imediat că limita există și este nenulă. *Vom putea alege atunci pe p în așa fel încît această limită să fie egală cu* 1.

Cu această alegere a lui p, derivata lui $\cos \theta$ *este* $-\sin \theta$ *iar derivata lui* $\sin \theta$ *este* $+\cos \theta$.

II. Limita raportului dintre lungimea c a coradei cercului de rază unitate și măsura φ a unghiului la centru.

Trebuie să reluăm formula (II) $c'^2 = 2(1 - \sqrt{1 - c^2/4})$ și să studiem corespondența pe care o stabilește între unghiurile care sînt, succesiv, unul jumătatea celui precedent și coardele corespunzătoare.



Să completăm figura formată din cele trei raze OA, OC, OD care determină unghiurile $(\mathbf{OA}, \mathbf{OC}) = \varphi$ și $(\mathbf{OA}, \mathbf{OD}) = \varphi/2$ trasînd tangentele în A și în C la circumferință. Ele se intersectează în T' pe prelungirea lui OD. Am notat anterior $AC = c$, $AD = c'$. Să mai notăm, în plus, $AT' = t'$. Compararea oblicelor dă

$$\frac{c}{2} < c' < t' < \frac{t}{2};$$

prin urmare, continuînd împărțirea în două a unghiurilor:

$$c < 2c' < 2^2c'' < \ldots < 2^n c^{(n)} < \ldots < 2^n t^{(n)} < \ldots < 2^2 t'' < 2t' < t.$$

Să împărţim toţi membrii cu $\varphi = 2^n \varphi^{(n)}$

$$\frac{c}{\varphi} < \frac{c'}{\varphi'} < \ldots < \frac{c^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t'}{\varphi'} < \frac{t}{\varphi}.$$

Prin urmare $c^{(n)}/\varphi^{(n)}$ are o limită λ cînd n tinde către infinit (cap.2, § III).

De cine depinde λ? Evident, de numărul p ales drept măsură a unghiului plat. λ nu depinde de unitatea de lungime, fiindcă lucrăm în cercul de rază unitate. În fine, λ nu depinde de unghiul φ ales la început fiindcă c, funcţie continuă de cos φ, este funcţie continuă de φ, aşa că limita λ, care nu este alta decît derivata lui c în raport cu φ pentru $\varphi = 0$, nu poate avea mai multe valori. Aşadar, raportul λ/p este o constantă absolută, un număr bine determinat al geometriei metrice. Îl numim $1/\pi$ aşa că π *este măsura care trebuie atribuită unghiului plat pentru ca limita* λ *a coardei cercului de rază unitate către unghiul la centru, cînd acesta din urmă tinde către zero, să fie egală cu* 1.

Unitatea de unghi astfel determinată se numeşte *radian*. După 2), *cînd unghiul* θ *este exprimat în radiani*, cos θ *şi* sin θ *au ca derivate pe* $-\sin\theta$ *şi respectiv pe* $+\cos\theta$.

III. Calculul aproximativ al numărului π.

Folosim formula (II). Obţinem valori ale lui $c^{(n)}/\varphi^{(n)}$, prin urmare — valori care aproximează prin lipsă numărul π.

CALCUL CARE PLEACĂ DE LA		VALORI APROXIMATIVE ALE LUI π
$\varphi = \frac{\pi}{3}$	$c = 1$	3
$\varphi' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$c' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$3 \cdot 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$\varphi'' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^2}$	$c'' = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$	$3 \cdot 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$
$\varphi''' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^3}$	$c''' = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$	$3 \cdot 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

Legea de succesiune reiese clar.

CALCULUL CARE PLEACĂ DE LA		VALORI APROXIMATIVE ALE LUI π
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$c = \sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
$\varphi' = \frac{\pi}{2^2}$	$c' = \sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\varphi'' = \frac{\pi}{2^3}$	$c'' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
$\varphi''' = \frac{\pi}{2^4}$	$c''' = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	$2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Obţinem astfel

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$
(în total n radicali)

ALT CALCUL AL NUMĂRULUI π

Înainte de a împărţi la $\varphi^{(n)} = \varphi/2^n$, folosim formulele trigonometrice pentru a exprima pe

$$c^{(n)} = 2\sin(\varphi/2^n)$$

$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$	$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}$
$= 2^2\sin\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}$	$\cos\frac{\varphi}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}}$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
$= 2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}$	$\cos\frac{\varphi}{2^n} =$
	$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}}}}$
	(n radicali)

Prin urmare

$$\frac{\varphi(n)}{c(n)} = \frac{\varphi}{2 \cdot 2^n \sin \frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2^2} \ldots \cos \frac{\varphi}{2^n}.$$

Făcînd $\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$, obţinem aşadar

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\ldots} \right.$$

$$\left. \ldots \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\ldots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}} \right],$$

unde produsul are n factori, iar factorul numărul k are k radicali. [După H. Lebesgue, formula aceasta se datorează lui VIÈTE (1540—1603).]

Formulele precedente nu sînt prea adecvate pentru calculul aproximativ al lui π. Fără a insista asura problemei, semnalăm remarcabila formulă a lui WALLIS (1616—1703):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \ldots \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

şi cea a prietenului acestuia, Lord BROUNCKER (1620—1684):

$$\frac{4}{\pi} = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots \cfrac{(2n+1)^2}{2}}}} \right]$$

De remarcat varietatea formulelor de mai sus.

Se ştie că calculatoarele electronice moderne a u permis să se obţină primele zece mii de zecimale ale acestui număr $\pi \simeq 3{,}1415926\ldots$ care nu numai că nu este raţional (LAMBERT, 1761), dar nu este nici algebric (LINDEMANN, 1882). Este deci un număr *transcendent*.

CAPITOLUL 6

ALGEBRA BOOLEANĂ PE MULŢIMI. MĂSURI. PROBABILITĂŢI

Vom relua, mai întîi, şi vom completa cele spuse la început despre operaţiile pe mulţimi; după aceea vom introduce cîteva măsuri care pot fi atribuite mulţimilor.

§ 1. ALGEBRA MULŢIMILOR

Considerăm o mulţime E, pe care o numim *mulţime de referinţă*, şi submulţimile ei A, B, ... Am definit deja *relaţia de incluziune*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow [\forall a,\ a \in A \Longrightarrow a \in B]$$

Incluziunea este strictă, $A \subset B$, dacă unele elemente care aparţin lui B nu aparţin şi lui A. Mulţimea acestor elemente se notează deseori cu $B - A$.

În mulţimea $\mathfrak{P}$ a submulţimilor lui E se introduc trei operaţii interne:

a) *Intersecţia* $A \cap B$ („A intersectat cu B") este mulţimea elementelor care aparţin simultan lui A şi lui B.

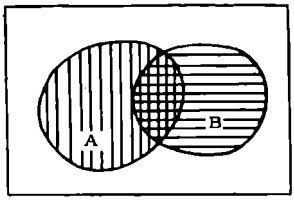
b) *Reuniunea* $A \cup B$ („A reunit cu B") este mulţimea elementelor care aparţin *sau* lui A, *sau* lui B, *sau* ambelor mulţimi (*sau* neexclusiv).

c) *Complementara* $\mathbf{C}A$ este mulţimea elementelor mulţimii E care nu aparţin lui A. Deseori ea se notează cu A'. Putem defini, de asemenea, complementara lui A în raport cu o submulţime B în care A este inclusă ($A \subset B$) ca fiind mulţimea elementelor lui

B care nu sînt în A; ea se notează $\mathbf{C}_B A$, dar nu constituie o operaţie nouă, fiindcă $\mathbf{C}_B A = A' \cap B$.

Pentru ca operaţia de intersecţie să fie totdeauna posibilă, sîntem conduşi să introducem printre mulţimile lui $\mathfrak{L}$, şi mulţmiea vidă $\varnothing$.

De remarcat că trecînd de la un element la o submulţime sau la E şi apoi, în continuare, la $\mathfrak{L}$, se urcă în scara tipurilor (fapt indicat de semnul de apartenenţă $\in$). Din contră, relaţia $\subset$ şi operaţiile $\cap$ şi $\cup$ conservă tipul.



Proprietăţi ale operaţiilor. Exemple simple (mulţimi de obiecte, de puncte) ne conduc la proprietăţi care constituie axiomele teoriei. Aceste proprietăţi *se văd* pe o schemă numită *diagrama lui Euler*: fiecare submulţime este reprezentată prin mulţimea punctelor interioare unei linii închise simple (adică fără puncte multiple) din plan: A este reprezentată de interiorul unei asemenea linii, iar A' de exteriorul ei. $A \cap B$ este partea haşurată dublu iar $A \cup B$ este regiunea care n-a rămas albă. Se vede fără dificultate care sînt regiunile care reprezintă

$$(A \cup B)', \quad \mathbf{C}_A(A \cap B), \quad \mathbf{C}_B(A \cap B).$$

Să luăm ca axiome proprietăţile următoare:

(1) şi (1'): *Idempotenţă*
(2) şi (2'): *Comutativitate*
(3) şi (3'): *Asociativitate*

Intersecţia

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Reuniunea

(1') $A \cup A = A$

(2') $A \cup B = B \cup A$

(3') $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(4) şi (4′): *Dublă distributivitate*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{4}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{4'}$$

Ştim (cap.1) să deducem din aceste formule comutativitatea, asociativitatea, distributivitatea, pentru un număr dat, oarecare de termeni. Însă pînă acum nimic nu deosebeşte una de alta cele două operaţii — reuniunea şi intersecţia; deosebirea apare cînd introducem mulţimea E şi mulţimea vidă prin axiomele: $\forall A \in \mathfrak{A}$

$$A \cup E = E \tag{5}$$

şi

$$A \cap \varnothing = \varnothing. \tag{6}$$

În fine, definiţia complementarităţii este

$$A \cup A' = E \tag{7}$$

cu

$$A \cap A' = \varnothing. \tag{8}$$

Spunem că A şi B sînt *disjuncte* dacă $A \cap B = \varnothing$.

Teoria elaborată pornind de la aceste axiome se numeşte *Algebra booleană* pe mulţimi. Dar nu putem oare demonstra aceste egalităţi? Să studiem, de exemplu, egalitatea (4): primul membru este constituit din elementele lui E care aparţin lui A *şi* lui B sau lui C sau ambelor submulţimi B şi C; dar aceste elemente sînt tocmai cele care aparţin lui A şi lui B, *sau* lui A şi lui C, unde *sau* este neexclusiv. Această demonstraţie presupune că s-a codificat folosirea cuvintelor *şi*, *sau*. Să remarcăm că **sau exclusiv** se traduce prin $(A' \cap B) \cup (A \cap B')$. Adăugînd şi negaţia necesară pentru introducerea complementarei, obţinem logica clasică, aşa că egalităţile scrise nu sînt altceva decît o codificare a acestei logici. Ne dăm atunci seama că există posibilitatea creării unui calcul logic accesibil, de pildă, calculatoarelor electronice.

Demonstrarea unei egalităţi. Prin definiţie, două submulţimi sînt egale dacă au aceleaşi elemente, dar noi trebuie să caracterizăm

egalitatea printr-o condiţie referitoare la operaţiile $\cap$ şi $\cup$. Introducem o axiomă suplimentară, de exemplu

I) $$\boxed{X \cup Y = X \cap Y} \longrightarrow \boxed{X = Y}$$

Remarcă: operaţiile nu sînt simplificabile.

Nici $A \cup X = A \cup Y$, nici $A \cap X = A \cap Y$ nu implică $X = Y$.

FORMULE FUNDAMENTALE (în alte expuneri, aceste formule pot servi drept axiome)

(5′) $A \cap E = A$

fiindcă $\begin{cases} (A \cap E) \cap A = A \cap E \\ (A \cap E) \cup A = (A \cup A) \cap (A \cup E) = A \cap E \end{cases}$ pe baza axiomelor 3), 1), 1′), 5)

(6′) $A \cup \varnothing = A$. Demonstraţie analoagă, folosind 3′), 1′), 1), 5′).

Legea absorbţiei. Fie $X = A \cap (A \cup B)$ şi $Y = A \cup (A \cap B)$. Pe baza relaţiilor 4) şi 1) se obţine:

$$X = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = Y.$$

Or, rezultă imediat:

$$\begin{cases} X \cap A = X \\ Y \cup A = Y \end{cases}, \text{ prin urmare } X = Y = A,$$

De unde, formula

9) $$\forall B,\ A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A.$$

LEGEA COMPLEMENTARITĂŢII

Remarcă preliminară.

(II) $$\begin{cases} X' \cup Y = E \\ X' \cap Y = \varnothing \end{cases} \Longrightarrow \boxed{X = Y}$$

Într-adevăr, (II) permite să se scrie, pe baza relaţiilor (5') şi (6')

$$\begin{cases} X \cup Y = (X \cup Y) \cap (X' \cup Y) = (X \cap Y) \cup Y = Y \\ X \cap Y = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y) = (X \cup Y) \cap Y = Y \end{cases}$$

şi se aplică (I).

Simetria relaţiei de complementaritate.

$$(10) \qquad (A')' = A.$$

Într-adevăr, notînd $(A')' = Y$, obţinem, pe baza relaţiilor (7) şi (8):

$$\begin{cases} A' \cup Y = E \\ A' \cap Y = \varnothing \end{cases} \text{ şi (II) dă } A = Y.$$

Complementara unei reuniuni şi complementara unei intersecţii.

(11) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ Se verifică (II) $\begin{cases} A \cup B = X' \\ A' \cap B' = Y \end{cases}$

(11') $(A \cap B)' = A' \cup B'$ înlocuind în ea

Datorită asociativităţii, obţinem teorema generală:

Complementara unei expresii booleene se obţine înlocuind fiecare submulţime cu complementara ei şi intervertind semnele $\cup$ *şi* $\cap$.

5) FORMA CANONICĂ. Existenţa unei forme canonice unice pentru toate expresiile egale prezintă o importanţă teoretică, fiindcă ea permite să se recunoască dacă două expresii booleene sînt sau nu egale, printr-o operaţie de identificare analoagă celei care este valabilă pentru polinoame.

a) Orice expresie booleană cu n litere $A, B, \ldots, L$ (care pot apare şi prin complementarele lor $A', B', \ldots, L'$) se poate scrie sub forma unei reuniuni de intersecţii, în care fiecare intersecţie conţine toate cele n litere cu sau fără accent; cu o singură excepţie, care priveşte mulţimea vidă $\varnothing$.

De pildă, în cazul a 3 litere, este vorba de reuniunea de termeni $A \cap B \cap C$, $A \cap B' \cap C$, $A \cap B' \cap C'$ etc. (8 termeni posibili).

Să demonstrăm posibilitatea de a scrie orice expresie sub o astfel de formă: eliminăm, mai întîi, toate parantezele accentuate cu ajutorul formulelor de complementaritate, iar după aceea eliminăm parantezele care cuprind reuniuni folosind formula (4). Nu rămîn atunci decît paranteze care cuprind intersecţii şi pe care le vom numi *termenii* reuniunii; expresia reprezintă un *polinom boolean*.

Mai rămîne însă să completăm termenii care nu conţin toate literele: dacă termenul se numeşte T şi dacă litera care trebuie introdusă este K, folosim formula $T = (T \cap K) \cup (T \cap K')$. Expresia este scrisă atunci sub formă canonică.

EXEMPLU. Să se verifice că

$$[(A \cup B) \cap (A' \cup C)] \cup (A \cup B')' =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C').$$

b) Rămîne să demonstrăm că dacă două expresii sînt egale, ele corespund uneia şi aceleiaşi forme canonice. Pentru concizie, dăm o demonstraţie intuitivă folosind diagrama lui Euler: submulţimile $A, B, \ldots, L$ şi complementarele lor determină pe E o partiţie, fiecare din domeniile disjuncte obţinute fiind tocmai reprezentarea unuia din termenii formelor canonice formate cu ajutorul acestor litere. Dacă două expresii sînt egale, ele sînt reprezentate printr-un acelaşi domeniu, şi constituenţii acestuia reprezintă termenii formei canonice.

6) INCLUZIUNEA. $A \subseteq B$ se exprimă prin

$$A \cap B = A \text{ sau prin } A \cup B = B$$

formule care sînt echivalente, conform legii absorbţiei.

EXEMPLU DE APLICAŢIE. Să se demonstreze că dacă $P' = \complement P$

$$\forall P,\ A \cap B \subseteq (A \cap P) \cup (B \cap P').$$

Ştim că această incluziune este echivalentă cu

$$(A \cap B) \cap [(A \cap P) \cup (B \cap P')] = A \cap B;$$

or, cei doi membri au aceeaşi formă canonică

$$(A \cap B \cap P) \cup (A \cap B \cap P').$$

Completînd relaţia cu o incluziune evidentă, concluzionăm

$$\forall P,\ A \cap B \subseteq (A \cap P) \cup (B \cap P') \subseteq A \cup B$$

o incluziune dublă care se dovedeşte deseori foarte utilă.

Teorema unicităţii formei canonice serveşte la explicitarea şi lămurirea unor situaţii exprimate sub o formă complicată, în special, în statistică.

EXEMPLU. O serie de bile, unele albe (mulţimea A), altele de alte culori, sînt, unele de sticlă (mulţimea S), altele din diferite alte materiale. Unele sînt într-un coş (mulţimea C), altele nu. Să explicităm fraza: „să se extragă bilele albe de sticlă dintre cele care au rămas după ce au fost extrase cele albe care nu erau în coş". Traducem: trebuie luat $A \cap S \cap (A \cap C')'$, ceea ce dă, după simplificare, $A \cap S \cap C$. Trebuie deci extrase bilele albe de sticlă care sînt în coş.

Algebra mulţimilor ne va fi deosebit de utilă cînd vom înzestra submulţimile cu o măsură.

§ 2. MĂSURI

I. Definiţii

Spunem că în familia $\mathfrak{F}$ de submulţimi ale lui E, închisă în raport cu intersecţia şi reuniunea s-a introdus o *măsură* dacă:

α) Fiecărei submulţimi i s-a ataşat un număr real pozitiv sau nul.

β) Reuniunii a două submulţimi disjuncte i s-a ataşat un număr egal cu suma numerelor ataşate fiecărui termen al reuniunii. În particular, mulţimii vide i s-a ataşat numărul zero, fiindcă altfel n-ar exista unicitate, deoarece mulţimea vidă este elementul neutru al reuniunii.

Pentru a permite trecerea la limită, punctul β) trebuie extins nu numai la un număr finit de submulţimi, ci şi la o mulţime infinită numărabilă de submulţimi.

Consecinţă. Măsura unei submulţimi (din $\mathfrak{F}$) exprimate sub formă canonică este egală cu suma măsurilor termenilor acestui polinom boolean, fiindcă aceşti termeni sînt mulţimi disjuncte două cîte două. Aceasta permite să se calculeze măsura unei reuniuni; de exemplu, în cazul a doi termeni:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B),$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B') \text{ şi } B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

De unde $\text{măs}\ (A \cup B) = \text{măs}\ A + \text{măs}\ B - \text{măs}\ (A \cap B)$.

Tot astfel găsim

$$\text{măs}\,(A \cup B \cup C) = \text{măs}\,A + \text{măs}\,B + \text{măs}\,C - \text{măs}\,(A \cap B) - \\ - \text{măs}\,(B \cap C) - \text{măs}\,(C \cap A) + \text{măs}\,(A \cap B \cap C).$$

Asemenea formule stau la baza calculului probabilităţilor pe care îl vom introduce în § 3.

Axiomele α) şi β) sînt verificate în numeroase cazuri. Sînt multe şi diferite punctele de vedere din care se atribuie numere unor mulţimi, de unde — diferite tipuri de măsuri. Pe cele mai simple le vom introduce în continuarea acestui paragraf.

Cînd este vorba de mulţimi cu un număr finit de elemente, acest număr este *măsura naturală* a mulţimii: este un întreg natural care, evident satisface cele două axiome. Lucrurile nu mai stau însă aşa cînd se ataşează un număr cardinal unor mulţimi infinite: am pomenit ceva despre mulţimile zise *numărabile*; or, reuniunea a două mulţimi numărabile este şi ea numărabilă, aşa că numărul cardinal nu constituie cu adevărat o măsură. Vom reveni la sfîrşitul Cărţii a II-a asupra acestor chestiuni care sînt fundamentale pentru un studiu cuprinzător al măsurii, fiindcă aceasta interesează mai ales în cazul mulţimilor cu un număr infinit de elemente.

Trebuie să introducem *măsurile geometrice* (sau *naturale*) ataşate submulţimilor celor mai simple ale spaţiului (lungimi, arii, volume), precum şi aşa-numitele (în fizică) *cantităţi* (cantitate de căldură, cantitate de electricitate etc., conţinute într-o regiune), pe care însă noi le vom numi *mase*, indiferent că este sau nu vorba de mase fizice. Primele (măsurile geometrice) sînt atribuite domeniilor înseşi, celelalte se referă, în plus, la o funcţie definită în fiecare element al domeniului şi pe care, în cazurile simple, o vom numi *densitate în fiecare punct* (terminologie în acord cu cuvîntul „masă").

II. Măsură naturală pe dreapta reală

Dreapta reală este mulţimea punctelor M definite, odată alese originea O, sensul pozitiv şi vectorul unitate $\mathbf{u}$, prin

$$x \in R, \quad \mathbf{OM} = x\mathbf{u}.$$

1) Fiecărui *interval* deschis $]a, b[$ îi atașăm numărul

$$\text{măs } (a, b) = |b - a|,$$

iar intervalului închis redus la un singur punct îi atribuim numărul zero, măs $[a, a] = 0$, ceea ce face inutilă precizarea: interval deschis sau închis. Numărul astfel introdus este *lungimea* intervalului.

Pentru familia intervalelor, acest număr verifică, evident, axiomele:

α) *este un număr pozitiv sau nul*:

β) *măsura unei reuniuni de mulțimi disjuncte este suma măsurilor termenilor*. Lucrul acesta trebuie subînțeles nu numai în cazul unui număr finit de termeni, ci și pentru *o infinitate numărabilă de termeni*. Prin urmare, familia $\mathcal{F}$ de submulțimi este aici mulțimea reuniunilor unui număr finit sau numărabil de intervale.

O proprietate esențială a măsurii astfel introduse pentru elementele lui $\mathcal{F}$ este *invarianța la translație* (PROPRIETATEA γ). În plus, o omotetie de raport k multiplică măsura cu $|k|$.

Consecințe. Măsura intervalului (a, ∞) este infinită; *acceptăm să includem* $+\infty$ *în mulțimea măsurilor.*

Măsura unei mulțimi numărabile de puncte este nulă. Nu trebuie însă să se creadă că faptul acesta caracterizează o mulțime numărabilă. Într-adevăr, se poate da un exemplu (mulțimea triadică a lui Cantor) de mulțime de puncte pe intervalul (0,1) care nu este numărabilă și totuși nu conține nici un interval (Cartea a II-a, cap.3, § 1). Așadar, chiar limitîndu-ne la dreapta reală, formularea noțiunii generale de măsură prezintă mari dificultăți. Noi ne vom mărgini să introducem măsura numită *măsură Lebesgue* pentru anumite mulțimi.

2) Folosind faptul că relația de incluziune este o relație de ordine, vom extinde acum familia domeniilor măsurabile prin procedeul următor:

Fiind dată o submulțime A a dreptei reale, fie $\mathcal{H}$ mulțimea submulțimilor H_i, înzestrate deja cu măsuri, care acoperă pe A, și $\mathcal{K}$ mulțimea submulțimilor K_j, înzestrate cu măsuri și incluse în A, adică

$$\forall i,\ \forall j,\ K_j \subseteq A \subseteq H_i$$

Avem

$$\text{măs } K_j < \text{măs } H_i.$$

Dacă A poate avea o măsură, acea măsură trebuie, evident, definită în aşa fel încît

$$\forall i,\ \forall j,\quad \text{măs}\, K_j \leqslant \text{măs}\, A \leqslant \text{măs}\, H_i.$$

Or, noi ştim, pe baza axiomei de completitudine a numerelor reale, că mulţimea numerelor (măs H_i) are o margine inferioară $h = \text{Inf}\,(\text{măs}\, H_i)$ fiindcă această mulţime este minorată de fiecare din numerele (măs K_j); tot astfel, mulţimea numerelor (măs K_j) are o margine superioară $k = \text{Sup}\ (\text{măs}\, K_j)$, cu $k \leqslant h$. *Dacă A este astfel încît $k = h$, atribuim lui A acest număr.* Într-adevăr, conform proprietăţilor limitelor, acest număr satisface, evident, axiomele α) şi β).

În particular, dacă B şi C sînt măsurabile şi C este inclus în B, mulţimea $A = B - C = \complement_B C$ va fi măsurabilă şi va avea măsura

$$\text{măs}\, A = \text{măs}\, B - \text{măs}\, C.$$

III. Măsuri în spaţiul cu două dimensiuni

În raport cu baza $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ şi cu originea O, un punct M este definit prin

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}.$$

A) Măsuri naturale în geometria afină

1) *Paralelogramului* $U\ \{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ i se atribuie numărul 1.

Unui segment $\{a < x < b,\ y = c\}$, sau unuia $\{x = a,\ b < y < c\}$ îi atribuim numărul 0; de aceea, nu va fi nevoie să facem deosebire între paralelograme închise şi deschise. (În cadrul unei axiomatici mai subtile aceasta ar constitui o teoremă.)

Păstrăm axiomele α), β) şi axioma γ) *a invarianţiei la translaţie*. În felul acesta, obţinem măsura *oricărui paralelogram* P_1 *cu laturile paralele cu baza*, $\{a < x < a + q,\ b < y < b + q'\}$, *unde* q *şi* q' *sînt numere raţionale*. Într-adevăr, dacă $q = p/n$ şi $q' = p'/n'$, U conţine n^2 paralelograme mici, iar P_1 conţine pp' asemenea paralelograme care se deduc, toate, unele din altele, prin translaţie, fără a socoti segmentele frontieră de măsură nulă. Prin urmare, măs $P_1 = qq'$.

Pentru a extinde familia domeniilor măsurabile, procedăm aşa cum am făcut în cazul unei dimensiuni: Fiind dată o submulţime A a planului, considerăm mulţimea $\mathcal{H}$ a tuturor reuniunilor H_i de paralelograme P_1 care formează o acoperire a lui A şi

mulțimea $\mathfrak{K}$ a tuturor reuniunilor K_j de paralelograme P_1 disjuncte care sînt incluse în A. Dacă $\text{Inf } H_i = \text{Sup } K_j$, atribuim acest număr lui A. Iată cîteva domenii care, prin acest procedeu, au devenit măsurabile:

a) PARALELOGRAME OARECARE CU LATURILE PARALELE CU BAZA. Fie $P_2\,\{a < x < a + r,\ b < y < b + r'\}$, unde r și r' sînt numere reale pozitive oarecare. Pentru a alege mulțimi H_i și K_j, considerăm valorile raționale aproximative ale lui r și r'

$$s_n = \frac{p_n}{n},\ s'_n = \frac{p_n + 1}{n} \text{ și } t_n = \frac{q_n}{n},\ t'_n = \frac{q_n + 1}{n},$$

determinate pentru orice valoare a lui n prin $s_n \leqslant r < s'_n$, $t_n \leqslant r' < t'_n$, și luăm H_n:

$$\{a < x < a + s'_n,\ b < y < b + t'_n\}$$

și K_n:

$$\{a < x < s_n,\ b < y < t_n\}.$$

Avem

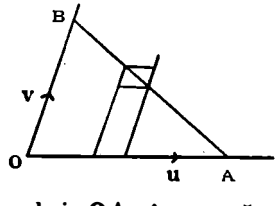
$$\text{măs } H_n - \text{măs } K_n = \frac{(p_n + 1)(q_n + 1)}{s^2} - \frac{p_n q_n}{s^2} =$$

$$= \frac{p_n + q_n + 1}{n^2} < \left(r + r' + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

care tinde către 0 cînd n crește nelimitat; prin urmare P_2 este măsurabil și

$$\text{măs } P = \text{Inf}\,(\text{măs } H_i) = \text{Sup}\,(\text{măs } K_j) = \lim_{n\to\infty}(\text{măs } K_n) = rr'.$$

b) TRIUNGHIURI T_1 CU DOUĂ LATURI PARALELE CU BAZA. Fie triunghiul OAB, cu $\mathbf{OA} = a\mathbf{u}$ și $\mathbf{OB} = b\mathbf{v}$. Latura AB are ecuația $y = -\frac{b}{a}(x - a)$. Vom presupune că a și b sînt pozitivi.



Fiecărui întreg n îi asociem o diviziune a lui $\mathbf{OA}$ în n părți egale de lungime a/n. Fiecare din aceste segmente

$$a - \frac{p}{n}a < x < a - \frac{p-1}{n}a$$

este luat ca bază a 2 paralelograme de tip P_2, dintre care unul are a doua latură de lungime pb/n, iar celălalt — de lungime, $(p-1)b/n$. Reuniunea primelor paralelograme furnizează pe H_n iar reuniunea celorlalte pe K_n. Or,

$$\text{măs } H_n = \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + \ldots + p + \ldots + n) = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{măs } K_n = \frac{ab}{n^2}[1 + 2 + \ldots + (p-1) + \ldots + (n-1)] =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

a căror limită comună, cînd n tinde către infinit, este $ab/2$. Prin urmare

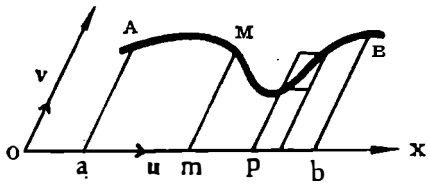
$$\text{Inf}(\text{măs } H_i) = \text{Sup}(\text{măs } K_j) = \frac{ab}{2}.$$

Aceasta este măsura triunghiului.

c) POLIGON OARECARE ŞI, ÎN PARTICULAR, TRIUNGHI OARECARE. Ducînd prin vîrfuri paralele la vectorii bazei, considerăm poligonul reuniune a unui număr finit de triunghiuri T_1; prin urmare el este măsurabil.

Aceste măsuri sînt invariante la translaţie şi se multiplică cu un factor k^2 dacă domeniului i se aplică o omotetie de raport k. Ele nu sînt definite decît relativ la baza aleasă.

d) EXTENSIA LA ALTE DOMENII (punctul de vedere al integralei Riemann). Pornind de la baza aleasă, considerăm *graficul AB al unei funcţii pozitive, continue* pe intervalul (a, b). Ştim că o asemenea funcţie este aproximată în (a, b) prin funcţii în scară: oricare ar fi ε pozitiv arbitrar ales, există un întreg n astfel încît, împărţind intervalul (a, b) în n părţi egale, valoarea lui y în segmentul (x_p, x_{p+1}) rămîne cuprinsă între două valori



h_p şi k_p ale lui y, cu $k_p - h_p < \varepsilon$. În felul acesta, domeniul $D(aABb)$ este aproximat prin reuniuni H_n de paralelograme de măsură $\left(\frac{b-a}{n}\right) h_p$ şi prin reuniuni K_n de paralelograme de

măsuri $\left(\frac{b-a}{n}\right)k_p$. Or, măs H_n — măs $K_n < (b-a)\varepsilon$ tinde către 0 odată cu ε. Prin urmare, Inf (măs H_i) = Sup (măs K_j) și domeniul are o măsură.

Evaluarea acestei măsuri plecînd de la funcția dată $y = f(x)$ presupusă pozitivă.

Pentru a putea utiliza datele care definesc domeniul. acesta trebuie considerat drept o funcție de abscisa b; altfel spus, vom considera domeniul $D(x)$ de bază am, limitat de paralelele aA și mM la vectorul **v**. Am văzut mai sus că $D(x)$ are o măsură $\mu(x)$ și că aceasta verifică, într-o vecinătate a lui x,

$$|\Delta x| \cdot \text{Inf } y < |\Delta\mu(x)| < |\Delta x| \cdot \text{Sup } y,$$

unde marginile Inf y și Sup y sînt luate relativ la intervalul Δx; însă măs $D(x)$ este funcție crescătoare de x, prin urmare, ținînd seama de semne,

$$\text{Inf } y < \frac{\Delta\mu(x)}{\Delta x} < \text{Sup } y.$$

Cînd Δx tinde către 0, primul și al treilea membru tind către $f(x)$; prin urmare, $y(x)$ = măs $D(x)$ *admite o derivată care este* $f(x)$.

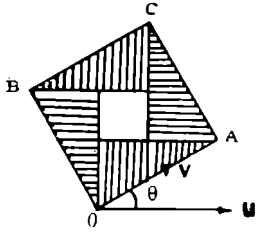
Am demonstrat așadar că o funcție $f(x)$ pozitivă și continuă pe un interval (a, b) este derivata unei funcții $F(x)$; rezultă deci (v. Cartea a III-a, cap.5) că ea este derivata unei infinități de funcții $\Phi(x) = F(x) + C$, unde C este o constantă arbitrară. $\Phi(x)$ se numește *primitiva generală* a lui $f(x)$. $F(x)$ este o *primitivă particulară* obținută alegînd valoarea lui C. Cît despre măs $D(x)$, aceasta este acea primitivă particulară care este nulă pentru $x = a$, ceea ce determină constanta C. Ea este deci $\Phi(x) - \Phi(a) = F(x) - F(a)$; pentru a o desemna, se folosește deseori notația $\mathfrak{L}_a^x f$. (Nu este altceva decît integrala definită a lui Riemann, care, în teoria integralei, se notează $\int_a^x f(t)\,dt$).

Calculul măsurilor introduse se reduce deci la calculul invers calculului derivatelor: calculul primitivelor (sau al integralelor nedefinite, noțiune care corespunde primitivei generale). (Cartea a III-a, cap.6.)

B) Aplicații în geometria metrică

1) **Arii plane.** Măsura precedentă depinde, așa cum am mai spus, de baza spațiului vectorial. Noțiunea de arie, de origine

fizică, este, din contră, intrinsecă. Ea este definită în *spațiul metric* notat R^2. Presupunem deci că s-a ales o *bază ortonormală* și va trebui să demonstrăm că măsura definită mai sus nu depinde de această bază, altfel spus, că *măsura este invariantă cînd domeniului i se aplică o deplasare.*

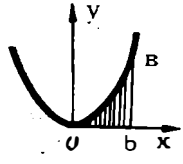


Este suficient să facem demonstrația pentru pătratul de latură unitate, a cărui latură OA face un unghi θ cu $\mathbf{u}$. Am putea face calcule, însă este mai simplu să observăm că paralelele la $\mathbf{u}$ și la $\mathbf{v}$ duse prin vîrfuri descompun pătratul în 4 triunghiuri de măsură $\frac{1}{2}\cos\theta \sin\theta$ și un pătrat de măsură $(\cos\theta - \sin\theta)^2$; prin urmare, măsura pătratului (măsură despre care știm că există) este

$$2\cos\theta \sin\theta + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1.$$

Așadar, măsura definită în spațiul vectorial metric cu două dimensiuni (notat R^2) este aceeași, oricare ar fi baza ortonormală la care s-ar referi, firește — dacă s-a păstrat unitatea de lungime; ea este *aria* domeniului. Orice domeniu poligonal, orice domeniu convex a cărui frontieră este formată dintr-un număr finit de arce care sînt grafice de funcții continue pentru baze convenabil alese, are o arie pe care știm s-o evaluăm dacă știm să calculăm primitivele. (Există firește, și domenii neconvexe care au o arie, dacă ele pot fi definite prin intersecții simple.)

EXEMPLE. Știm să calculăm aria ObB delimitată de *parabola*



$y = ax^2$, fiindcă $\mathfrak{L}_0^x ax^2 = \frac{1}{3} ax^3$. Prin urmare, aria $ObB = \frac{1}{3} Ob \cdot bB$.

Însă pentru *aria cercului*, ar trebui să cunoaştem primitiva generală a funcţiei $\sqrt{R^2 - x^2}$, ceea ce nu este foarte simplu de obţinut. Va trebui deci să revenim la mulţimile H_i şi K_j. Deoarece ştim că aria există, vom lua, de exemplu, drept H_i şi K_j poligoanele regulate circumscrise şi înscrise cu n laturi. Ariile lor sînt respectiv

$$2nR^2 \sin \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}}$$

şi

$$2nR^2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}$$

a căror limită comună este πR^2, fiindcă $\frac{\sin \pi/2n}{\pi/2n} \to 1$ cînd n tinde către $+\infty$.

În felul acesta se pot obţine toate formulele elementare referitoare la ariile plane.

2) **Masa unui segment de dreaptă. Densitate** (luăm masa ca exemplu de *mărime*). Folosind balanţa, fizica măsoară masa tijelor, tije pe care noi le putem asimila cu nişte segmente de dreaptă. Fie un punct x_0 al acestui segment şi o vecinătate V a acestui punct. Cazul de care ne vom ocupa este cel în care raportul (masa lui V)/(lungimea lui V) tinde către o limită $f(x_0)$ cînd lungimea vecinătăţii tinde către 0, unde $f(x)$ este o funcţie pozitivă, continuă de x. Masa segmentului (a, x) este atunci primitiva $\mathfrak{L}_a^x f(x)$; ea este, aşadar, aria domeniului plan limitată de graficul funcţiei $f(x)$. Prin urmare, în cazul considerat, masele ataşate unui domeniu cu o dimensiune sînt arii ale unor domenii cu două dimensiuni. Din cele de mai sus, ne putem da seama încă de pe acum că masa unui domeniu plan relativă la o funcţie densitate $f(x, y)$ va fi interpretată ca un volum.

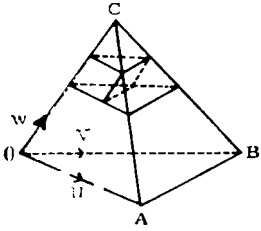
De reţinut însă că fizicianul introduce şi mase (sau măsuri) care nu corespund unor densităţi; astfel, măsura lui Dirac are valoarea 0 pentru orice domeniu care nu cuprinde un punct A, şi valoarea 1 pentru orice domeniu care cuprinde pe A. Aceasta este, şi ea, o măsură, în sensul că acest număr satisface axiomele α) şi β) [dar nu şi axioma γ) a translaţiei!]. Pentru a putea trata matematic

asemenea situații a fost creată teoria distribuțiilor (Laurent SCHWARTZ).

Dacă densitatea are valoarea 1 în orice punct al unui segment, lungimea acestuia apare ca fiind tocmai masa lui.

IV. Măsuri în spațiul cu trei dimensiuni

Folosim un procedeu analog. De data aceasta, atribuim valoarea 0 tuturor domeniilor măsurabile pe care una din coordonate rămîne constantă. În cursul analizei, înlocuim paralelogramele prin paralelipipede. Studiul care, în III, A, *b*) se referea la un



triunghi, se referă acum la un tetraedru ale cărui muchii OA, OB, OC sînt paralele cu vectorii bazei. Pentru a alege domeniile H_n și K_n, este comod să împărțim latura OC de exemplu în n părți egale și să considerăm secțiunile paralele cu OAB duse prin punctele de diviziune, secțiuni care sînt triunghiuri ale căror măsuri plane se deduc prin omotetie din măsura lui OAB.

Suma care trebuie calculată este atunci

$$\text{măs } H_n = \frac{1}{2}\frac{abc}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 + \ldots + n^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{abc}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

expresie care, cînd n tinde către infinit, are ca limită valoarea $\frac{abc}{6}$.

Această măsură a tetraedrului reprezintă *volumul acestuia* dacă, în spațiul metric, baza relativ la care s-a atribuit măsura este ortonormală, și acest volum este invariant la deplasare, așa cum rezultă din expresia lui cu ajutorul unui produs mixt de vectori $\frac{1}{6}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{w}$.

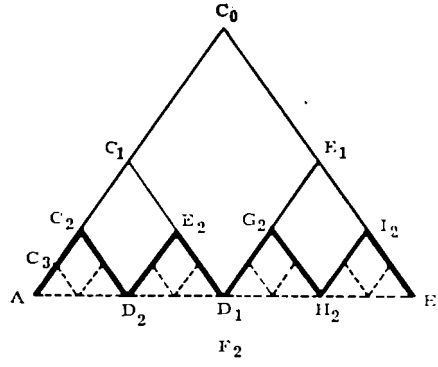
În cazul unui domeniu oarecare, dacă folosim secţiuni paralele cu planul xOy pentru a defini submulţimile H_i şi K_j, şi dacă aceste secţiuni au o arie $\mathcal{A}(z)$ — singurul caz de care ne ocupăm aici — volumul apare ca fiind primitiva $\mathfrak{P}_0^h\mathcal{A}(z)$.

Dacă se consideră prisme care au ca baze vecinătăţi ale punctelor x, y din planul bazei şi ca înălţimi cotele $z(x, y)$ asociate punctelor, volumul apare ca fiind un nou obiect de analiză: este masa unui domeniu plan, funcţia $z(x, y)$ fiind interpretată ca o densitate de suprafaţă. (El este integrala dublă a unei funcţii de două variabile, extinsă la un domeniu plan.)

Masa unui domeniu din spaţiul cu 3 dimensiuni se poate interpreta, în acelaşi spirit, ca fiind măsura unui domeniu din spaţiul cu 4 dimensiuni. (Integrala triplă a unei funcţii de 3 variabile, extinsă la un domeniu din spaţiu.)

V. Lungimile curbelor. Ariile suprafeţelor strîmbe

Această nouă problemă pe care o introduce fizica este mai delicată decît cea precedentă fiindcă, dacă rămînem pe curbă sau pe suprafaţă, nu mai putem folosi translaţia, iar dacă considerăm curbe sau suprafeţe vecine, nu mai putem folosi o relaţie de ordine. În timp ce două domenii punctual vecine aveau arii sau volume vecine, acum lucrurile nu mai stau aşa: *o linie frîntă poate avea toate punctele foarte apropiate de punctele unei alte linii frînte, fără însă ca lor să li se poată atribui aceeaşi lungime* (limita liniilor *frînte* AB din figură, cînd numărul lor de laturi tinde către infinit este, ca poziţie, segmentul AB, dar lungimile lor rămîn egale cu lungimea a lui AC_0B). Aceeaşi dificultate în ceea ce priveşte suprafeţele strîmbe punctual vecine.



Pentru a obține o definiție acceptabilă a lungimii unui arc AB, considerăm toate liniile frînte AB, cu segmente rectilinii, care sînt astfel încît se poate stabili o corespondență biunivocă și bicontinuă între punctele arcului și punctele liniei frînte. Comparăm în aceste puncte direcția laturii liniei frînte și direcția tangentei la curbă. Cînd numărul de laturi ale liniei frînte tinde către infinit, se demonstrează că, *dacă punctele asociate, precum și direcțiile asociate sînt în vecinătăți care tind către zero*, lungimile tuturor liniilor frînte au o aceeași limită; și această limită este adoptată ca *lungime a curbei date*. De reținut că teorema cere nu numai ca curba să admită o tangentă în orice punct, dar și ca această tangentă să varieze continuu ca direcție, cînd punctul descrie curba.

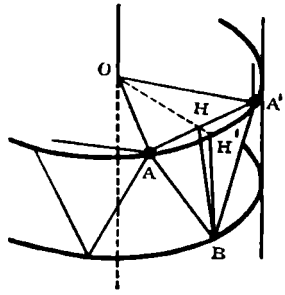
În consecință, pentru a evalua lungimea unei curbe, cum ar fi un arc de circumferință, putem porni de la linii frînte înscrise în curbă, ale căror laturi au lungimi care tind către zero cînd numărul laturilor tinde către infinit; va fi verificată condiția impusă direcției. În cazul circumferinței se folosesc tocmai bazele triunghiurilor cu vîrful în centru care ne-au permis să calculăm suprafața:

$$\text{suprafața} = \text{lungimea} \times \frac{R}{2}.$$

Or, aria este πR^2, prin urmare lungimea este $2\pi R$.

Pentru a defini aria unei suprafețe strîmbe, folosim de asemenea suprafețe vecine care sînt reuniuni de fețe plane. De data aceasta trebuie să impunem, pe lîngă *vecinătatea punctelor asociate* prin corespondență biunivocă, bicontinuă, *vecinătatea direcției planului fiecărei fețe și a direcției planului tangent în punctul asociat*. Teorema referitoare la limită cere ca planul tangent la suprafață să varieze continuu cînd punctul de contact variază pe suprafață. Cînd se caută aria, nu este suficient să se ia o suprafață poliedrală înscrisă ale cărei fețe tind, toate, către zero, fiindcă proprietatea aceasta nu este suficientă pentru a asigura satisfacerea condiției impuse direcțiilor fețelor. Așa se și explică unele paradoxuri cum este următorul:

Fie că se studiează suprafața laterală a unui cilindru de revoluție de înălțime h și rază R. Să considerăm cercurile secțiunilor cu plane paralele cu bazele, care împart înălțimea h în p părți egale. În fiecare circumferință să înscriem un poligon regulat cu n laturi, decalînd însă vîrfurile cu un unghi $\frac{\pi}{n}$ cînd trecem de la un cerc la altul. Aria unui triunghi (de pildă, ABA') este



$$s = \frac{1}{2} AA' \cdot BH = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{h^2}{p^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Aria poligonală este deci

$$S = 2nps = 2R\left(n \sin \frac{\pi}{n}\right) \sqrt{h^2 + 4R^2 \frac{p^2}{n^4}\left(n^4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Cînd n și p tind către infinit, fețele triunghiulare se apropie oricît de mult de suprafață. Totuși, aria S nu are o limită decît dacă p/n^2 are o limită λ, și limita lui S depinde de λ fiindcă

$$\lim S = 2R\pi \sqrt{h^2 + \frac{R^2\pi^4}{4} \lambda^2}.$$

Singurul caz în care planul triunghiului ABA' face cu planul tangent asociat un unghi care tinde către zero este cel în care

$$\frac{HH'}{BH'} \to 0 \quad \text{deci} \quad \frac{2R}{h} \; p \sin^2 \frac{\pi}{2n} \to 0,$$

așadar, cazul în care $p/n^2 \to 0$. În acest caz, se obține $\lim S = 2\pi Rh$, care este rezultatul așteptat.

Considerarea masei unei linii, sau a unei suprafețe, corespunzătoare unei densități liniare sau unei densități superficiale, conduce la considerarea așa-numitelor integrale curbilinii, respectiv a integralelor de suprafață.

Trebuie adăugat că matematicienii și fizicienii operează și cu spații vectoriale cu 4, cu n și chiar cu o infinitate de dimensiuni! Însă *măsura rămîne totdeauna o funcție numerică a cărei variabilă este o submulțime a familiei $\mathfrak{F}$ definite la început.*

§ 3. NOȚIUNI INTRODUCTIVE DE PROBABILITATE

Revenim la rezultatele din algebra mulțimilor (§ 1) și, în particular, la noțiunea de formă canonică. Vom utiliza definiția

generală a măsurii introdusă în § 2, I, precum și formulele referitoare la măsurile intersecțiilor și ale reuniunilor. Toate măsurile introduse sînt intrinsec pozitive.

I. Măsuri pe o mulțime de evenimente

a) EXEMPLU INTRODUCTIV

Petre, Paul și Ion joacă cărți. În fiecare partidă, fiecare trage cîte o carte (roșie sau neagră). În decurs de 50 partide, Petre a tras de 35 ori roșu, Paul de 25 ori și Ion de 28 ori. În 15 partide, Petre și Paul au tras, amîndoi, roșu și în 13 partide, Paul și Ion au tras amîndoi, roșu. Ce se poate spune despre numărul de partide în care toți trei jucătorii au tras cărți de aceeași culoare?

Să notăm A, B, C mulțimile de partide în care respectiv Petre, sau Paul, sau Ion au tras roșu. Datele sînt

$$n = 50, \quad \text{măs } A = 35, \quad \text{măs } B = 25, \quad \text{măs } C = 28.$$
$$\text{măs } (A \cap B) = 15, \quad \text{măs } (B \cap C) = 13.$$

Acestea sînt 6 date independente, ceea ce este insuficient pentru a determina măsurile celor 8 termeni fundamentali ai formei canonice.

Pentru o investigație sistematică, să introducem aceste 8 necunoscute

$$\begin{aligned} x &= \text{măs } (A \cap B \cap C), & z &= \text{măs } (A \cap B \cap C'), \\ t &= \text{măs } (A \cap B' \cap C), & u &= \text{măs } (A' \cap B \cap C) \\ y &= \text{măs } (A' \cap B' \cap C'), & z' &= \text{măs } (A' \cap B' \cap C) \\ t' &= \text{măs } (A' \cap B \cap C'), & u' &= \text{măs } (A \cap B' \cap C') \end{aligned}$$

de unde obținem următoarele 6 ecuații

$$\begin{cases} x + y + z + z' + t + t' + u + u' = 50 \\ x + z = 15, \quad x + u = 13 \\ x + z + t + u' = 35, \quad x + z + t' + u = 25, \quad x + z' + t + u = 28. \end{cases}$$

Pentru a răspunde la întrebarea din enunț, să rezolvăm sistemul luînd ca necunoscute principale pe x și y. Obținem

$$\begin{cases} z = 15 - x & t = 10 + y \\ u = 13 - x & u' = 10 - y \\ t' = x - 3 & z' = 5 - y. \end{cases}$$

Ştim că cele 8 necunoscute sînt independente, şi că singura condiţie pe care trebuie s-o îndeplinească este să fie pozitive. Vedem atunci că x şi y sînt supuse numai restricţiilor exprimate prin inegalităţile

$$3 \leqslant x \leqslant 13, \quad y \leqslant 5.$$

RĂSPUNS. Numărul de partide în care toţi cei trei jucători au tras roşu este cuprins între 3 şi 13; numărul de partide în care toţi trei au tras negru, este cel mult 5.

De remarcat că dacă nu se caută condiţii necesare şi suficiente pentru numerele care rămîn nedeterminate, ci numai unele rezultate parţiale, putem găsi condiţii necesare folosind procedee mai puţin greoaie. De exemplu

$$x = \text{măs}\ (A \cap B \cap C) = \text{măs}\ [(A \cap B) \cap (B \cap C)]$$

intervine în calculul numărului măs $[(A \cap B) \cup (B \cap C)]$ dat prin

$$\text{măs}\ [(A \cap B) \cup (B \cap C)] = 15 + 13 - x = 28 - x.$$

Or, primul membru este, evident, cel mult egal cu măs $B = 25$, de unde

$$28 - x \leqslant 25,$$

adică $x \geqslant 3$.

Tot astfel, dacă remarcăm că $y = \text{măs}\ (A' \cap B' \cap C')$ dă

$$50 - y = \text{măs}\ (A \cup B \cup C),$$

care este cel puţin egal cu măs $(A \cup B)$ şi cu măs $(B \cup C)$, calculăm imediat

$$\text{măs}\ (A \cup B) = \text{măs}\ A + \text{măs}\ B - \text{măs}\ (A \cap B) = 35 + 25 - 15 = 45$$

$$\text{măs}\ (B \cup C) = \text{măs}\ B + \text{măs}\ C - \text{măs}\ (B \cap C) = 25 + 28 - 13 = 40,$$

de unde $50 - y \geqslant 45$, prin urmare $y \leqslant 5$.

Calculul este deci dirijat în funcţie de rezultatul căutat.

Acest studiu stă la baza *calculului frecvenţelor în statistică*.

b) ALTE MĂSURI ATAŞATE MULŢIMILOR FINITE

Urmînd convenţia curentă în probabilitate, notăm acum cu U mulţimea de referinţă (universul discursului). În plus, dacă s-a atribuit fiecărui element cîte un coeficient pozitiv, atunci fiecărei submulţimi îi atribuim un număr egal cu suma coeficienţilor ele-

mentelor care o constituie. Definim astfel o măsură a acestei submulțimi. Se folosește frecvent denumirea de *pondere a unui element* pentru coeficientul care îi este asociat, și cea de *pondere a unei submulțimi* pentru suma ponderilor elementelor sale (cuvîntul „pondere" nu are aici sensul lui din fizică).

II. Probabilități (Cazul mulțimilor finite)

1) EXEMPLE INTRODUCTIVE ȘI DEFINIȚII

EXEMPLUL 1. Mulțimea U este constituită din n bile, unele albe, altele roșii, galbene sau verzi: de unde, 4 submulțimi disjuncte A, R, G, V, cărora le asociem numerele respective de elemente, fie ele a, r, g, v.

$$a + r + g + v = n.$$

Se presupune că bilele nu diferă între ele decît prin culoare. Prin urmare, dacă bilele se află într-o urnă și sînt bine răscolite și amestecate, cînd voi extrage o bilă din urnă luînd-o *la întîmplare*, n-am nici un motiv să mă gîndesc că voi extrage mai curînd o bilă decît o alta. Dar să presupunem, de pildă, că $a = 60$, $r = 20$, $g = v = 10$; atunci este *mai probabil* că voi extrage o bilă albă, decît una de o altă culoare. Convenim să facem un număr mare de extracții punînd de fiecare dată la loc bila extrasă din urnă și amestecînd din nou bine. Ne așteptăm că după 20—30 extracții, numărul de bile albe extrase să depășească foarte net pe cel de bile roșii: această convingere își are, evident, originea în experiență.

Dacă se face efectiv experiența cu un număr mare de extracții, să zicem 100 sau 1000 extracții, se obține un tabel de frecvențe care pune în evidență o *lege statistică*: frecvențele, pentru fiecare culoare, sînt *aproximativ* proporționale cu numerele a, r, g, v de bile din fiecare culoare; și acest rezultat apare cu atît mai net, cu cît numărul de extracții este mai mare. Exprimăm acest fapt spunînd: *probabilitatea de a extrage o bilă albă* este $p_a = a/n$, probabilitatea de a extrage o bilă roșie $p_r = r/n$ etc.

Dacă condițiile de experiență au fost astfel încît rezultatele obținute efectiv diferă de cele descrise mai sus, vom spune că probabilitățile de a extrage o bilă sau alta n-au fost egale (din cauză că, de exemplu, bilele roșii sînt mai aspre la pipăit, sau din cauză că amestecarea bilelor în urnă nu s-a făcut suficient de bine). Aceasta ne face să ne dăm seama că, la drept vorbind, noi n-am raționat asupra mulțimii bilelor, ci asupra mulțimii posi-

bilităţilor de extracţie, pe care le-am presupus echiprobabile. Este ceea ce se numeşte o *mulţime de evenimente echiprobabile.*

DEFINIŢII. Generalizînd, sîntem conduşi la următoarele:

Să numim U mulţimea evenimentelor considerate, presupuse aici în număr finit, şi fie că s-a definit o măsură $m(x)$ asociată mulţimii submulţimilor x. Fracţia $p(x) = m(x)/m(U)$ este şi ea o măsură, fiindcă satisface condiţiile (α) şi (β). Ea se caracterizează prin aceea că satisface în plus şi condiţia:

$$(\pi) \qquad p(U) = 1.$$

O asemenea măsură se numeşte *măsură probabilistică* sau *probabilitate.*

Această definiţie se extinde şi la cazul în care U cuprinde un număr infinit de evenimente.

Vom examina acum cîteva cazuri în care probabilitatea se evaluează fără dificultate.

EXEMPLUL 1. MULŢIME DE EVENIMENTE NEECHIPROBABILE. Am considerat mai sus evenimente care erau echiprobabile şi pe care, în continuare, le vom numi evenimente de primul tip: evenimentul consta în faptul că s-a extras o bilă determinată din bilele existente în urnă. Să presupunem însă acum că ni se cere probabilitatea de a extrage o bilă *care să fie sau albă, sau roşie* din urna descrisă în exemplul (1), adică din urna pentru care $a = 60$, $r = 20$, $g = v = 10$. Vom considera 4 evenimente distincte de cele precedente şi pe care le numim evenimente de tipul al doilea. Ele formează mulţimile:

A: s-a extras o bilă albă. Probabilitate: $p(A) = \frac{60}{100} = 0{,}6$

R: s-a extras o bilă roşie. $p(R) = 0{,}2$

G şi V: s-a extras o bilă galbenă, respectiv, una verde.

$$p(G) = p(V) = 0{,}1.$$

Evenimentul considerat *favorabil* aparţine lui A *sau* R, adică aparţine lui $A \cup R$. Numărînd evenimentele de primul tip, găsim printre ele $60 + 20$ favorabile; prin urmare $p(A \cup R) = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$.

Aşadar, în cazul dat, $p(A \cup R) = p(A) + p(R)$.

Evident, rezultatul este corect, fiindcă o bilă nu poate fi simultan albă şi roşie. Am avut deci

$$A \cap R = \varnothing, \quad p(A \cap R) = 0.$$

EXEMPLUL 2. Pentru a introduce *intersecții nevide*, să presupunem, păstrînd ipotezele precedente, că unele bile sînt de piatră, iar altele din alte materiale: 30 bile sînt de piatră și dintre ele, 10 sînt albe.

Să notăm cu P mulțimea evenimentelor de tipul al doilea: extragerea unei bile de piatră. Obținem, numărînd evenimentele de primul tip:

$$p(A) = 0{,}6; \quad p(P) = 0{,}3; \quad p(A \cap P) = 0{,}1;$$
$$p(A \cup P) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8$$

Formula este $p(A \cup P) = p(A) + p(P) - p(A \cap P)$.

2) FORMULE FUNDAMENTALE

a) COMPATIBILITATE. Spunem că evenimentele care constituie A și B, submulțimi ale lui U, sînt *incompatibile*, dacă $A \cap B = \varnothing$.

Formula $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ traduce atunci *teorema probabilităților totale*.

Dacă, din contră, evenimentele care constituie submulțimile A și B sînt *compatibile*, formula generală este

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Cînd, în particular, $B \subset A$, formula rezultă din $A \cap B = B$ și $A \cup B = A$.

b) PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE (SAU LEGATE); INDEPENDENȚĂ ÎN PROBABILITATE. Să presupunem că

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

Deoarece A și B nu sînt incompatibile, ne putem pune problema: care este probabilitatea ca un eveniment să aparțină lui B cînd se știe dinainte că el aparține lui A? De data aceasta, universul discursului este A, iar mulțimea evenimentelor favorabile este $A \cap B$. Probabilitatea de care este vorba, pe care o vom nota $p_A(B)$, este deci

$$p_A(B) = \frac{\text{măs } (A \cap B)}{\text{măs } (A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Pentru a preciza notațiile, în loc de $p(A)$ vom putea scrie $p_U(A)$, așa că, ținînd seama și de simetria între A și B, formula se scrie

$$p_U(A \cap B) = p_U(A) \cdot p_A(B) = p_U(B) \cdot p_B(A).$$

Să reluăm exemplul 2: probabilitatea ca o bilă albă să fie de piatră este $0{,}1/0{,}6 = 1/6$. Probabilitatea ca o bilă de piatră să fie albă este $0{,}1/0{,}3 = 1/3$.

Spunem că evenimentele care constituie A și B sînt *independente în probabilitate* dacă avem

$$p_U(B) = p_A(B),$$

ceea ce implică

$$p_U(A) = p_B(A).$$

Relația este deci simetrică în A și B. Ea exprimă că există la fel de multe șanse de a avea un element de tip B știind doar că B este inclus în U, și de a avea un element de tip B știind deja că el este de tip A.

În cazul contrar, spunem că există o *legătură în probabilitate* și *coeficientul de influență relativă* este

$$\frac{p_A(B)}{p_U(B)} = \frac{p_B(A)}{p_U(A)}.$$

În cazul nostru, coeficientul acesta este egal cu 5/9.

Definiții analoage se pot da și pentru 3, 4, ... submulțimi.

c) PROBABILITATEA UNUI PRODUS DE MULȚIMI. Fie două mulțimi U_1 și U_2. Amintim că se numește produs direct sau, pur și simplu, *produs* $U_1 \times U_2$ mulțimea U a perechilor ordonate (x_1, x_2), $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Rezultă de aici că o submulțime a lui U nu este, în general, un produs $E_1 \times E_2$, $E_1 \subset U_1$, $E_2 \subset U_2$, fiindcă fiecare element x_1 al lui E_1 ar trebui să fie asociat cu toate elementele lui E_2. Noi însă nu vom considera decît submulțimi care sînt produse. În caz contrar, ar trebui să le putem descompune într-o reuniune de produse disjuncte.

EXEMPLU. O urnă conține 100 bile: 60 albe, 20 roșii, 10 galbene, 10 verzi. O altă urnă conține 80 bile: 40 albe, 30 roșii și 10 galbene. Extragem cîte o bilă din fiecare urnă. Care este probabilitatea de a obține două albe?

Mulțimea U conține $100 \times 80 = 8000$ evenimente. Mulțimea E a evenimentelor favorabile este $E = A_1 \times A_2$, a cărei măsură este

$$60 \times 40 = 2400.$$

Prin urmare

$$p_U(E) = \frac{60 \times 40}{100 \times 80}\ ;\ \text{Or, } p_{U_1}(A_1) = \frac{60}{100} \text{ și } p_{U_2}(A_2) = \frac{40}{80}.$$

Formula este $p_U(A_1 \times A_2) = p_{U1}(A_1) \times p_{U2}(A_2)$.

Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă și una roșie? De data aceasta, mulțimea evenimentelor favorabile este

$$E' = (A_1 \times R_2) \cup (R_1 \times A_2) \text{ cu } (A_1 \times R_2) \cap (R_1 \times A_2) = \varnothing.$$

Prin urmare

$$p(E') = p(A_1 \times R_2) + p(R_1 \times A_2).$$

Din aceste cîteva exemple ne putem face o idee despre modul cum s-ar trata cazurile mai complicate.

Problemele de aplicații necesită însă operații de numărare tipice analizei combinatorii; cîteva asemenea cazuri, dintre cele mai simple, vor fi studiate în Cartea a II-a, cap.1, § 1.

III. Probabilități continue (Cazul mulțimilor infinite)

Teoria măsurii — de exemplu, măsura lungimilor, a ariilor, a volumelor — permite să se atașeze domeniilor niște numere pozitive sau nule, în așa fel încît reuniunii a două domenii disjuncte să-i fie atașată suma măsurilor acestora. Din măsuri se pot deduce probabilități, însă calculul lor nu mai este atît de simplu ca în cazul unui număr finit de elemente și necesită calcul integral (în particular, folosirea funcțiilor primitive a le funcțiilor date). Uneori însă calculul poate fi simplificat considerabil prin considerații de omogenitate și de simetrie; și tocmai asemenea considerații ne vor permite să tratăm, în încheierea acestei introduceri în studiul probabilităților, celebra problemă numită:

PROBLEMA ACULUI LUI BUFFON

Pe un plan orizontal sînt trasate drepte paralele echidistante (distanța d). Se aruncă la întîmplare pe plan un ac de lungime a mai mică decît d. Care este probabilitatea ca acul să taie una din drepte?

Cînd spunem că acul este aruncat la întîmplare, înțelegem că nu există nimic în modul de aruncare a acului care să favorizeze o direcție față de alta. Probabilitatea ca acul să taie o dreaptă nu depinde atunci decît de lungimea a. Să o numim p_a.

1) În loc de ac, să ne imaginăm că aruncăm o linie poligonală L de lungime b (care poate fi mai mare decît d), ale cărei k laturi

au aceeași lungime $a = b/k$. La fiecare aruncare a lui L, *fiecare latură*, considerată separat, taie sau nu taie o dreaptă. Probabilitatea ca o latură dată să taie este p_a; dar la o aceeași aruncare se poate întîmpla ca mai multe laturi să taie dreptele paralele, așa că din faptul că o latură taie o dreaptă, nu știm cum să deducem probabilitatea ca linia poligonală L să taie: mulțimea evenimentelor „ o anumită latură taie" și mulțimea analoagă pentru o altă latură dată nu sînt disjuncte și nu putem proceda prin adunare.

Pentru a depăși dificultatea, să atașăm evenimentelor „aruncarea liniei L" cîte un coeficient pe care-l numim pondere: ponderea unuia dintre aceste evenimente este nulă dacă L nu taie, este un număr m dacă o singură latură a lui L taie, este $2m$ dacă două laturi taie etc.

Ponderile se adună: Ponderea P a mulțimii evenimentelor „aruncări ale liniei L" este suma ponderilor mulțimilor de evenimente „aruncări ale unei laturi date" cînd se consideră succesiv toate laturile. Or, din punctul de vedere al probabilității, toate laturile joacă același rol, așa că, dacă numărul de aruncări este suficient de mare, ponderile mulțimilor de „aruncări ale unei laturi date" trebuie considerate ca fiind egale pentru toate laturile. Fie P_a această pondere, care nu poate depinde decît de a.

Rezultă

$$P = kP_a = \frac{b}{a} P_a.$$

Dar același raționament arată că, pentru fiecare latură, ponderea P_a este proporțională cu lungimea a: într-adevăr, dacă două lungimi a și a' au o parte alicotă comună c astfel încît $a = hc$ și $a' = h'c$, vom avea

$$P_a = hP_c, \quad P_{a'} = h'P_c,$$

prin urmare

$$\frac{P_{a'}}{P_a} = \frac{h'}{h} = \frac{a'}{a}.$$

Dacă a și a' sînt incomensurabile între ele, o trecere la limită duce la concluzia enunțată, căci P_a tinde, evident, către zero cînd a tinde către zero.

Așadar, P_a/a este o constantă λ:

$$P_a = \lambda \cdot a,$$

prin urmare $P = \lambda \cdot b$.

Să evaluăm valoarea λ; pentru aceasta, este suficient să cunoaștem P pentru o valoare cunoscută a lui b. Deoarece ponderea P a liniei poligonale L nu depinde decît de b, și nu depinde în nici un fel de valorile unghiurilor sau de numărul de laturi, această pondere rămîne neschimbată dacă înlocuim L cu o linie curbă de aceeași lungime b și de o formă oarecare. Or, un caz este evident: cel al unei circumferințe de diametru d, fiindcă la fiecare aruncare există atunci două puncte comune; fiecare aruncare are ponderea $2m$ și dacă au fost efectuate N aruncări, ponderea totală va fi $P = 2mN$, pentru o lungime $b = \pi d$. În felul acesta

$$\lambda = \frac{2mN}{\pi d} \text{ și } P_a = \frac{2mN}{\pi} \cdot \frac{a}{d}.$$

2) Ne rămîne să comparăm ponderea P_a cu probabilitatea p_a. Or, evenimentele favorabile „acul taie" au fiecare ponderea m (fiindcă inegalitatea $a < d$ asigură realizarea unei singure intersecții), iar celelalte evenimente au ponderea nulă. Numărul de evenimente favorabile este deci $n = P_a : m$, și probabilitatea este

$$p_a = P_a : mN,$$

de unde concluzia $p_a = 2a/\pi d$.

Se poate face și o verificare experimentală; de exemplu, $a = d/2$ conduce la $p_a = 1/\pi$.

CARTEA A DOUA

ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

PARTEA I

TEORIA NUMERELOR

CAPITOLUL 1

ÎNTREGII

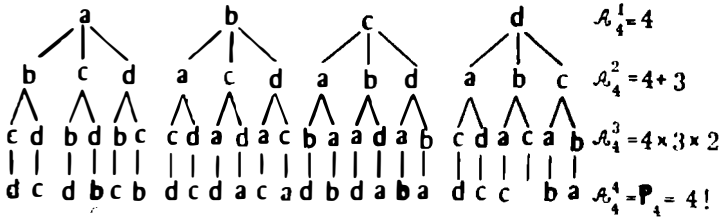
§ 1. NUMĂRĂRI (ANALIZĂ COMBINATORIE)

O mulțime finită de elemente are atașat un număr cardinal n, element al mulțimii N a întregilor naturali. Repartizarea acestor elemente în diferite submulțimi pune probleme de numărare. Este vorba fie de *submulțimi* (definite prin elementele lor), fie de *șiruri* (submulțimi total ordonate). Pentru a ușura numărarea, este comod să se facă scheme, în general — în formă de *arbore*.

1) NUMĂRUL DE ȘIRURI DE p ELEMENTE alese dintre cele n elemente ale unei mulțimi E. Fiecare din aceste șiruri se numește o *aranjare de n elemente luate câte p*. Numărul de asemenea șiruri se notează A_n^p. În particular, dacă $n = p$, fiecare șir se numește o *permutare de n elemente*; numărul de permutări se notează P_n.

O primă abordare a problemei. Cum formăm toate aranjările de n obiecte luate câte p? Alegem un prim obiect: n posibilități; apoi

(1)



Ex $n = 4$

un al doilea element: $(n - 1)$ noi posibilităţi; apoi un al treilea: $(n - 2)$ noi posibilităţi de alegere şi aşa mai departe.

În felul acesta:

(I) şi (II) $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$

$$P_n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

Pe schemă, fiecare lanţ indică o aranjare — dacă îl urmărim pînă la etapa p, şi indică o permutare dacă îl urmărim pînă la capăt.

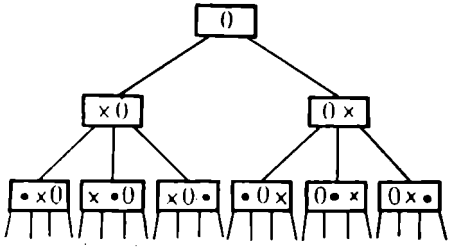
O a doua abordare a permutărilor. Să facem $p = n$, dar să dăm lui n valori succesive. Fiecare permutare de k elemente oferă $(k + 1)$ poziţii pentru elementul următor. Prin urmare, numerele succesive de permutări sînt

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1 \cdot 2, \quad P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$$

aşadar

$$P_{k+1} = P_k(k+1),$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$



2) NUMĂRUL DE SUBMULŢIMI DE p ELEMENTE alese dintre n elemente. Fiecare din aceste submulţimi se numeşte o *combinare* de n elemente luate cîte p. Numărul lor se notează C_n^p sau, uneori, $\binom{n}{p}$.

Fiecare din aceste combinări generează, prin permutarea ei, toate aranjările care cuprind elementele acelei combinări; aceasta înseamnă că mulţimea combinărilor de p elemente este *mulţimea cît* a mulţimii aranjărilor de p elemente prin relaţia de echivalenţă „au aceleaşi elemente", adică prin egalitatea submulţimilor.

Prin urmare, fiecare combinare generează P_p aranjări, şi

$$\text{(III)} \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad (p < n)$$

Alt raţionament. Combinările sînt elementele lui $\mathfrak{P}(E)$, mulţimea părţilor lui E. Să presupunem că am format părţile mulţimii $E_k = \{a, b, \dots, r\}$ cu k elemente. Părţile lui $E_{k+1} = \{a, b, \dots, r, s\}$

se obțin adăugînd mulțimii $\mathfrak{P}(E_k)$, mulțimea Π_k obținută adăugînd elementul s la fiecare din părțile lui $\mathfrak{P}(E_k)$.

Aceasta înseamnă că

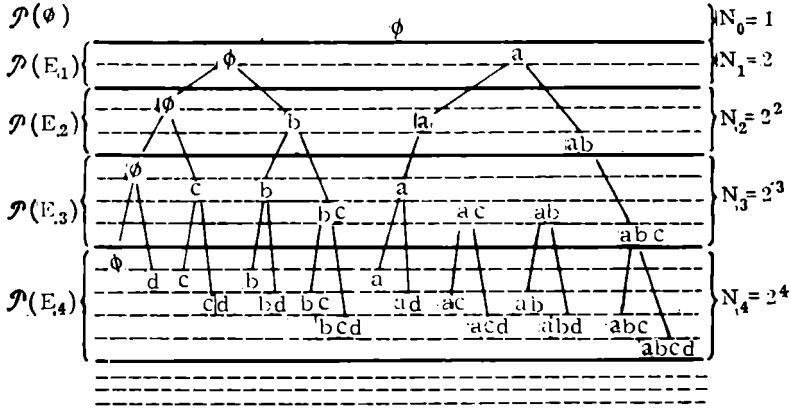
$$\text{card } \mathfrak{P}(E_{k+1}) = 2 \text{ card } \mathfrak{P}(E_k).$$

Or, (numărînd și partea vidă)

$$\text{card } \mathfrak{P}(E_0) = 1, \quad \text{card } \mathfrak{P}(E_1) = 2, \quad \text{card } \mathfrak{P}(E_2) = 2^2;$$

prin urmare:

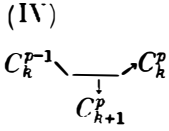
$$\text{card } \mathfrak{P}(E_n) = 2^n.$$

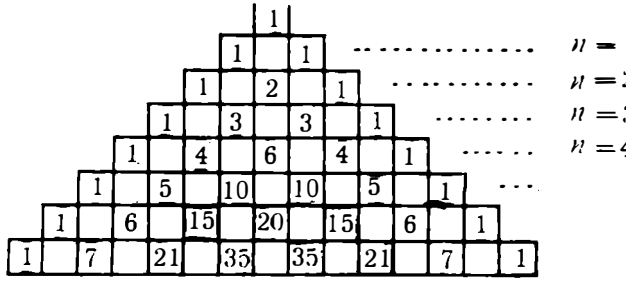


Dar care sînt părțile lui $\mathfrak{P}(E_{k+1})$ care au p elemente? Sînt părțile care aveau p elemente în $\mathfrak{P}(E_k)$ și părțile lui Π_k care aveau $(p-1)$ elemente în $\mathfrak{P}(E_k)$, ceea ce înseamnă că

$$C_{k+1}^{p} = C_k^{p} + C_k^{p-1}$$

(IV)





În felul acesta, formăm rînd cu rînd tabelul numerelor $C_n^p : C_n^0$, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^p, ..., C_n^n. Acest tabel este *triunghiul lui Pascal.* Se verifică uşor că numerele satisfac formula (III), că ele verifică realmente formula (IV), dar nu obţinem şi o nouă demonstraţie a formulei (III).

Să remarcăm următorul rezultat:

$$\text{card } \mathcal{P}(E_n) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^n,$$

adică

(V)

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} + \ldots + n + 1.$$

Vom regăsi imediat pe altă cale această formulă. Deocamdată să reţinem că analiza combinatorie furnizează multe relaţii curioase între numere.

APLICAŢIE: *Formula binomului.* Coeficienţii dezvoltării lui $(x + a)^n$ satisfac formula (IV); într-adevăr, termenul în $a^{k-p}x^{p+1}$ al dezvoltării lui $(x + a)^{k+1}$ are ca coeficient suma coeficienţilor termenilor în $a^{k-p}x^p$ şi $a^{k-p+1}\ x^{p-1}$ din dezvoltarea lui $(x + a)^k$.

Obţinem, în felul acesta

(VI)

$$(x + a)^n = x^n + nax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^q a^q x^{n-q} + \ldots + a^n$$

care este *formula binomului lui Newton.*

Dacă facem $x = a = 1$, regăsim formula (V); folosind şi alte valori numerice, obţinem un întreg ansamblu de formule de acelaşi tip: ele se numesc *formule sumatorii* şi dau sub formă explicită pe $f(n)$, valoarea unei sume de $(n + 1)$ termeni.

EXEMPLU DE PROBLEMĂ. Se cere să se numere *şirurile* de p elemente care conţin exact α elemente a, β elemente b, ..., ρ elemente r din mulţimea $\{a, b, \ldots, r\}$. Evident, $p = \alpha + \beta + \ldots + \rho$.

Mulţimea considerată este cîtul mulţimii permutărilor de p litere prin relaţia de echivalenţă care confundă între ele cele α litere a, cele β litere b, ... Prin urmare, numărul căutat este

$$\frac{P_p}{P_\alpha P_\beta \ldots P_\rho} = \frac{(\alpha + \beta + \ldots + \rho)!}{\alpha!\,\beta! \ldots \rho!}.$$

Numerele de felul acesta sînt coeficienţii termenilor dezvoltării lui $(a + b + \ldots + r)^p$, unde p este un întreg.

§ 2. ÎMPĂRŢIREA EUCLIDIANĂ

În Cartea I (Structuri fundamentale) am introdus noţiunea de număr întreg, pozitiv sau negativ. Din punctul de vedere al adunării, toate aceste numere sînt analoage, dar lucrurile nu stau tot aşa şi din punctul de vedere al înmulţirii. Şi tocmai aceasta este problema de care ne vom ocupa în principal în acest capitol, construit plecînd de la rezultatele Cărţii I, cap.2, § 1.

Am văzut că, fiind daţi doi întregi a, b,

$$0 < b \leqslant a,$$

există un întreg pozitiv q şi numai unul singur definit prin

$$bq \leqslant a < b(q + 1),$$

fapt pe care l-am exprimat spunînd că mulţimea este arhimedeană.

Introducem întregul r definit prin

$$r = a - bq.$$

Sistemul

$$\begin{cases} bq \leqslant a < b(q + 1) \\ r = a - bq \end{cases} \tag{1}$$

asociază fiecărei perechi (a, b) unde $a \geqslant b$, o pereche (q, r). Această operaţie se numeşte *împărţire euclidiană a întregilor*; a este deîmpărţitul, b este împărţitorul, q este cîtul, iar r este restul.

În continuare, vom folosi şi alte sisteme, echivalente cu (1):

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases} \tag{2} \qquad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r \leqslant b - 1 \end{cases} \tag{3}$$

DETERMINAREA CÎTULUI ŞI A RESTULUI. Fie q_1 un întreg astfel încît bq_1 este mai mic decît a. Introducem

$$a - bq_1 = r_1.$$

Dacă r_1 este mai mic decît b, q_1 şi r_1 sînt numerele căutate. Dacă, din contră, $r_1 \geqslant b$, vom spune că am făcut o *împărţire parţială*; q_1 şi r_1 sînt respectiv cîtul parţial şi restul parţial.

Vom folosi aceste două noi numere pentru a continua operaţia, împărţind mereu la b:

$$r_1 = bq_2 + r_2$$

operaţie care este mai simplă decît prima, fiindcă avem acum $r_1 < a$.

Obţinem

$$r_2 < r_1 \quad \text{şi} \quad a = b(q_1 + q_2) + r_2.$$

Dacă r_2 nu este mai mic decît b, continuăm operaţia

$$r_2 = bq_3 + r_3, \quad r_3 < r_2,$$

de unde

$$a = b(q_1 + q_2 + q_3) + r_3 \text{ etc.}$$

Şirul resturilor parţiale $r_1, r_2, r_3, \ldots$ este descrescător, numerele r rămînînd însă întregi pozitivi sau nuli: prin urmare, nu poate exista decît un număr finit de resturi; prin urmare şirul operaţiilor se opreşte. Or, şirul operaţiilor continuă atît timp cît dă un rest mai mare sau egal cu b; prin urmare se obţine, în mod necesar, un rest mai mic decît b.

[Atragem atenţia asupra acestui raţionament cu care ne vom mai întîlni. El se numeşte *coborîrea lui Fermat*, după numele ilustrului matematician (1601—1665) care l-a formulat şi l-a folosit sistematic.]

Prin urmare, dacă r_n este mai mic decît b, obţinem

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n, \quad r = r_n$$

REMARCI. 1) Dacă a şi b sînt întregi de semne oarecare, vom introduce $0 \leqslant r < |\, b \,|$.

2) FOLOSIREA UNUI REST NEGATIV. Este mai sugestiv şi deseori mai practic să scriem

$$76 = 11 \times 7 - 1 \quad \text{decît } 76 = 11 \times 6 + 10,$$
$$75 = 11 \times 7 - 2 \quad \text{decît } 75 = 11 \times 6 + 9.$$

Numim *rest minim în valoare absolută* numărul r' definit prin

$$a = bq' + r' \qquad |\, 2r' \,| \leqslant |\, b \,|.$$

Dacă

$$|\, 2r' \,| = |\, b \,|,$$

există două soluţii, şi atunci luăm $r' > 0$.

Teoremă. *Cîtul împărțirii unui întreg a la produsul de întregi* $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots b_n$ *este ultimul cît obținut împărțind succesiv pe a la* b_1, *împărțind cîtul obținut la* b_2 *etc.*

Într-adevăr, să scriem împărțirile succesive sub forma (3) și să facem combinația liniară care elimină cîturile intermediare, pe de o parte — din egalități, și pe de altă parte — din inegalități; pentru a fixa ideile, să presupunem $n = 3$.

Obținem:

$$\begin{cases} a = (b_1b_2b_3)q_3 + (r_1 + b_1r_2 + b_1b_2r_3) \\ 0 \leqslant r_1 + b_1r_2 + b_1b_2r_3 \leqslant (b_1 - 1) + b_1(b_2 - 1) + \\ \qquad + b_1b_2(b_3 - 1) \leqslant b_1b_2b_3 \end{cases}$$

Prin urmare q_3 este cîtul împărțirii lui a la $b_1b_2b_3$ și restul este

$$r = r_1 + b_1r_2 + b_1b_2r_3.$$

Se vede ușor că sistemul (2) nu ne-ar fi permis să ajungem la această concluzie; ar fi trebuit să punem în evidență că, de pildă din $r_1 < b_1$, se deduce că diferența $b_1 - r_1$ este cel puțin egală cu 1.

CAZ PARTICULAR. Dacă restul împărțirii lui a la b este nul, spunem că a este un *multiplu* al lui b, sau că a este *divizibil cu* b, sau că b *divide pe* a, sau că b este *un divizor al lui* a, ceea ce înseamnă că

$$\exists q,\ a = bq.$$

În scris exprimăm aceasta prin simbolul $b \mid a$, care se citește *b divide pe a.*

Notăm că noțiunea va putea fi generalizată la cazul în care a și b aparțin unor mulțimi oarecare, păstrînd însă condiția că q *este întreg.*

§ 3. DIVIZIBILITATEA. CONGRUENȚELE DE ÎNTREGI.

Divizibilitatea este studiul resturilor împărțirilor, făcînd abstracție de cîturi. Fie un divizor întreg pozitiv, ales o dată pentru totdeauna. Împărțind la d toți întregii succesivi, regăsim periodic aceleași resturi: dacă începem un nou rînd după fiecare d numere succesive, atunci primul rînd este rîndul resturilor $0, 1, 2, \ldots, d-1$, iar numerele de pe o aceeași coloană corespund unui același rest. În felul acesta, mulțimea E a numerelor întregi este repartizată în d clase prin *relația de echivalență*: „dă același rest la împărțirea cu d". (Se vede imediat că această relație este, într-adevăr, refle-

xivă, simetrică şi tranzitivă.) Fiecare clasă de echivalenţă se numeşte *clasă de resturi*, iar relaţia de echivalenţă se numeşte *congruenţă de modul d*. (Se mai spune şi *modulo d*). Această relaţie se scrie

$$a \equiv b(\text{mod } d)$$

şi se citeşte „a congruent cu b, modulo d".

Exemplu: $d = 4$

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$4q$	$4q+1$	$4q+2$	$4q+3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Aşadar, prin definiţie, aceasta înseamnă că a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu d

$$\exists r,\ q,\ q' : a = dq + r,\quad b = dq' + r,\quad 0 \leqslant r < d.$$

Dacă însă nu dăm atenţie valorii concrete a restului comun, vom folosi următoarele echivalenţe logice

$$a \equiv b\ (\text{mod } d) \iff \exists q,\ a - b = dq \iff a - b \equiv 0(\text{mod } d).$$

Congruenţe. În cele ce urmează, d va rămîne pozitiv, dar este comod să acceptăm ca deîmpărţituri şi resturi numere întregi de semne oarecare; proprietăţile la care vom ajunge vor rămîne valabile în toate cazurile. În loc de a introduce restul — număr cuprins între 0 şi $d - 1$ — este atunci deseori indicat să introducem, pentru a reprezenta fiecare clasă de resturi, numărul cel mai mic în valoare absolută: conform unei remarci anterioare, acest număr va fi:

dacă d este par, $d = 2d'$, un număr din şirul

$$-d' + 1,\ -d' + 2, \ldots, -2,\ -1,\ 0, 1, 2, \ldots, d' - 1,\ d';$$

dacă d este impar, $d = 2d' + 1$, un număr din şirul

$$-d', -d' + 1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +d'.$$

Proprietăți ale congruențelor. Fie d modulul ales.

TEOREMA 1 $a \equiv b \pmod{d} \iff \forall m : a + m \equiv b + m \pmod{d}$.

TEOREMA 2 $a \equiv b \pmod{d} \iff \forall m : \quad am \equiv bm \pmod{d}$.

(Demonstrațiile sînt imediate, dacă introducem q prin $a - b = dq$ și folosim proprietățile corespunzătoare ale egalităților.)

TEOREMA 3 $[a \equiv b \pmod{d}$ și $a' \equiv b' \pmod{d}] \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow a + a' \equiv b + b' \pmod{d}.$$

TEOREMA 4 $[a \equiv b \pmod{d}$ și $a' \equiv b' \pmod{d}] \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow aa' \equiv bb' \pmod{d}.$$

Aceste teoreme ne permit să considerăm suma și produsul unei clase de resturi cu un întreg (operații externe pentru mulțimea claselor), precum și suma și produsul a două clase (operații interne). Fiecare din aceste două ultime operații este comutativă, iar produsul este distributiv față de sumă; aceasta înseamnă că mulțimea claselor de resturi de modul dat are o structură de *inel comutativ*. Elementul neutru al adunării este clasa care conține pe 0, iar elementul neutru al înmulțirii este clasa care conține pe $+1$.

Însă acest inel diferă profund de inelul întregilor: în primul rînd, el nu conține decît un număr finit de elemente. Pe de altă parte, clasa nulă poate avea divizori nenuli; exemplu:

$5 \not\equiv 0 \pmod{10}$ și $8 \not\equiv 0 \pmod{10}$, dar $5 \times 8 = 40 \equiv 0 \pmod{10}$.

Vom vedea mai departe că această dificultate dispare în cazul în care modulul este un număr prim, de unde importanța acestor numere.

Reciproce ale teoremei 2. Să scriem în detaliu demonstrația teoremei 2.

$$a \equiv b \pmod{d} \iff \exists q : a - b = dq$$

$$\iff \exists q : ma - mb = mdq = d(mq) = (dm)q.$$

De aici deducem

$$ma \equiv mb \pmod{d} \tag{2}$$

dar și

$$ma \equiv mb \pmod{md} \tag{2'}$$

Reciproc, din (2') deducem

$$\exists q : ma - mb = mdq, \text{ prin urmare } \exists q : a - b = dq$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{d},$$

de unde

TEOREMA 2′

$$a \equiv b \pmod{d} \iff ma \equiv mb \pmod{md}$$

(se schimbă modulul).

Însă din (2), nu se poate deduce nimic relativ la $a - b$ modulo md. *Membrii unei congruenţe nu pot fi împărţiţi cu unul din divizorii lor comuni, păstrînd modulul.* Simplificarea congruenţelor nu este permisă. Exemplu:

$$48 \equiv 18 \pmod{15},$$

însă, dacă împărţim la 3,

$$16 \not\equiv 6 \pmod{15}.$$

TEOREMA 2″

$$a \equiv b \pmod{md} \Longrightarrow a \equiv b \pmod{d},$$

dar reciproca nu este adevărată.

Această teoremă, deşi foarte simplă, este foarte importantă şi este enunţată deseori sub forma

$$a \not\equiv b \pmod{d} \Longrightarrow a \not\equiv b \pmod{md}.$$

Clase de resturi nule

Să facem $b \equiv 0$ în formulele (2) şi (2″).

TEOREMA 2*bis*

$$a \equiv 0 \pmod{d} \Longrightarrow ma \equiv 0 \pmod{d}.$$

adică

$$d \mid a \Longrightarrow d \mid ma$$

sau

$$[d \mid a \quad \text{şi} \quad a \mid a'] \Longrightarrow d \mid a'.$$

TEOREMA 2*terţ*

$$a \equiv 0 \pmod{md} \Longrightarrow a \equiv 0 \pmod{d},$$

adică

$$md \mid a \Longrightarrow d \mid a$$

sau

$$[d \mid d' \quad \text{şi} \quad d' \mid a] \Longrightarrow d \mid a.$$

Aceasta exprimă *tranzitivitatea* relaţiei „este divizor al lui" şi a relaţiei „este multiplu al lui", care sînt *relaţii de ordine* inverse una celeilalte.

Fie $\mathcal{A}$ clasa de resturi nulă de modul a, adică mulțimea multiplilor lui a.

$$a' \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow a' \equiv 0 (\text{mod } a) \Longleftrightarrow a \mid a'$$

și, în mod analog, $\mathcal{D}$ clasa de resturi nulă de modul d. Teorema poate fi scrisă

$$a \in \mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$$

sau

$$d \mid a \Longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{D}.$$

Or, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ implică, în particular, $d \mid a$.

Obținem, în final

$$d \mid a \Longleftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{D}.$$

Există deci un izomorfism între relația „este multiplu al lui" și relația de ordine prin incluziune a claselor de resturi nule. Este însă vorba de ordini parțiale; în general, două clase nule nu sînt comparabile, fiindcă nici una din ele nu este inclusă în cealaltă. Tot astfel, relația „este divizor al lui" este o relație de ordine parțială în mulțimea întregilor; ea nu va permite scheme liniare, așa cum vom vedea în cele ce urmează.

§ 4. MULTIPLI ȘI DIVIZORI. NUMERE PRIME

I. Multipli și divizori ai unui întreg

A) Multiplii unui număr întreg

Multiplii unui întreg a sînt numerele $m = aq$, unde q este un întreg. Dacă $q = 1$, $m = a$: orice întreg este propriul său multiplu.

Dacă $q = 0$, $m = 0$: 0 este multiplu oricărui număr.

Deseori se spune că m este un *multiplu adevărat* al lui a dacă nu este nici nul, nici egal cu a.

Vom presupune, în general, q pozitiv și nenul.

1) LISTA MULTIPLILOR LUI a, întreg pozitiv. Lista multiplilor este un șir ordonat, izomorf cu șirul întregilor: a, $2a$, $3a$, ..., ka, ..., completat prin simetrie, dacă se consideră și multiplii negativi. Vom numi $\mathcal{A}$ această mulțime. Ea are următoarea proprietate:

Dacă a_1 și a_2 sînt două elemente ale mulțimii, orice număr

$$\alpha = x_1 a_1 + x_2 a_2, \quad x_1 \text{ și } x_2 \text{ întregi}$$

aparţine şi el mulţimii. Această proprietate caracterizează un *ideal* pe inelul întregilor. Într-adevăr, se numeşte *ideal al unui inel* A o submulţime $\mathcal{J}$ care, pe de o parte este ea însăşi un inel (adică suma şi produsul a două elemente ale lui $\mathcal{J}$ aparţin lui $\mathcal{J}$) şi care, în plus, este stabilă la înmulţirea cu un element oarecare al lui A (adică produsul unui element din $\mathcal{J}$ cu un număr oarecare din A face şi el parte din $\mathcal{J}$):

1) $\forall i_1, i_2 \in \mathcal{J}$, $i_1 + i_2 \in \mathcal{J}$ şi $i_1 \times i_2 \in \mathcal{J}$.

2) $\forall i \in \mathcal{J}$ şi $\forall a \in A$, $i \times a \in \mathcal{J}$.

Deoarece, în cazul de faţă, idealul este format din multiplii unui singur număr a, el se numeşte *ideal principal*. Vom reveni, mai tîrziu, asupra acestei noţiuni pe care o vom regăsi în inelul polinoamelor.

2) *Din punctul de vedere al relaţiei de ordine „este divizor al lui"*, structura lui $\mathcal{A}$ nu este chiar atît de simplă. Să facem, de exemplu, tabelul multiplilor lui 4 pînă la $4 \times 25 = 100$. Comutativitatea produsului pune în evidenţă lanţuri de tipul 4 | 8 | 24 sau 4 | 12 | 24.

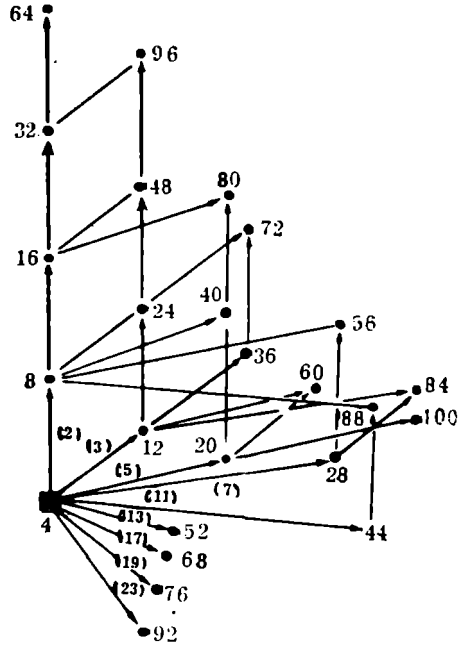
Vom conveni să reprezentăm prin translaţii în spaţiu fiecare operaţie „înmulţit cu 2", „înmulţit cu 3" etc. Asociativităţii produsului îi corespunde asociativitatea translaţiilor, aşa că este inutil să considerăm translaţia care reprezintă, de exemplu, înmulţirea cu 6, produsul 2×3. Multiplicatorii primordiali sînt deci cei care nu au divizori (diferiţi de 1 sau ei înşişi). Îi numim *numere prime*.

În exemplul ales, factorul 11 este indispensabil pentru a forma multiplii 44 şi 88, dar structura schemei nu va fi elucidată decît dacă vom preciza lanţurile care duc la un multiplu oarecare a, în cazul general. Aceasta va rezulta ca o consecinţă a studiului numerelor prime.

B) **Divizorii unui întreg**

Fie a un întreg pozitiv; să considerăm divizorii lui pozitivi. Cel mai mic este 1, iar cel mai mare este însuşi numărul a. Ceilalţi divizori, dacă mai există, se numesc „divizori adevăraţi"; numărul lor este finit.

1) *Lista divizorilor*. Deoarece căutăm o submulţime finită a mulţimii bine ordonate a numerelor mai mici decît a, este suficient



să încercăm succesiv numerele luate în ordinea lor naturală: 2, 3, ... Dar fiecare divizor d este asociat cu un alt divizor d' prin $a = dd'$, așa că dacă obținem numerele d în ordine crescătoare, asociații lor d' se succed în ordine descrescătoare. Prin urmare, lista este completă în momentul în care numărul încercat devine mai mare decît cîtul împărțirii făcute pentru a efectua încercarea.

Se remarcă ușor că numărul divizorilor este în general par; el este impar dacă a este pătratul unui întreg.

Exemple:

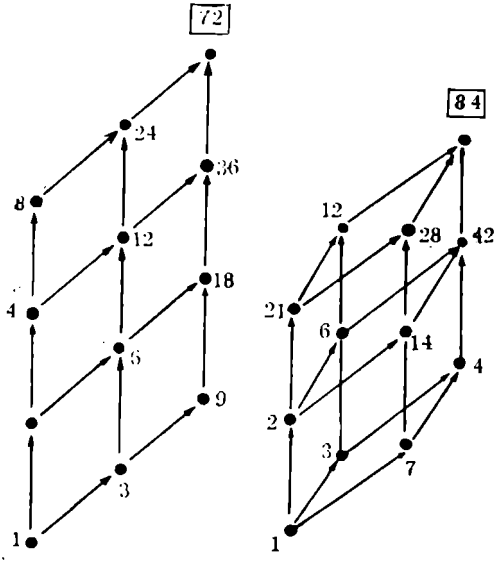
$72 = 1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$

$84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12.$

2) *Din punctul de vedere al relației de ordine „este divizor al lui"*, să examinăm structura pe cele două scheme corespunzătoare numerelor 72 și 84. Vedem că din 1 pleacă lanțuri de multipli care ajung la numărul dat. Oricare două numere din schemă au cel

puţin un multiplu comun şi cel puţin un divizor comun. Ştim că aceasta corespunde unei relaţii de ordine prin incluziune în mulţimea multiplilor fiecărui număr. Spunem că mulţimea are o *structură de reţea* şi vom nota $\mathfrak{S}_a$ reţeaua divizorilor lui a. Am reprezentat, aşadar, $\mathfrak{S}_{72}$ şi $\mathfrak{S}_{84}$.

În cazul general, toate numerele situate deasupra lui 1 fără intermediari sînt numere prime (după teorema 2 *bis* a congruenţe-



lor). Prin urmare, *orice număr are cel puţin un divizor prim* (pe el însuşi, dacă numărul este prim). Dar se poate spune mai mult:

Orice număr este un produs de factori primi.

Într-adevăr, dacă a este prim, avem $a = 1 \cdot a$, Dacă a nu este prim, folosim o descompunere oarecare în produs a lui a, apoi descompunem în mod analog fiecare factor neprim (datorită asociativităţii produsului). Deoarece numărul divizorilor diferiţi de 1 este finit şi deoarece factorii nu pot interveni decît de un număr finit de ori, operaţia de descompunere se termină, şi ea se termină cînd toţi factorii produsului sînt primi.

Pe schemele noastre, aceasta înseamnă că nu luăm în considerare decît translaţiile care corespund la factori primi şi că lanţurile conduc (totuşi!) la numărul a dat.

Dar oare toate aceste lanţuri care merg de la numărul 1 la un număr a nu diferă între ele decît prin ordinea translaţiilor? În cele două exemple considerate — da; dar faptul acesta trebuie analizat în cazul general.

În felul acesta, cele două studii preliminare asupra multiplilor şi divizorilor unui număr ne arată că este obligatoriu să studiem numerele prime.

II. Teoremă fundamentală

Unicitatea descompunerii unui întreg într-un produs de factori primi.

În mulţimea întregilor, să considerăm submulţimea $\mathfrak{M}$ constituită din întregii care au mai mult de o descompunere în factori primi: vrem să arătăm că această submulţime este vidă.

$\mathfrak{M}$ este minorată de 1, precum şi de toţi întregii primi care au fost studiaţi direct, prin urmare, datorită proprietăţii de ordine a mulţimii întregilor, $\mathfrak{M}$ (dacă nu este vidă) are un element minim, $m > 1$, cu (cel puţin) două descompuneri pe care le notăm

$$m = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} = s^{\beta} s_1^{\beta_1} \dots s_k^{\beta_k},$$

unde numerele p_i şi s_j sînt toate diferite (fiindcă altfel, după simplificare, proprietatea ar fi adevărată pentru un număr mai mic decît m).

Să considerăm, în particular, cîte un factor prim din fiecare membru, de pildă, factorii p şi s; egalitatea se scrie

$$m = pP = sS,$$

unde P şi S conţin ceilalţi factori primi.

Deoarece p şi s nu sînt egali, fie de exemplu $p > s$; putem face împărţirea

$$p = sq + r, \quad r < s, \quad r \neq 0$$

fiindcă p este prim.

Prin urmare,

$$m' = m - sqP$$

are două descompuneri

$$m' = s(S - qP) = rP < m.$$

Dar numărul prim s care figurează în prima descompunere a lui m' nu figurează şi în cea de a doua descompunere: el nu figurează în descompunerea lui P prin ipoteză, şi nu figurează în descompunerea lui r din cauză că $r < s$. Prin urmare, m' este mai mic decît m şi are totuşi două descompuneri: s-a ajuns la o contradicţie. Prin urmare $\mathfrak{M}$ este vidă.

Pe scurt, arătăm că oricărui element din $\mathfrak{M}$ îi putem asocia un alt element din $\mathfrak{M}$ mai mic decît el, ceea ce contravine structurii unei mulţimi de întregi. Recunoaştem raţionamentul numit mai înainte *coborîrea lui Fermat*; sub o formă sau alta, acesta, împreună cu raţionamentul prin recurenţă, este raţionamentul prin excelenţă al teoriei numerelor.

III. Aplicaţii. Multipli şi divizori comuni

1) Structura idealului principal $\mathfrak{A}$ şi cea a reţelei $\mathfrak{T}_a$ sînt complet elucidate: pe schemele noastre, singurele translaţii care trebuie marcate sînt cele asociate numerelor prime, iar diferitele lanţuri care leagă două numere nu diferă între ele decît prin ordinea de succesiune a acestor translaţii.

2) MULTIPLI COMUNI MAI MULTOR NUMERE. Fie $a, b, \ldots, v$ un număr finit de întregi. Multiplii lor comuni formează intersecţia mulţimilor multiplilor respectivi $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \cap \ldots \cap \mathfrak{V}$. Or, descompunerea în factori primi a acestor multipli comuni se obţine luînd *cel puţin* toţi factorii primi care figurează în *cel puţin una* din descompuneri, cu exponenţii *cel puţin* egali cu cei care figurează în aceste descompuneri. Rezultă de aici că mulţimea considerată este mulţimea multiplilor celui mai mic multiplu comun. Prin urmare, *intersecţia idealelor principale* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{V}$ *este idealul principal* $\mathfrak{M}$ *generat de cel mai mic multiplu comun* m.

3) DIVIZORI COMUNI MAI MULTOR NUMERE. Mulţimea divizorilor comuni numerelor $a, b, \ldots, v$ este intersecţia reţelelor $\mathfrak{T}_a$, $\mathfrak{T}_b$, ..., $\mathfrak{T}_v$. Or, descompunerea în factori primi a acestor divizori comuni se obţine luînd *cel mult* factorii primi care figurează în *toate* descompunerile cu exponenţi *cel mult egali* cu cei care figurează în aceste descompuneri. Rezultă de aici că mulţimea considerată este mulţimea divizorilor celui mai mare dintre ei. Prin urmare, *intersecţia reţelelor* $\mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_b, \ldots, \mathfrak{T}_v$ *este reţeaua* $\mathfrak{T}_d$ *asociată celui mai mare divizor comun.*

Ca toate operaţiile de intersecţie, operaţiile de formare a celui mai mic multiplu comun şi a celui mai mare divizor comun sînt *comutative* şi *asociative*.

REMARCĂ. În cazul a două numere a, b, regulile de formare a celui mai mic multiplu comun şi a celui mai mare divizor comun arată că produsul acestora este egal cu produsul celor două numere. $m \cdot d = a \cdot b$.

4) Idealul $\mathfrak{M}$ există totdeauna; el are ca submulţime idealul principal generat de produsul numerelor, însă reţeaua $\mathfrak{r}_d$ se poate reduce la un singur număr 1. Spunem atunci că numerele date *sînt prime între ele luate în ansamblu*; numerele pot să nu fie prime între ele, două cîte două — este cazul în care fiecare factor prim nu apare decît în descompunerea unuia din numere. Numerele prime două cîte două au proprietăţi comparabile cu cele ale numerelor prime, de exemplu:

Pentru ca un număr să fie un multiplu al unui produs de factori care sînt primi doi cîte doi, este necesar şi suficient ca el să fie multiplu al fiecărui factor.

(Condiţia este evident necesară, şi ea este şi suficientă fiindcă lista multiplilor este idealul generat de produsul acestor numere fără factori primi comuni.)

Un enunţ, consecinţă imediată a teoremei fundamentale şi foarte frecvent utilizat, este următorul:

Dacă un număr divide un produs de DOI *factori şi este prim cu unul din ei, îl divide pe celălalt.*

APLICAŢIE A TEOREMEI FUNDAMENTALE LA CONGRUENŢE DE MODUL PRIM

Teoremă. *Dacă d este prim, $a \cdot b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$ implică $a \equiv 0$ sau $b \equiv 0$.*

Într-adevăr, a spune că a este prim cu d înseamnă în cazul de faţă că nu este multiplu al lui d; trebuie atunci ca b să fie multiplu al lui d.

Teorema reciprocă teoremei 2 a congruenţelor:

$[m$ prim cu d şi $ma \equiv mb (\mathrm{mod}\ d)] \Longrightarrow [a \equiv b (\mathrm{mod}\ d)]$.

Într-adevăr, aceasta înseamnă a spune că dacă d divide pe $ma - mb = m(a - b)$ şi este prim cu m, el divide pe $a - b$.

Altfel spus, *putem împărţi cei doi membri ai unei congruenţe cu un număr prim cu modulul.* În particular, dacă modulul este un număr prim, este suficient să ne asigurăm că nu împărţim cu un multiplu al modulului; prin urmare, *putem împărţi cei doi membri ai unei congruenţe de modul prim cu un număr necongruent cu zero.*

În felul acesta, congruenţele de modul prim au aceleaşi proprietăţi ca egalităţile, în raport cu adunarea, înmulţirea şi simplificarea prin împărţire (divizorul divide, firește, ambii membri).

5) **Teoremă.** *În mulţimea întregilor, orice ideal $\mathcal{J}$ generat de n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este un ideal principal.*

Altfel spus, mulţimea numerelor

$$i = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$$

coincide cu mulţimea multiplilor unui număr.

În primul rînd, orice număr i este un multiplu al celui mai mare divizor comun d al numerelor date, de unde rezultă incluziunea $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$. Ceea ce trebuie să demonstrăm este incluziunea inversă.

Dintre elementele pozitive ale lui $\mathcal{J}$, să-l considerăm pe cel mai mic şi nenul, fie el j. Fie, aşadar, $j = X_1a_1 + X_2a_2 + \ldots + X_na_n$ cel mai mic element pozitiv al lui $\mathcal{J}$. El este mai mic decît a_1 (sau, cel mult egal cu a_1) care aparţine lui $\mathcal{J}$, ceea ce înseamnă că putem face împărţirea

$$a_1 = jq + a_1' \quad 0 \leqslant a_1' < j.$$

Dar

$$a_1' = a_1 - jq = (1 - X_1q)a_1 - X_2q\,a_2 - \ldots - X_n\,q\,a_n$$

aparţine lui $\mathcal{J}$ şi este mai mic decît j; prin urmare, el nu poate fi pozitiv; el este deci nul, aşadar j este un divizor al lui a_1.

Acelaşi raţionament se aplică lui $a_2, \ldots, a_n$, şi rezultă că j este un divizor comun, prin urmare — un divizor al celui mai mare divizor comun d.

Deoarece am văzut că d divide toate elementele i şi, în particular, pe j, obţinem $j = d$ şi, cum multiplii lui j aparţin lui $\mathcal{J}$, avem $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$.

Din cele două incluziuni inverse rezultă $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

Prin urmare, *idealul generat de n numere întregi este idealul principal generat de cel mai mare divizor comun al acelor numere.*

Remarcăm, în încheiere, că am folosit, o dată în plus, proprietăţile de ordine totală a mulţimii întregilor şi faptul că marginea inferioară a unei mulţimi de întregi care este minorată aparţine mulţimii.

Acestea sînt proprietăţi pe care *nu* le vom regăsi în inelul polinoamelor. Totuşi, unele din proprietăţile pe care le-am demonstrat mai sus se vor păstra, şi tocmai de aceea este bine să reluăm expunerea într-o formă care să fie valabilă şi pentru polinoame. Aceasta va face obiectul § 7.

§ 5. STUDIUL NUMERELOR PRIME

1) Numerele prime — care servesc, aşa cum am văzut, la constituirea tuturor numerelor — sînt, prin definiţie, numerele care rămîn din mulţimea întregilor după ce se suprimă din ea toate numerele care au divizori adevăraţi, o definiţie oarecum negativă. Însă acest fapt ne face să bănuim că nu dispunem de o metodă de a descoperi proprietăţile acestor numere. Noi ştim mai curînd ce nu sînt, decît ceea ce sînt aceste numere. Singura metodă adecvată pentru studiul lor este cea a Ciurului lui Eratostene.

Considerăm şirul infinit al întregilor, $1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$

Numărul 1 nu este considerat, în general, număr prim.

2 este prim, singurul număr prim care este par. Îl păstrăm şi „barăm" multiplii lui, numerele plasate din 2 în 2 începînd cu el.

3 este prim. Îl păstrăm şi barăm multiplii lui, numerele plasate din 3 în 3 începînd cu el.

4 este deja barat ca fiind multiplu al lui 2, şi la fel şi toţi multiplii lui. În felul acesta ne vine în minte remarca: *este suficient să barăm multiplii numerelor prime.*

5 nu este încă barat, prin urmare el este prim, fiindcă altfel el ar fi fost barat în momentul cînd am fi considerat unul din divizorii lui, de unde — o a doua remarcă: *primul număr nebarat care urmează după ultimul număr prim studiat este prim.*

Urmează apoi 6, barat de 2 şi de 3, apoi 7, nebarat, prin urmare — număr prim; îl păstrăm şi barăm multiplii lui, situaţi din 7 în 7 începînd cu el. Dar primii lui multipli sînt barați, aşa că este suficient să începem să numărăm din 7 în 7 începînd cu $7^2 = 49$. Prin urmare, *cînd studiem un număr prim p, primul număr care trebuie barat este pătratul său,* p^2.

După 7, urmează 8, 9, 10, deja baraţi, apoi 11, nebarat, care este prim și care ne va face să barăm numere începînd cu $11^2 = 121$. Prin urmare, dacă ceea ce vrem este lista numerelor prime mai mici decît 120, treaba este terminată: numerele prime căutate sînt toate numerele păstrate (nebarate). Enunţăm regula: *Pentru a obţine lista numerelor prime mai mici decît N, este suficient să continuăm operaţia de „trecere prin ciur" pînă ce ajungem la un număr prim al cărui pătrat depăşeşte numărul N.*

2) MULŢIMEA NUMERELOR PRIME. Oricît de mare ar fi N, lista numerelor prime mai mici decît N, așa cum am obţinut-o mai sus, nu epuizează mulţimea numerelor prime. Într-adevăr, în fiecare etapă, am barat numere din 2 în 2, din 3 în 3 etc.; prin urmare, numerele care urmează și care preced un număr barat *în toate etapele*, sînt sigur nebarate. Astfel, numerele $(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) \pm 1$ nu sînt barate, dacă p este cel mai mare număr prim mai mic decît N, adică — ultimul număr prim studiat. Aceste numere sînt mult mai mari decît p; ele sau sînt prime, sau nu sînt prime, caz în care ar urma să fie barate dacă am continua operaţia ciurului cu un număr prim încă neutilizat, mai mare decît p. În orice caz, faptul acesta dovedeşte existenţa a cel puţin unui (și chiar a două!) numere prime mai mari decît N, oricît de mare ar fi N. Înseamnă că *există o infinitate de numere prime*.

Acest rezultat este cunoscut încă din antichitate (Eratostene, circa 200 ani î.e.n. Demonstraţia în *Elementele* lui Euclid). El ne determină, în mod firesc, să ne întrebăm care sînt legile care guvernează succesiunea numerelor prime, care sînt formulele care, dacă nu pot să dea toate numerele prime, pot măcar să nu dea decît asemenea numere. Însă problemele de tipul acesta n-au putut fi rezolvate.

Unul din rezultatele importante obţinute este teorema lui Lejeune-Dirichlet: în orice progresie aritmetică în care raţia și primul termen sînt numere prime între ele, există o infinitate de numere prime.

Tabelele de numere prime, continuate pînă foarte departe (cu multe milioane de numere prime!), arată că există numere impare consecutive care sînt ambele prime (de pildă 881 și 883); ele se numesc „numere prime gemene". Oare perechi de felul acesta există în număr infinit? Nu dispunem decît de cîteva enunţuri de tipul următor: Există o infinitate de perechi n, $n + 2$ de numere care au mai puţin de 9 factori primi. (Viggo BRUN; Oslo, 1920). Același

savant a demonstrat că, oricare ar fi n, între n și $n + \sqrt{n}$ există numere care au mai puțin de 11 factori primi.

Metode de cu totul altă natură, care țin de domeniul analizei, permit abordarea în alt mod a acestei probleme, care rămîne totuși una din cele mai misterioase pe care le pune cercetătorului studiul matematicii elementare.

§ 6. NUMERAȚIA

Proprietățile numerelor întregi pe care le-am studiat permit construirea unui sistem de convenții cu ajutorul cărora putem scrie un număr întreg dat și îi putem da un nume, oricît de mare ar fi acel număr.

I. Principiul numerației de poziție

Fie a un număr întreg ales o dată pentru totdeauna, pe care îl numim *bază* a sistemului de numerație.

$$a \geqslant 2.$$

Teoremă. *Orice întreg N poate fi scris într-un singur mod sub forma*

$$N = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_k a^k + \ldots + x_1 a + x_0,$$

unde numerele x_k sînt întregi pozitivi sau nuli care verifică

$$0 \leqslant x_k \leqslant a - 1.$$

Pentru a demonstra afirmația, să notăm, admițînd că expresia există,

$$R_k = x_k a^k + x_{k-1} a^{k-1} + \ldots + x_1 a + x_0$$

$$N - R_k = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_{k+1} a^{k+1} = Q_k a^{k+1}$$

Q_k și R_k sînt cîtul și restul împărțirii lui N la a^{k+1}, fiindcă avem

$$R_k \leqslant (a-1)a^k + (a-1)a^{k-1} + \ldots + (a-1)a + (a-1) = a^{k+1} - 1.$$

Acestea fiind spuse, definim coeficienţii x_k din aproape în aproape, în ordinea descrescătoare a indicilor, luînd

drept x_n — cîtul împărţirii lui N la a^n,

drept $x_n a + x_{n-1}$ — cîtul împărţirii lui N la a^{n-1},

drept $x_n a^2 + x_{n-1} a + x_{n-2}$ — cîtul împărţirii lui N la a^{n-2} etc. Obţinem astfel singura soluţie posibilă, dacă o asemenea soluţie există. Or, numerele x_k introduse sînt realmente mai mici decît a, dacă n a fost definit prin

$$a^n \leqslant N < a^{n+1}$$

fiindcă, dacă una din împărţiri este $N = Q_k a^{k+1} + R_k$, împărţirea următoare este

$$N = (Q_k a + x_k) a^k + R_{k-1},$$

de unde

$R_k = x_k a^k + R_{k-1} < a^{k+1}$, prin urmare $x_k < a$.

În fine, ultima împărţire, cea la a, dă pe x_0 şi demonstrează că expresia obţinută este într-adevăr aptă să reprezinte pe N.

Prin urmare, *există o corespondenţă biunivocă între numerele N care verifică $a \leqslant N < a^{n+1}$ şi şirurile de $n+1$ numere x_i, $0 \leqslant x_i < a$.*

Supraliniind pentru a evita confuzia cu un produs, vom scrie

$$N = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_k \dots x_1 x_0}.$$

REMARCĂ. La fel de bine, am fi putut determina mai întîi pe x_0, restul împărţirii lui N la a, apoi pe $x_1 a + a_0$, restul împărţirii lui N la a^2 şi aşa mai departe, în ordinea crescătoare a indicilor.

CONVENŢIE DE SCRIERE. Se aleg simboluri pentru numerele mai mici decît a, inclusiv pentru zero; aceste simboluri sînt suficiente pentru a scrie coeficienţii x_k şi deci, pentru a scrie pe N. Aceste simboluri se numesc *cifre*. (Ele nu se supraliniază, cînd sînt folosite). În practică, se folosesc simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, fiindcă baza este zece.

II. Reguli practice ale operaţiilor

Un număr scris într-un sistem de numeraţie cu baza a este un polinom în a. Prin urmare, regulile de operare ar trebui să fie exact cele referitoare la polinoame, dacă condiţia impusă coefi-

cienților de a fi pozitivi și mai mici decît a n-ar obliga la operații de report:

$(a + b)a^n$ trebuie scris $a^{n+1} + ba^n$, dacă $0 < b < a$.

Vom lua $a =$ zece.

1) ADUNARE. Se folosește un tabel scris pînă la $9 + 9$.

De notat că, atunci cînd se adună două numere, oricît de mari ar fi ele, reținerea (numărul care trebuie reportat) nu poate depăși 1 (fiindcă $9 + 9 = 18$, care adunat cu 1 de la reținere, nu dă decît 19). Dacă se adună, de pildă, 10 numere, reținerea nu poate depăși 9 (fiindcă $9 \times 10 = 90$ care, adunat cu 9 de la reținere, nu dă decît 99).

Calculele rămîn atunci suficient de simple pentru a putea scrie direct cifrele succesive ale rezultatului, fără a scrie calculele intermediare. Cînd însă trebuie făcută suma unui număr mare de termeni, este preferabil să se calculeze mai întîi sume parțiale, folosind asociativitatea.

2) SCĂDERE. Scădem fiecare termen al sumei care constituie al doilea număr, din termenul asemenea al polinomului care constituie primul număr. Însă pentru a evita coeficienții negativi, adăugăm — dacă este nevoie — o aceeași putere a lui a la cele două numere; dacă avem $x_k < y_k$, înlocuim diferența

$$(x_k a^k - y_k a^k) \text{ cu } (a + x_k)a^k - y_k a^k - a^{k+1}.$$

Făcînd aceasta, spunem că *reținem* 1 în momentul cînd facem $(a + x_k) - y_k$, pentru a transporta acest 1 și a face $y_{k+1} + 1$.

Vedem că, la o operație de scădere, reținerile nu pot depăși 1. Or, a spune că un număr N este mai mare decît un număr N' echivalează cu a spune că scăderea $N - N'$ este posibilă. Deducem de aici următoarea regulă:

Regulă pentru a recunoaște că un număr este mai mare decît un altul: N este mai mare decît N' dacă are mai multe cifre sau, în caz că are același număr de cifre, dacă prima cifră care diferă pornind de la stînga este mai mare la N decît la N'.

Firește, această regulă foarte importantă poate fi demonstrată direct, pornind de la semnificația grupurilor de termeni ai polinomului, pe care le-am notat $Q_k a^{k+1}$.

3) ÎNMULȚIRE. Folosim regula înmulțirii unei sume cu o sumă și facem reporturile necesare. În procedeul folosit efectiv în zilele noastre, scriem sumele parțiale care corespund înmulțirii deînmul-

ţitului cu fiecare cifră a înmulţitorului, ceea ce necesită folosirea tablei înmulţirii pînă la 9×9 şi introduce reţineri care nu depăşesc 8, reţineri pe care le facem în minte, aşa că nu scriem efectiv decît înmulţirea propriu-zisă. În ceea ce priveşte adunarea finală, ţinînd seama de observaţia cu privire la reţinerile la o adunare, avem interesul să adunăm cît mai puţine numere, aşa că luăm ca înmulţitor pe acela din cele două numere care are mai puţine cifre diferite de zero.

4) ÎMPĂRŢIRE. Am indicat deja că metoda constă în a face împărţiri parţiale pe care le continuăm luînd de fiecare dată restul provizoriu precedent drept deîmpărţit, pentru a găsi un nou termen al cîtului. În practică, procedeul constă în a calcula cîtul cifră cu cifră, folosind cîturi parţiale de forma $q_p 10^p$, $q_p \leqslant 9$.

În primul rînd, împărţirile cu 10^p — care se fac imediat, conform teoremei fundamentale a numeraţiei — indică cea mai mare valoare acceptabilă pentru p, adică numărul de cifre ale cîtului.

Stabilind în felul acesta că expresia cîtului este de forma $q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \ldots + q_1 a + q_0$ unde n este cunoscut, căutăm mai întîi pe q_n. Prin tatonări, încercînd cu înmulţiri cu cifre de la 1 la 9, obţinem cel mai mare număr de forma $q_n a^n$ al cărui produs cu divizorul mai poate fi scăzut din deîmpărţit. Calculăm după aceea diferenţa între deîmpărţit şi acest produs, şi luăm acest rest parţial drept nou deîmpărţit pentru a-l căuta pe q_{n-1} etc.

Metoda presupune că ştim să calculăm produsul unui număr oarecare cu un altul care are numai o singură cifră. În afară de aceasta, produsele şi scăderile se fac simultan, ceea ce poate conduce la reţineri egale cel mult cu 9 ($9 \times 9 = 81$; 81 scăzut din 90 : reţin 9; $81 + 9 = 90$ etc.).

Ştim că nu se scriu zerourile inutile la cîturile parţiale, că se „coboară", una cîte una, cifrele deîmpărţitului, pe măsură ce acestea intervin, şi că se reduce numărul de tatonări prevăzînd reţinerile care survin la înmulţiri.

REMARCĂ. La împărţirile succesive de la algoritmul lui Euclid, cînd se caută cel mai mare divizor comun (vezi mai departe § 6), fiecare rest devine la rîndul lui împărţitor. Pentru a lăsa loc pentru transcrierea acestor resturi, în procedeul uzual (cel puţin în Franţa) cîturile sînt plasate deasupra divizorilor corespunzători; locul rămas liber sub divizor este folosit pentru a scrie resturile succesive:

Exemplu: 1734 și 78

	22	4	3
1734	78	18	6
174	6	0	
18			

Cel mai mare divizor comun este 6.

5) EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE. Să vedem acum regula practică de extragere a unei rădăcini pătrate, în contrast cu regula împărțirii.

Fiind dat un număr N, căutăm un întreg u definit prin

$$u^2 \leqslant N < (u+1)^2$$

și notăm

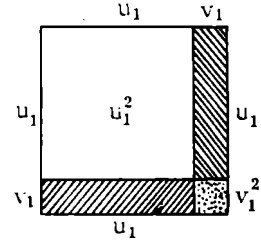
$$N - u^2 = r;$$

aceasta se poate exprima și sub forma

$$N = u^2 + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant 2u.$$

Ca și la împărțire, vom fi conduși să considerăm mai întîi o operație parțială; vom folosi un număr u_1 astfel încît u_1^2 este mai mic decît N, și vom calcula restul provizoriu

$$N - u_1^2 = r_1.$$



Dacă $r_1 > 2u_1$, operația trebuie continuată, însă operația care trebuie făcută acum este de altă natură decît prima: nu mai este vorba de a forma un pătrat, ci de a *mări pătratul inițial.* Căutăm un număr v_1 astfel încît $s_1 = 2u_1v_1 + v_1^2$ să fie mai mic decît r_1. Noua rădăcină pătrată provizorie va fi $u_2 = u_1 + v_1$, iar noul rest provizoriu va fi

$$r_2 = r_1 - (2u_1v_1 + v_1)^2 = N - (u_1 + v_1)^2.$$

După aceea luăm totul de la început, înlocuind pe r_1 cu r_2 și pe u_1 cu u_2.

O remarcă simplifică calculul: dacă v_1 este mic față de u_1, pătratul v_1^2 este mic și poate fi provizoriu neglijat; atunci $s_1 \simeq 2u_1v_1$ arată că v_1 este cîtul împărțirii lui s_1 la $2u_1$. Numai că în felul acesta riscăm să găsim un număr v_1 prea mare; de aceea, trebuie să-l încercăm în prealabil, calculînd

$$s_1 - (2u_1v_1 + v_1^2) = s_1 - v_1(2u_1 + v_1).$$

CALCULUL PRACTIC. N fiind dat sub forma lui zecimală, căutăm rădăcina sub forma

$$u = x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \ldots + x_0$$

(a reprezintă baza zece). Este atunci natural să căutăm succesiv

$$u_1 = x_n a^n, \quad v_1 = x_{n-1}a^{n-1}, \quad v_2 = x_{n-2}a^{n-2}, \ldots$$

unde n este cunoscut în funcție de numărul de cifre al lui N pe baza inegalității

$$a^{2n} \leqslant N < a^{2n+2}.$$

În fine, expresiile de tipul

$$2u_1v_1 = 2x_n x_{n-1}a^{2n-1} \quad \text{și} \quad v_1(2u_1 + v_1) = (2x_n a + x_{n-1})x_{n-1}a^{2n-2}$$

se calculează imediat, fiindcă x_i sînt cifre, iar înmulțirile cu a^j se fac scriind j zerouri la dreapta numerelor.

În fapt însă scrierea se abreviază omițînd zerourile inutile (ca la împărțire), așa că se „coboară tranșe de cîte 2 cifre“ (în loc de a coborî cifrele una cîte una).

Adăugăm că pentru a efectua calcule care cuprind multe operații, printre care și extragerile de rădăcini pătrate, se folosesc tabele numerice, sau instrumente (rigle de calcul). Studiul de mai sus este totuși util în cazurile simple. El prezintă interes, în principal, prin aceea că arată în ce mod, la efectuarea unui calcul în sistemul zecimal, este folosită structura însăși a operației care trebuie efectuată.

III. Criterii de divizibilitate

Se numesc așa regulile care dau restul împărțirii unui număr scris în sistemul cu baza a (pentru noi, $a =$ zece) cu un divizor scris în același sistem, și aceasta fără a căuta cîtul. Vom folos

teoremele cunoscute referitoare la congruențe și divizibilitate care sînt independente de sistemul numerație.

1) DIVIZORUL ESTE O PUTERE A BAZEI: $d = a^n$. Fie N numărul dat; știm că restul R_n este numărul format de cele n cifre de la dreapta lui N.

Dacă divizorul d' este un divizor al lui a_n,

$$N \equiv R_n, \pmod{a^n}$$

implică

$$N \equiv R_n, \pmod{d'}$$

așa că este suficient să împărțim pe R_n la d'.

EXEMPLE: $a =$ zece, $10 = 2 \times 5$. Restul împărțirii unui număr cu 2 sau cu 5 este restul cifrei care indică unitățile (prima din dreapta).

$10^2 = 4 \times 25 = 2 \times 50 = 5 \times 20$. Restul împărțirii unui număr cu 2, sau cu 4, sau cu 5, sau cu 25, sau cu 50, este restul numărului format din cele două cifre din dreapta. Regula nu este însă realmente utilă decît pentru 4 și 25, fiindcă pentru 2, 5, 10, 20 și 50 avem reguli mai eficiente.

2) $d = a - 1$ SAU UN DIVIZOR AL LUI $a - 1$. (Pentru $a = 10$, d este 9 sau 3).

De la

$$a \equiv 1 \pmod{d}$$

trecem la

$$a^k \equiv 1 \pmod{d},$$

prin urmare

$$x_k a^k \equiv x_k \pmod{d}.$$

Adunînd membru cu membru congruențele relative la diferitele valori ale lui k, conchidem: *un număr este congruent* (mod d) *cu suma cifrelor sale.*

În practică, pe măsură ce se calculează suma cifrelor, imediat ce se obține un număr care depășește baza, el este înlocuit cu suma cifrelor sale, iar cifrele care sînt multipli de d sînt neglijate.

3) DIVIZIBILITATEA CU UN NUMĂR DE FORMA $d = a^n - 1$ ȘI CU DIVIZORII UNOR ASEMENEA NUMERE. Numărul N trebuie descompus în tranșe de cîte n cifre.

EXEMPLU: $n = 2$.

$10^2 - 1 = 99$. Pentru d putem lua valorile 99, sau 11, sau orice alt divizor al lui 99.

Fie $N = 38\,956$. Scriem

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 10^4 &\equiv 3 \\ 89 \cdot 10^2 &\equiv 89 \end{aligned}\right\}$$

prin urmare

$$N \equiv (3 + 89 + 56) = 148 \equiv 1 + 48 = 49.$$

Restul împărţirii lui 99 este deci 49; iar restul împărţirii la 11 este $49 - 44 = 5$.

Deoarece $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$, cele de mai sus ne dau automat o regulă valabilă pentru $a + 1$, dar putem găsi o regulă ceva mai simplă în felul următor:

4) DIVIZIBILITATEA CU $d = a + 1$. De la $a \equiv -1 \pmod d$, trecem la

$$\left\{\begin{aligned} a^{2k} &\equiv +1, & a^{2k+1} &\equiv -1 \\ x_{2k}a^{2k} &\equiv +x_{2k}, & x_{2k+1}a^{2k+1} &\equiv -x_{2k+1} \end{aligned}\right.$$

prin urmare N este congruent cu numărul obţinut scăzînd din suma cifrelor de rang impar suma cifrelor de rang par, rangurile fiind socotite de la dreapta la stînga.

REMARCĂ GENERALĂ. În realitate, numai cazul resturilor nule prezintă un interes practic pentru simplificarea anumitor calcule, în particular pentru simplificarea fracţiilor. Tocmai de aceea nu vom studia, de exemplu, resturile împărţirii la $a + 2 = 12$, ceea ce s-ar putea face fără dificultate pornind de la $10 \equiv -2$. Într-adevăr, noi putem prevedea condiţia ca restul să fie nul făcînd descompunerea $12 = 3 \times 4$, şi acesta este singurul caz realmente util în practică.

REMARCĂ. Vom vedea, după ce vom studia fracţiile, că numeraţia este extrem de importantă şi din punct de vedere teoretic, pe lîngă importanţa ei practică, greu de supraestimat: „inventarea numeraţiei zecimale este faptul poate cel mai important din istoria ştiinţelor" (H. LEBESGUE).

§ 7. ALGORITMUL LUI EUCLID. FRACȚIILE DE MĂRIMI

I. Algoritmul lui Euclid în mulțimea întregilor

Revenim la § 1 și la § 2 referitoare la împărțire. Vom introduce un algoritm, adică un procedeu sau un mod de operare, care va fi aplicabil la toate mulțimile în care va fi definită o împărțire cu *cît întreg*

$$a = bq + r$$

și în care există o relație de ordine care dă sens inegalității $r < b$.

Aplicîndu-l la mulțimea întregilor, el ne va conduce la noi demonstrații ale teoremelor din § 3.

Aplicîndu-l la mărimi, vom introduce fracțiile de mărime și raportul a două mărimi de aceeași specie. Într-un capitol următor, îl vom aplica la polinoamele cu o nedeterminată.

Algoritmul constă în a face împărțiri succesive în care perechea deîmpărțit-împărțitor este înlocuită cu perechea împărțitor-rest:

$$\begin{aligned}
a &= bq + r, && r < b \\
b &= rq_1 + r_1, && r_1 < r \\
r &= r_1q_2 + r_2 && r_2 < r_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1} && r_{n+1} < r_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Problema care se pune este de a ști dacă algoritmul se termină la o anumită etapă. Singura circumstanță care poate opri algoritmul este apariția unui rest nul. Dacă $r_{p+1} = 0$, ultima împărțire este

$$r_{p-1} = r_pq_{p+1}.$$

ÎN CAZUL ÎNTREGILOR POZITIVI, șirul descrescător

$$b > r > r_1 > r_2 \ldots > r_n > \ldots$$

este, în mod necesar, finit; prin urmare operația se oprește; deci, se găsește un rest nul; fie $r_{p+1} = 0$. Ne concentrăm atenția asupra ultimului rest nenul $r_p = d$.

1) Lista completă a divizorilor comuni lui a și b coincide cu lista divizorilor lui b și r, deci cu cea a lui r și r_1, prin urmare,

din aproape în aproape, cu cea a lui r_{p-1} şi r_p, listă care este cea a divizorilor lui $r_p = d$, de unde concluzia:

Ultimul rest nenul al algoritmului lui Euclid este cel mai mare divizor comun, iar divizorii comuni sînt divizorii acestui cel mai mare divizor comun (abreviat C.M.M.D.C. sau c.m.m.d.c.).

Dacă cel mai mare divizor comun este 1, spunem că a şi b sînt *prime între ele* (sau *relativ prime*).

2) **Proprietăţi ale celui mai mare divizor comun.** Deoarece d se obţine printr-un şir de relaţii liniare, înseamnă că *dacă înmulţim pe a şi pe b cu un acelaşi întreg* λ, toate resturile succesive se înmulţesc cu λ şi deci la fel se întîmplă şi cu cel mai mare divizor comun. Dacă, din contră, împărţim pe a şi pe b cu unul din divizorii lor comuni, toate resturile, inclusiv d, se împart cu acel număr. În particular, dacă împărţim cele două numere cu divizorul lor comun cel mai mare, cîturile sînt prime între ele, de unde — enunţul important: *Caracteristica celui mai mare divizor comun faţă de ceilalţi divizori comuni este faptul că cîturile împărţirii numerelor cu acest divizor sînt prime între ele.*

APLICAŢIE. **Teoremă fundamentală.** *Dacă un număr divide un produs de* DOI *factori şi este prim cu unul din ei, îl divide pe celălalt.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ipoteza 1) } d \mid ab \\ \text{Ipoteza 2) c.m.m.d.c. } (d, a)=1 \Longleftrightarrow \text{c.m.m.d.c. } (db, ab)=b\end{array}\right\} \Longrightarrow d \mid b$$

fiindcă, deoarece d divide pe db şi pe ab, el divide şi divizorul lor comun cel mai mare, care este b.

Consecinţa 1. STUDIUL MULTIPLILOR COMUNI AI LUI a ŞI b.

Fie un multiplu comun $\mu = aa' = bb'$ şi d cel mai mare divizor comun al lui a şi b:

$$a = da'', \quad b = db'', \quad \text{c.m.m.d.c. } (a'', b'') = 1.$$

Înlocuind în expresiile lui μ, obţinem

$$\mu = da'a'' = db'b'' \text{ de unde } a'a'' = b'b''.$$

Dar a'' este prim cu b'', prin urmare îl divide pe b',

$$\exists q, \quad b' = a''q,$$

de unde rezultă

$$a' = b''q,$$

şi prin urmare

$$\mu = da''b''q.$$

Invers, orice număr μ care verifică o asemenea egalitate unde q este un întreg oarecare este un multiplu comun fiindcă egalitatea se scrie

$$\mu = ab''q = ba''q.$$

Prin urmare, *cel mai mic multiplu comun este* $m = da''b'' = ab'' = ba''$ *şi multiplii comuni sînt multiplii acestui număr* m. Mai mult, deoarece cîturile împărţirii lui m la a şi la b sînt a'' şi b'', înseamnă că *cel mai mic multiplu comun a două numere se deosebeşte de ceilalţi multipli comuni prin faptul că cîturile împărţirii lui la a şi la b sînt prime între ele.*

Consecinţa 2. UNICITATEA DESCOMPUNERII ÎN FACTORI PRIMI

Dacă un număr *prim* divide un produs de *doi factori primi* şi dacă nu este egal cu unul din ei, el este prim cu acel număr şi deci este egal cu celălalt.

Fie atunci un produs de n factori primi $p_1p_2 \dots p_n$ despre care presupunem că este multiplu al unui număr prim p. Dacă $p \neq p_1$, p divide pe $p_2p_3 \dots p_n$. Dacă nu este egal cu p_2, îl divide pe $p_3 \dots p_n$ şi aşa mai departe, dacă p nu este egal cu nici unul din primii $n-1$ factori, el este egal cu ultimul, factorul p_n. Prin urmare, *dacă un număr prim divide un produs de factori primi, el este egal cu unul din ei.*

Fie atunci o dublă descompunere a unui număr în factori primi

$$p_1p_2 \dots p_n = q_1q_2 \dots q_k.$$

Deoarece p_1 divide acest număr, el figurează în membrul al doilea, ceea ce permite o simplificare. Dar în felul acesta se poate simplifica cu toţi factorii primi din stînga, şi cum 1 nu este egal cu un produs de întregi neegali cu 1, înseamnă că în final nu rămîne nici un factor; prin urmare descompunerile erau identice. Prin aceasta unicitatea este demonstrată.

Consecinţele acestei unicităţi au fost expuse în capitolul precedent; nu revenim asupra lor.

3. **Studiul idealului** $\mathcal{J}$, **mulţime a numerelor** $xa + yb$, unde x şi y sînt întregi de semne oarecare.

a) Algoritmul lui Euclid dă o soluţie a ecuaţiei $xa + yb = d$, cînd d este cel mai mare divizor comun al lui a şi b. Într-adevăr,

resturile r, r_1, r_2, ... , r_{p-1}, r_p pot fi eliminate din egalităţile algoritmului. Începem cu $r_p = d$, de unde deducem

$$d = (-q_{p-1})r_{p-1} + r_{p-2}, \text{ însă } r_{p-1} = (-q_{p-2})r_{p-2} + r_{p-3}$$

prin urmare

$$d = x_{p-2}r_{p-2} + y_{p-3}r_{p-3}, \text{ însă } r_{p-2} = (-q_{p-3})r_{p-3} + r_{p-4}$$

prin urmare

$$d = x_{p-3}r_{p-3} + y_{p-4}r_{p-4}$$

şi aşa mai departe, numerele x şi y obţinîndu-se exclusiv din cîturile q_i. Vom găsi în final, mergînd de la coadă spre cap,

$$d = x_0a + y_0b.$$

În particular, dacă a şi b sînt primi între ei, algoritmul dă o pereche de întregi, pozitivi sau negativi, x_0, y_0 astfel încît

$$1 = x_0a + y_0b.$$

Aşadar, orice multiplu al lui d este de forma $xa + yb$; dar orice număr de această formă este un multiplu al lui d, fiindcă d divide pe a şi pe b. Prin urmare, *idealul $\mathfrak{I}$ coincide cu mulţimea multiplilor lui d*; este exact teorema care a fost demonstrată direct în capitolul precedent pentru un număr oarecare de termeni a, b, ... , v.

b) REZOLVAREA ECUAŢIEI $xa + yb = c$ ÎN NUMERE ÎNTREGI (ecuaţie diofantică).

Am văzut mai sus că problema nu este posibilă decît dacă c este un multiplu al c.m.m.d.c. al lui a şi b. Să împărţim cu acest număr d; obţinem $xa' + yb' = c'$, cu a' şi b' primi între ei. Algoritmul lui Euclid dă o pereche X_0, Y_0 care verifică

$$X_0a' + Y_0b' = 1, \quad \text{de unde rezultă} \quad (X_0c')a' + (Y_0c')b' = c'.$$

Cunoaştem deci o soluţie particulară

$$x_0 = X_0c', \quad y_0 = Y_0c'$$

a ecuaţiei $xa' + yb' = c'$.

Căutarea soluţiei generale. Eliminăm c' între egalităţile $xa' + yb' = c'$ şi $x_0a' + y_0b' = c'$.

Obţinem

$$(x - x_0)a' = -(y - y_0)b', \text{ cu } a' \text{ şi } b' \text{ primi între ei.}$$

Pe baza teoremei fundamentale, știm să deducem de aici

$$\exists k : x - x_0 = kb', \quad y - y_0 = -ka'.$$

Invers, oricare ar fi k (întreg), formulele acestea dau evident o soluție; ele dau deci soluția generală.

CONCLUZIE. Ecuația diofantică nu are soluții decît dacă c este multiplu al c.m.m.d.c. al lui a și b; aceste soluții sînt date de formulele

$$x = x_0 + kb', \quad y = y_0 - ka',$$

unde k este un întreg oarecare, x_0 și y_0 constituie o soluție particulară (dată, de exemplu, de algoritmul lui Euclid), iar a' și b' sînt cîturile împărțirii lui a și b la divizorul lor comun cel mai mare.

REMARCĂ. Sub o altă formă, ecuația diofantică se scrie $ax \equiv c \pmod b$. Dacă modulul b este prim, obținem o soluție unică mod b. În particular, dacă b este prim și a este dat nenul, congruența $ax \equiv 1 \pmod b$ are o soluție (mod b) în x. Aceasta înseamnă că *inelul claselor de resturi de modul b prim este un corp*. Acest corp are un număr finit de elemente: b elemente.

II. Algoritmul lui Euclid în mulțimea mărimilor

Să definim o împărțire euclidiană în mulțimea mărimilor de o specie dată; numai cîturile vor fi numere, numere întregi pozitive.

EXEMPLU 1. Lungimea segmentelor rectilinii. Operația fizică „pus la capătul lui" definește *adunarea* $G = G_1 + G_2$, de unde rezultă *înmulțirea cu un întreg*. Semnul $=$ reprezintă simbolic relația de echivalență „are aceeași lungime" definită cu ajutorul experienței de suprapunere. Relația de ordine „este mai mare decît" — în cazul de față, „este mai lung decît" — relație de ordine totală, $G > G_1$, este definită cu ajutorul unei experiențe care dă în același timp diferența $G - G_1$, operație inversă adunării. Ea conduce la introducerea mărimii nule (sau de lungime nulă) pe care o vom nota cu o. Fizica afirmă că aceste operații au proprietățile obișnuite de comutativitate și asociativitate.

EXEMPLUL 2. Masa unui corp. Operațiile cu balanța dau dicționarul:

$G = G_1$: puse pe rînd pe un platan al balanței, corpurile au același efect din punctul de vedere al echilibrului;

$G = G_1 + G_2$: G are acelaşi efect ca G_1 şi G_2 puse simultan pe un platan;

etc.

O mărime fizică este definită de descrierea unei operaţii care permite întocmirea dicţionarului respectiv, cu garantarea proprietăţilor dorite, ceea ce face din mulţimea mărimilor G de această specie un *modul*, cu inelul întregilor drept mulţime de operatori. Ipotezei existenţei relaţiei de ordine totală îi adăugăm ipoteza: *mulţimea satisface axioma lui Arhimede*. Amintim că această axiomă afirmă că oricare ar fi mărimea G dată, şirul multiplilor $G_1, 2G_1, \ldots, nG_1, \ldots$ depăşeşte pe G, oricare ar fi mărimea G_1. Rezultă de aici că oricare ar fi perechea G, G_1, $(G > G_1)$, este definită împărţirea euclidiană

$$\exists q_1 \text{ întreg pozitiv: } q_1 G_1 \leqslant G < (q_1 + 1) G_1$$

restul împărţirii fiind

$$G_2 = G - q_1 G_1,$$

diviziune care este definită şi prin

$$G = q_1 G_1 + G_2, \quad G_2 < G_1. \tag{i}$$

Vom folosi, de asemenea, inegalitatea

$$G_2 \leqslant G - G_1$$

care rezultă din $q_1 \geqslant 1$, de unde

$$2G_2 < G \tag{i'}$$

Pornind de la G şi G_1, $G > G_1$, deducem aşadar algoritmul lui Euclid

$$\begin{aligned}
G &= q_1 G_1 + G_2 \\
G_1 &= q_2 G_2 + G_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad G > G_1 > G_2 > \ldots > G_n > \ldots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
G_n &= q_{n+1} G_{n+1} + G_{n+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

unde şirul de operaţii nu se opreşte decît atunci cînd se găseşte un rest nul, dacă se găseşte un asemenea rest.

Să oprim calculul după ce l-am introdus pe G_p. Așa cum am văzut în cazul întregilor, există o pereche de întregi pozitivi sau negativi x_p, y_p astfel încît $x_pG + y_pG_1 = G_p$. Avem însă nevoie să facem unele precizări; de aceea, să reluăm calculul. (Literele minuscule reprezintă *întregi pozitivi*.)

$$G_p = - q_{p-1}G_{p-1} + G_{p-2}.$$

Însă

$$G_{p-1} = - q_{p-2}G_{p-2} + G_{p-3},$$

prin urmare

$$\begin{aligned} G_p &= + (q_{p-1}q_{p-2} + 1)G_{p-2} - q_{p-1}G_{p-3} \\ &= + s_{p-2}G_{p-2} - t_{p-3}G_{p-3}. \end{aligned}$$

Însă

$$G_{p-2} = - q_{p-3}G_{p-3} + G_{p-4},$$

prin urmare

$$\begin{aligned} G_p &= - (s_{p-2}q_{p-3} + t_{p-3})G_{p-3} + s_{p-4}G_{p-4} \\ &= - s_{p-3}G_{p-3} + t_{p-4}G_{p-4} \end{aligned}$$

și așa mai departe, așa că

$$\begin{aligned} G_p &= + s_{p-2k}G_{p-2k} - t_{p-2k-1}G_{p-2k-1}, \\ G_p &= - s_{p-2k-1}G_{p-2k-1} + t_{p-2k-2}G_{p-2k-2} \end{aligned}$$

În funcție de paritatea lui p, obținem deci

$$G_p = a_pG - b_pG_1 \quad \text{sau} \quad G_p = - a_pG + b_pG_1.$$

În afară de aceasta, dacă alegem succesiv indici p crescători, întregii a_p și b_p construiți prin adunarea unor numere întregi pozitive *cresc și tind către infinit* dacă p tinde către infinit, cu condiția să nu fi survenit un rest nul.

Pe de altă parte, din inegalități de tipul (i'), rezultă că șirul resturilor verifică

$$\begin{aligned} G &> 2G_2 > 2^2G_4 > \ldots > 2^kG_{2k} > \ldots \\ G_1 &> 2G_3 > 2^2G_5 > \ldots > 2^kG_{2k+1} > \ldots \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă nici unul din resturi nu este nul, restul G_p tinde către *o* cînd p tinde către infinit: într-adevăr, conform axio-

mei lui Arhimede, dacă toţi G_p ar rămîne mai mari decît o anumită mărime Γ ar exista un întreg k astfel încît

$$2^k G_k > 2^k \Gamma > G$$

ceea ce ar contrazice inegalităţile scrise.

Acestea odată stabilite, trebuie evident să distingem două cazuri, în cadrul unui studiu teoretic în care considerăm că nici un G_k nu este neglijabil:

Primul caz. UN REST ESTE NUL. $G_p = o$. Algoritmul lui Euclid se opreşte; există deci o pereche de întregi a_p, b_p, pe care, pentru simplificare, îi vom scrie a şi b, astfel încît $aG = bG_1$.

Să precizăm lucrurile, făcînd calculele în celălalt sens:

$$G = q_1 G_1 + G_2 = (q_1 q_2 + 1)\, G_2 + G_3 = \ldots = c_n G_n + G_{n+1} = \ldots = \\ \ldots = cG_{p-1}$$

fiindcă G_p este nul.

În mod analog,

$$G_1 = q_2 G_2 + G_3 = \ldots = dG_{p-1}$$

Aşadar, G şi G_1 sînt mărimi multipli ai lui $G_{p-1} = \Gamma$, ultimul rest nenul. Spunem că Γ *este o parte alicotă comună lui* G *şi* G_1. Despre două mărimi care au o parte alicotă comună spunem că sînt *comensurabile* între ele.

Avem

$$cd\, \Gamma = dG = cG_1,$$

dar am introdus $aG = bG_1$, prin urmare

$$ac\, G = bd\, G = bc\, G_1,$$

aşa că

$$ac = bd.$$

Convenim să scriem

$$\Gamma = \frac{1}{c} G = \frac{1}{d} G_1.$$

Însă, ca şi în cazul întregilor, oricare ar fi întregul λ, λG şi λG_1 conduc la $\lambda\Gamma$ cu aceleaşi cîturi, prin urmare cu aceleaşi numere a şi b şi avem

$$G = c\Gamma = \frac{1}{d}(cG_1) = c\left(\frac{1}{d} G_1\right)$$

expresie pe care o vom scrie $(c/d)G_1$.

Pentru a stabili că $c/d = b/a$ decurge ca o consecință a egalității $ac = bd$ trebuie — așa cum rezultă din modul în care a fost introdus c/d — ca $(1/b)G$ să fie o mărime Γ'. Trebuie, prin urmare, să introducem pentru mărimi AXIOMA CONTINUITĂȚII: *oricare ar fi întregul n, există o mărime Γ' astfel încît $n\Gamma' = G$.*

Atunci simbolurile c/d și b/a introduse au proprietățile care definesc fracțiile și numerele raționale (Cartea I). *Mărimile formează un spațiu vectorial cu corpul numerelor raționale ca mulțime de operatori.*

Numărul rațional reprezentat de c/d și b/a se numește *raportul* mărimilor G pe G_1. Raportul G_1 pe G este d/c.

(Firește, dacă privim lucrurile istoric, noțiunea de raport de mărimi comensurabile între ele este cea care a dus la noțiunea de fracție... .)

Deseori raportul se notează

$$\frac{G}{G_1} = \frac{c}{d} \quad , \quad \frac{G_1}{G} = \frac{d}{c} .$$

Din motive tipografice, noi vom scrie și G/G_1.

Algoritmul lui Euclid conduce, în cazul considerat, la o parte alicotă comună Γ care este cea mai mare posibilă, fiindcă orice parte alicotă comună lui G și G_1 aparține și tuturor resturilor G_n pînă la restul nul (exclusiv); ele sînt deci — toate — părți alicote ale lui Γ, prin urmare sînt

$$\Gamma, \frac{1}{2}\Gamma, \frac{1}{3}\Gamma, \ldots, \frac{1}{n}\Gamma, \ldots$$

Cazul al doilea. ORICARE AR FI p, RESTUL G_p NU ESTE NUL. Atunci G și G_1 *nu au părți alicote comune* fiindcă, pentru un p suficient de mare, $G_p = \pm (a_p G - b_p G_1)$ devine mai mic decît orice mărime aleasă, în timp ce dacă ar exista o parte alicotă comună, el ar fi un multiplu al acesteia.

Putem oare defini, în acest caz, un așa-numit „raport G pe G_1", folosind un procedeu de completitudine (extindere)? Păstrăm, evident, axioma continuității, așa că putem scrie

$$\frac{1}{a_p} G_p = \pm \left(G - \frac{b_p}{a_p} G_1 \right).$$

Știm că a_p tinde către infinit și G_p tinde către mărimea nulă cînd p tinde către infinit. Prin urmare, dacă $f_p = b_p/a_p$ are o

limită ρ în aceste condiţii, va trebui să scriem $G = \rho G_1$; raportul G pe G_1 va fi un număr real neraţional. Să vedem deci cum variază f_p cu numărul p:

$$\frac{1}{a_p} G_p = G - f_p G_1, \qquad \frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} = -G + f_{p+1} G_1$$

şi

$$\frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = G - f_{p+2} G_1.$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{a_p} G_p + \frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} = (f_{p+1} - f_p) G_1$$

$$\frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} + \frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = (f_{p+1} - f_{p+2}) G_1$$

$$\frac{1}{a_p} G_p - \frac{1}{a_{p+2}} G_{p+2} = (f_{p+2} - f_p) G_1, \text{ cu } \begin{cases} G_{p+2} < G_p \\ a_{p+2} > a_p \end{cases}$$

şi avem deci

$$f_p < f_{p+2} < f_{p+3} < f_{p+1}$$

oricare ar fi întregul p.

Numerele raţionale f_p determină aşadar intervale cuprinse unele în altele, ale căror lungimi tind către 0. Ştim deci că şirul lor are o limită, un număr real ρ, fracţiile ele însele fiind aproximaţii, alternativ prin lipsă şi prin exces, ale lui ρ.

Convenim şi acum să scriem $G = \rho G_1$ şi $G/G_1 = \rho$. Deoarece ρ este *iraţional*, G şi G_1 sînt *mărimi incomensurabile între ele.*

Prin urmare, algoritmul lui Euclid dă, în fiecare etapă, valori raţionale aproximative ale raportului a două mărimi, indiferent dacă mărimile sînt sau nu comensurabile între ele.

Să remarcăm că deoarece simbolul G/G_1 are acum sens în toate cazurile, putem scrie:

$$\frac{G}{G_1} = q_1 + \frac{G_2}{G_1} = q_1 + \frac{1}{G_1/G_2} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{G_2/G_3}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{G_3/G_4}}} \text{ etc.}$$

Simbolul care se introduce astfel:

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}},$$

indiferent că este sau nu limitat, se numește *fracție continuă*.

Acest simbol, se înțelege, a avut o importanță considerabilă în studiul numerelor despre care se bănuia că ar fi iraționale, în particular al numărului π (Lord BROUNCKER, 1620—1684. LAMBERT, 1728—1777). Vezi, de exemplu, H. Lebesgue, *Les constructions géométriques*, Gauthier-Villars.)

Din punct de vedere practic și nu teoretic, toate experiențele se fac cu o anumită aproximație: resturile G_n care descresc și tind către 0 sfîrșesc prin a deveni de ordinul de mărime al erorilor. Operația este oprită deliberat la ultimul rest mai mare decît erorile experimentale și acest rest este folosit ca parte alicotă comună aproximativă. Numai în cazul în care G și G_1 au o definiție teoretică una în raport cu cealaltă, ne putem pune întrebarea dacă aceste mărimi sînt sau nu comensurabile între ele. Știm că în cazul laturii pătratului și al diagonalei acestuia, mărimile nu sînt comensurabile. Algoritmul lui Euclid (mai exact ar fi să spunem algoritmul lui Eudoxus) ne permite să înlocuim raportul irațional (despre care cei vechi gîndeau că nici nu există) cu un șir de numere raționale care îl aproximează cu o precizie oricît de bună.

REMARCĂ: MĂSURA ZECIMALĂ A MĂRIMILOR. După introducerea numerației zecimale, noțiunea de fracție și-a pierdut mult din importanța ei practică. Oricare ar fi mărimea G, se poate alege orice mărime U suficient de mică, pentru a fi folosită ca parte alicotă aproximativă, fiindcă în împărțirea $G = qU + G'$, G' este mai mic decît U și deci, este practic neglijabil. Se adoptă atunci o familie de unități

$$U_0, \quad \frac{1}{10} U_0, \quad \frac{1}{10^2} U_0, \ \ldots, \ \frac{1}{10^n} U_0 = U_n, \ \ldots$$

Măsura lui G cu unitatea fundamentală U_0 devine un număr zecimal, așa că o schimbare de unitate înseamnă pur și simplu, separarea unei părți zecimale în raportul întreg G/U_n.

CAPITOLUL 2

FRACȚII. NUMERE RAȚIONALE NUMERE ZECIMALE

Am introdus (Cartea I, Structurile fundamentale) numărul rațional ca o *clasă de echivalență*, considerînd că două fracții a/b și a'/b' sînt echivalente dacă $ab' = ba'$.

I. Fracții

Teorema fundamentală a teoriei numerelor întregi conduce la teorema fundamentală a teoriei fracțiilor:

Teoremă fundamentală. *Dacă o fracție are ca termeni întregi primi între ei, orice fracție echivalentă cu ea are ca termeni echimultipli ai acelor întregi.*

Într-adevăr, din ipotezele

$$\begin{cases} ab' = ba' \\ a \text{ și } b \text{ primi între ei} \end{cases} \tag{1}$$

rezultă, pe baza teoremei fundamentale a teoriei întregilor, că, deoarece a divide pe ba' și este prim cu b, a îl divide pe a':

$$\exists k : a' = ak,$$

de unde, pe baza lui (1),

$$b' = bk.$$

O fracție ai cărei termeni sînt primi între ei se numește *fracție ireductibilă. Orice număr rațional are un reprezentant și numai unul singur care este o fracție ireductibilă.* El se obține plecînd de la una oarecare din fracțiile clasei, împărțind cei doi termeni ai acesteia cu divizorul lor comun cel mai mare.

Într-un studiu teoretic se presupune totdeauna că numărul rațional este reprezentat prin fracția lui ireductibilă. De asemenea, pentru a aduce fracțiile la *cel mai mic numitor comun*, se presupune că fracțiile au fost mai întîi reduse: numitorul căutat este atunci cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor.

REMARCĂ. În introducerea la numerele iraționale (Cartea I) am folosit într-un caz particular teorema:

Pătratul unui număr rațional neîntreg nu este un întreg. Această teoremă este generală; într-adevăr, fie a/b fracția ireductibilă care reprezintă numărul dat, unde b nu este egal cu 1; pătratul ei, a^2/b^2, este și el ireductibil, fiindcă termenii lui, întocmai ca a și b, nu au factori primi comuni; iar deoarece numitorul nu are valoarea 1, înseamnă că fracția nu este egală cu un întreg. De unde enunțul sub forma:

Orice întreg care nu este pătratul (sau puterea a n-a) *a unui întreg, nu este nici pătratul* (sau puterea a n-a) *a unui număr rațional.*

Un număr rațional este pătratul (sau puterea a n-a) *a unui alt număr rațional dacă și numai dacă cei doi termeni ai fracției ireductibile care îl reprezintă sînt ei înșiși pătrate* (sau puteri a n-a) *de întregi.*

II. Fracții zecimale

Numerația adoptată fiind cea zecimală, puterile lui 10 sînt numere remarcabile. Completăm șirul $10,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots$ al puterilor de exponenți pozitivi, cu șirul puterilor de exponenți negativi definiți prin

$$10^{-1} = \frac{1}{10},\quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},\quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000},\quad \ldots$$

și îi mai adăugăm și

$$10^0 = 1.$$

Convenția de bază a numerației de poziție: deplasarea cifrelor cu n ranguri spre stînga echivalează cu înmulțirea numărului cu

10^n, conduce la a scrie cifre la dreapta cifrei unităţilor, dacă vrem să împărţim la 10^n, adică să înmulţim cu $1/10^n$; de unde notaţiile

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01, \quad \ldots$$

Se numeşte *fracţie zecimală* o fracţie al cărei numitor este o putere a lui 10.

Fie o fracţie zecimală $\rho = N/10^p$, expresia lui N în numeraţia zecimală fiind

$$N = x_n 10^n + x_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + x_1 10 + x_0.$$

Fracţia capătă reprezentarea zecimală

$$f = x_n 10^{n-p} + x_{n-1} 10^{n-p-1} + \ldots + x_1 10^{-p+1} + x_0 10^{-p}.$$

Dacă N nu este un întreg, atunci cel puţin unul din exponenţii ultimilor termeni (cei din dreapta) este cu siguranţă negativ, cei din stînga putînd fi pozitivi, negativi sau nuli. Vom separa cu o virgulă cifrele care corespund exponenţilor negativi, şi aceasta chiar cu preţul că vom pune un zero la stînga virgulei, dacă nu există termeni cu exponenţi pozitivi sau nuli:

$n \geqslant p$	$f = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_k, \; x_{k-1} \ldots x_1 x_0}$	ex:	342,504
$n = p - 1$	$f = \overline{0, \; x_n \; x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$	ex:	0,342
$n < p - 1$	$f = \overline{0{,}00 \ldots 0 x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$	ex:	0,0034

Cifrele de la dreapta virgulei se numesc *cifre zecimale*; ele formează *partea zecimală* a lui f, în timp ce ansamblul cifrelor plasate la stînga virgulei formează *partea întreagă* a lui f. Spunem atunci că fracţia zecimală f este scrisă sub formă zecimală.

REGULILE DE OPERARE cu formele zecimale se deduc, ca şi regulile de operare cu numerele întregi scrise sub formă zecimală, din proprietăţile de comutativitate, asociativitate, distributivitate în ceea ce priveşte adunarea, scăderea şi înmulţirea; nu insistăm asupra detaliilor acestor reguli. Conchidem doar că *fracţiile zecimale constituie un inel*, ca şi întregii.

Dacă considerăm însă *împărţirea*, operaţia inversă înmulţirii, vedem că acest inel, ca şi cel al întregilor, nu este un corp: într-adevăr,

$$q = \frac{N}{10^p} : \frac{N'}{10^{p'}} = \frac{N}{10^p} \times \frac{10^{p'}}{N'} = \frac{N}{N'} 10^{p'-p}$$

nu este, în general, o fracție zecimală. Împărțirea este imposibilă în inel, și sîntem conduși să introducem o nouă operație, analoagă împărțirii euclidiene (cu cît și rest) introduse în inelul întregilor. Dacă A și B sînt întregi, cîtul Q era definit prin

$$BQ \leqslant A < B(Q + 1).$$

Păstrăm această definiție

$$bQ \leqslant a < b(Q + 1)$$

pentru fracțiile zecimale a și b al căror cît exact este $a/b = q$; întregul Q va fi definit prin $Q \leqslant q < Q + 1$.

(De notat că aici cîtul exact este definit, ceea ce nu se întîmpla și în cadrul studiului întregilor.)

Dar q este un număr rațional oarecare; prin urmare problema care se pune este de a plasa un număr rațioanl printre numerele întregi, sau, cum se spune, de *a extrage întregii dintr-un număr rațional*. Într-o formulare mai generală, deoarece întregii pot fi considerați drept numere zecimale particulare, sîntem puși în fața problemei de *a plasa numerele raționale printre numerele zecimale*.

III. Inelul fracțiilor zecimale în corpul numerelor raționale

1) **Număr zecimal.** Spunem că un număr rațional este *număr zecimal* dacă una din fracțiile care îl reprezintă este o fracție zecimală; dar atunci în aceeași clasă există o infinitate de fracții zecimale, fiindcă putem înmulți cei doi termeni ai fracției cu o putere oarecare a lui 10. Un număr zecimal nu se schimbă dacă scriem sau suprimăm zerouri la dreapta cifrelor zecimale, așa cum nici un întreg nu se schimbă dacă scriem zerouri la stînga cifrelor lui semnificative. Cazul cel mai simplu al acestor fracții zecimale este cel (unic) în care numărătorul nu are pe 0 ca cifră a unităților; forma zecimală a fracției nu se termină la dreapta cu un 0.

CONDIȚIA CA UN NUMĂR RAȚIONAL SĂ FIE NUMĂR ZECIMAL. Un număr rațional este determinat printr-o fracție care-l reprezintă. Presupunem această fracție ireductibilă, eventual după simplificări. Fie așadar un număr rațional dat prin fracția

$$\frac{a}{b}, \quad a \text{ și } b \text{ primi între ei.}$$

Deoarece orice fracţie egală cu ea are ca termeni echimultipli ai lui a şi b, condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul raţional să fie zecimal este ca b să aibă printre multiplii săi o putere a lui 10, prin urmare, ca *b să nu aibă alţi factori primi decît pe 2 şi 5*.

2) **Valori zecimale aproximative ale unui număr raţional.** Mulţimea numerelor zecimale este peste tot densă pe intervalul $(0, +\infty)$, fiindcă $1/10^n$ tinde către 0 cînd n tinde către infinit, aşa că intervalele

$$\left(0, \frac{1}{10^n}\right), \left(\frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}\right), \ldots, \left(\frac{p}{10^n}, \frac{p+1}{10^n}\right), \ldots$$

acoperă $(0, A)$ oricare ar fi A, şi în acelaşi timp sînt toate de lungime mai mică decît ε, dacă n este luat suficient de mare.

a) Odată ales n, orice număr raţional r poate fi aproximat cu mai puţin de $1/10^n$ prin două fracţii zecimale care îl încadrează,

$$\frac{p}{10^n} \leqslant r < \frac{p+1}{10^n}$$

şi care se numesc *valori zecimale care aproximează pe r prin lipsă şi prin exces pînă la $1/10^n$*. Întregul p se calculează imediat din remarca următoare:

Dacă r este dat printr-o fracţie $\frac{a}{b}$, definiţia

$$\frac{p}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{p+1}{10^n}$$

devine

$$bp \leqslant a\,10^n < b(p+1)$$

care exprimă că *p este cîtul întreg al împărţirii la b a întregului $a \cdot 10^n$*.

b) Să dăm acum lui n valori întregi succesive: obţinem două şiruri de valori zecimale aproximative ale lui r, unul constituit din valori care îl aproximează prin lipsă, fie el şirul S, altul constituit din valori care îl aproximează prin exces, fie el şirul S'.

Să studiem şirul S:

$$\left\{ p_0 \ \text{(întreg)}, \frac{p_1}{10}, \frac{p_2}{10^2}, \ldots, \frac{p_n}{10^n}, \ldots \right\}.$$

Știm că p_n se calculează făcînd împărțirea

$$bp_n \leqslant a \cdot 10^n < b(p_n + 1)$$

sau, punînd în evidență restul,

$$a \cdot 10^n = bp_n + r_n, \quad r_n < b.$$

Deducem de aici

$$a \cdot 10^{n+1} = b(10p_n) + 10\ r_n.$$

Prin urmare, pentru a-l obține pe p_{n+1}, este suficient să împărțim $10\ r_n$ la b:

$$10\ r_n = bs + r_{n+1}, \quad r_{n+1} < b, \quad s < 10.$$

Atunci

$$a10^{n+1} = b(10p_n + s) + r_{n+1}, \quad \text{cu } r_{n+1} < b,$$

arată că

$$p_{n+1} = 10\ p_n + s$$

și că este numărul care se scrie plasînd cifra s la dreapta cifrelor care constituie numărul p_n.

Altfel spus, după ce am efectuat împărțirea de întregi care dă pe p_n, punem un zero la dreapta lui r_n și continuăm împărțirea pentru a-l obține pe p_{n+1}. Dacă am plasat virgula pentru a scrie sub formă zecimală valoarea aproximativă $p_n/10^n$, virgula își păstrează poziția și $p_{n+1}/10^{n+1}$ se obține scriind la dreapta o nouă cifră zecimală. Prin urmare, *șirul S al valorilor prin lipsă este crescător*, cu excepția cazului în care toate cifrele care urmează să fie scrise sînt nule începînd cu un anumit rang. Situația aceasta trebuie examinată mai în detaliu.

PRIMUL CAZ. *Pentru o anumită valoare n, obținem* $r_n = 0$. Operația se oprește; valoarea $p_n/10^n$ obținută este egală cu a/b, care reprezintă deci un număr zecimal.

CAZUL AL DOILEA. *Pentru nici o valoare n, nu obținem* $r_n = 0$. Aceasta înseamnă că nu există nici o fracție zecimală care să fie egală cu a/b. În acest caz, cînd continuăm operația, găsim în mod necesar cifre zecimale nenule de rang mai mare decît n, oricît de mare ar fi n, fiindcă scriind suficient de multe zerouri la dreapta unui rest nenul, obținem deîmpărțituri parțiale care sfîrșesc în

mod necesar prin a depăşi împărţitorul b. Operaţia continuă deci indefinit. Şirul S este format dintr-o infinitate de numere zecimale crescătoare obţinute scriind la dreapta lor cifre nu toate nule. Acest şir este mărginit de numărul raţional a/b care este limita lui, conform definiţiei unei limite (Cartea I, cap. 4, § 3).

Exemplu:

$$\frac{a}{b} = \frac{214}{65}$$

$$\begin{array}{r|l} 214 & 65 \\ \hline 190 & 3{,}2\overline{|923076|}92\ \ldots \\ \rightarrow\ 600 & \\ 150 & \\ 200 & \\ 50 & \\ 500 & \\ 450 & \\ \rightarrow\ 600 & \\ 150 & \\ 20 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Constatăm pe acest exemplu că găsim restul 60 care, după coborîrea unui zero, dă deîmpărţitul parţial 600 şi că, dacă continuăm, regăsim acest rest 60: din acel moment, operaţia se repetă; regăsim şirul cifrelor cîtului, precum şi resturile succesive. Legea care determină cifrele cîtului fiind cunoscută, o reprezentăm simbolic punînd puncte de suspensie, şi citind „şi aşa mai departe". Numărul 923076 este *perioada*, iar despre numărul 3,2 care precede perioada spunem că formează *partea neregulată*. Obţinem *un simbol zecimal periodic nelimitat.*

Acesta este cazul general:

Teoremă. *Dacă o fracţie a/b nu este egală cu un număr zecimal, ea generează un simbol zecimal periodic nelimitat.*

Într-adevăr, deoarece resturile sînt, toate, mai mici decît împărţitorul, ele sînt în număr limitat, aşa că operaţia nu poate continua la nesfîrşit fără să se regăsească un rest deja obţinut.

Să remarcăm că, după definiția elementelor șirului S, toate fracțiile egale între ele generează același șir; prin urmare *orice număr rațional nezecimal generează un șir care are ca limită numărul considerat și ale cărui elemente sînt numerele obținute păstrînd* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *cifre la stînga unui simbol zecimal periodic nelimitat pe care știm să-l formăm. Spunem că șirul nelimitat este* EGAL *cu numărul generator.*

Reciproc, *orice simbol zecimal nelimitat periodic provine dintr-un număr rațional, cu excepția cazului în care perioada este formată din cifra* 9.

Într-adevăr, fie simbolul format din partea neregulată

$$\alpha = \overline{a_1a_2 \ldots a_k, b_1b_2 \ldots b_n}\ ,\ (\alpha \text{ poate fi și nul})$$

și din perioada

$$\pi = \overline{c_1c_2 \ldots c_p},\ c_p \neq b_n.$$

Condițiile necesare și suficiente referitoare la a și b sînt următoarele:

Prima perioadă începe cînd s-a împărțit la b numărul întreg $10^h a$, operație care dă restul R. Perioada a doua va începe cu deîmpărțitul parțial format plecînd de la același rest R obținut de data aceasta împărțind la b întregul $10^{h+p}a$. Or, cîturile acestor împărțiri sînt respectiv $10^h\alpha$ și $10^{h+p}\alpha + \pi$. Aceasta se exprimă prin

$$\begin{cases} 10^h a = b(10^h\alpha) + R \\ 10^{h+p}a = b(10^{h+p}\alpha + \pi) + R \end{cases}$$

de unde

$$(10^{h+p} - 10^h)a = b[10^{h+p}\alpha + \pi - 10^h\alpha],$$

prin urmare

$$\frac{a}{b} = \frac{(10^{h+p}\alpha + \pi) - 10^h\alpha}{10^h(10^p - 1)} = \alpha + \frac{\pi}{(10^p - 1)10^h} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2 \ldots b_1b_2 \ldots c_1c_2 \ldots c_p} - \overline{a_1a_2 \ldots b_1b_2 \ldots b_p}}{10^h \times 99 \ldots 9}$$

(p cifre 9)

Numărul raţional căutat este deci clasa fracţiilor egale cu a/b, afară de cazul în care a/b este zecimal. Acest caz nu se poate realiza decît dacă toate cifrele lui π sînt egale cu 9, adică dacă $p = 1$, $\pi = 9$. O asemenea formă nelimitată este *forma improprie* a unui număr zecimal, care poate fi considerat, el însuşi, ca fiind nelimitat de perioadă egală cu 0. Astfel

$$1{,}99 \ldots = 2 = 2{,}00 \ldots ; \; 5{,}399 \ldots = 5{,}4 = 5{,}400 \ldots$$

Concluzie. *Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea numerelor raţionale şi mulţimea formelor zecimale periodice nelimitate, dacă excludem o perioadă formată din cifra* 9 (sau, mai general, din cifra egală cu baza minus 1).

Acest rezultat se completează cu teorema următoare:

Teoremă. *Există o corespondenţă biunivocă între numerele reale şi formele zecimale nelimitate* periodice sau nu, dar cu excepţia consemnată mai sus.

1) Fiecărui simbol zecimal nelimitat îi facem să-i corespundă limita şirului de numere zecimale obţinut limitînd simbolul la 1, 2, ... , n, ... cifre zecimale. Dacă aceste cifre nu sînt toate nule începînd de la un anumit rang, şirul este crescător şi este majorat de numerele obţinute mărind cu 1 una din cifre (conform regulilor care determină relaţia de ordine în numeraţia de poziţie). Prin urmare, limita există şi se modifică dacă se modifică măcar una din cifrele simbolului.

2) Reciproc, orice număr real este limita şirului definit de un simbol zecimal nelimitat. Într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor reale este ordonată total şi arhimedeană, înseamnă că dacă r este dat, inegalităţile

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant r < \frac{p_n + 1}{10^n},$$

adică

$$p_n \leqslant r \cdot 10^n < p_{n+1}$$

definesc perfect un întreg p_n.

Putem deci studia numerele reale după proprietăţile formelor zecimale nelimitate.

Firește, faptul că baza de numerație adoptată este *zece* nu intervine nicăieri în cele de mai sus. Baza cea mai remarcabilă este *doi* (numerația diadică); singurele cifre care trebuie introduse sînt 0 și 1, ceea ce permite utilizarea unor calculatoare cu principiu de funcționare foarte simplu: o căsuță perforată (sau un curent care circulă) reprezintă 1, iar o căsuță neperforată (sau un curent care nu circulă) reprezintă 0. Viteza foarte mare de operare a calculatoarelor face ca lungimea formelor diadice (de exemplu, numărul *o sută* se scrie 1 100 100) să nu constituie decît un inconvenient neglijabil. Cît privește din punct de vedere teoretic, baza *doi* pur și simplu se impune; uneori mai adecvată este baza *trei*, pe care o vom folosi în cap.3, § 1, II.

CAPITOLUL 3

NUMERE REALE

§ 1. PUTEREA SUBMULȚIMILOR DE NUMERE REALE

Știm că unei mulțimi cu un număr finit de elemente i se atașează un număr cardinal: numărul elementelor. Vom studia acum cîteva submulțimi ale numerelor reale care au o infinitate de elemente.

I. Submulțimi numărabile

Am spus (Cartea I, § 4) că o mulțime cu o infinitate de elemente este *numărabilă* dacă există o corespondență biunivocă între elementele ei și cele ale mulțimii întregilor naturali 1, 2, ... , n, ..., altfel spus, dacă ele pot fi numerotate. Ele formează atunci un *șir*.

EXEMPLE. Mulțimea numerelor pare: numărul $2k$ are numărul (de ordine) k;

Mulțimea pătratelor de întregi: numărul k^2 are numărul k.

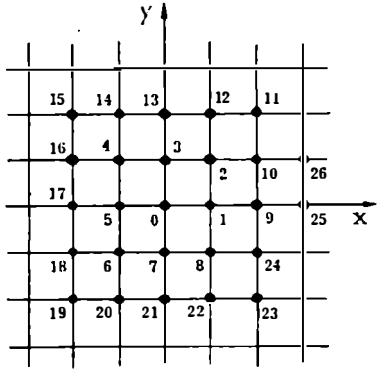
Mulțimea întregilor de semne oarecare: k fiind un întreg pozitiv, atribuim numărului $+k$ numărul $2k$ și numărului $-k$ numărul $2k+1$.

Mulțimea numerelor prime: Știm să obținem numerele prime unul cîte unul cu ajutorul ciurului lui Eratostene, prin urmare știm să le numerotăm în acord cu ordinea lor crescătoare. Dar nu dispunem de o formulă care să dea valoarea numărului prim căruia i se atașează un număr k dat; vom spune că mulțimea numerelor prime este numărabilă, dar ea nu este numărată exact ca cele precedente.

Cîteva rezultate fundamentale şi care nu apar ca fiind la fel de evidente sînt următoarele:

Teorema 1. *Mulţimea perechilor de întregi este numărabilă.*

Sub formă grafică, reprezentăm perechile de întregi prin punctele cu coordonate întregi din plan. Dacă încercăm să le numerotăm



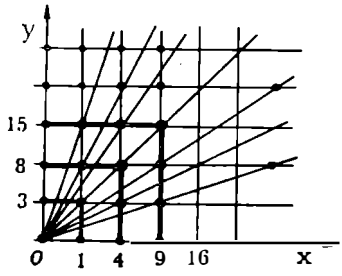
pe rînduri paralele de exemplu cu ox, este clar că utilizăm toţi întregii încă de cînd considerăm primul rînd, dar operaţia de numerotare poate fi efectuată şi altfel, de exemplu folosind pătrate cu centrul în origine, aşa cum se vede în schemă. În felul acesta fiecărui punct i se asociază un număr, şi invers. (Ca exerciţiu, operaţia poate fi analizată în detaliu, în particular se poate arăta că punctele de pe axa x au ca numere pătratele întregilor impari succesivi.)

Rezultă, prin urmare, că nu putem spune că în plan există „mai multe puncte" decît pe ox, iar cînd două mulţimi cu o infinitate de elemente verifică relaţia de incluziune $E' \subset E''$, nu putem spune că E' are „mai puţine elemente decît E''.

Tot astfel, considerînd spaţii cu 3, 4, ..., n dimensiuni, vedem în mod analog că reuniunea unui număr finit de submulţimi numărabile este o submulţime numărabilă. Se demonstrează că afirmaţia este valabilă şi pentru reuniunea unei infinităţi numărabile de mulţimi numărabile.

Teorema 2. *Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.*

1) Considerăm mai întîi mulţimea fracţiilor pozitive. Să reprezentăm numitorii succesivi pe axa x, iar numărătorii corespunzători deasupra, pe un rînd paralel cu axa y, aşa că fiecare fracţie este reprezentată de un nod al caroiajului. Le vom nume-



rota, de exemplu, urmărindu-le în succesiunea lor pe pătrate cu laturile în lungul lui *ox* şi *oy*.

2) CÎND NUMEROTĂM NUMERELE RAŢIONALE pozitive, punctele coliniare cu originea trebuie considerate echivalente. Vom conveni ca în operaţia de numerotare a fracţiilor să nu numerotăm decît punctul întîlnit primul pe fiecare rînd: acela va fi fracţia ireductibilă care reprezintă numărul raţional.

De remarcat că toate acestea sînt în deplină concordanţă cu cele enunţate mai înainte: există o infinitate numărabilă de fracţii care reprezintă un număr raţional, iar reuniunea tuturor acestor mulţimi este şi ea numărabilă.

Printr-o operaţie de dedublare, deducem apoi rezultatul pentru mulţimea numerelor raţionale de semne oarecare (atribuind numere pare numerelor raţionale pozitive şi numere impare celor negative). La fel de bine am fi putut numerota mai întîi numai fracţiile mai mici sau egale cu 1, apoi, prin dedublare, am fi asociat fiecărcia fracţia ei inversă.

Este esenţial de remarcat că numerotarea, firește, nu respectă relaţia de ordine naturală a numerelor raţionale.

O altă remarcă evidentă este aceea că o submulţime B a unei mulţimi numărabile A *sau* conţine un număr finit de elemente, *sau* este ea însăşi numărabilă (fiindcă este suficient, cînd numerotăm elementele lui A, să omitem elementele complementarei lui B).

II. Puterea continuului

1) **Teoremă.** *Mulţimea numerelor reale cuprinse între* 0 *şi* 1 *nu este numărabilă.*

Ştim că toate aceste numere reale pot fi reprezentate printr-un număr zecimal nelimitat, a cărui parte întreagă este 0, şi invers (cu excepţia semnalată în cap. 2). Ne-am putea imagina, de aceea,

că am putea numerota mai întîi numerele cu o cifră, apoi pe cele cu două cifre, cu trei... cifre zecimale. Dar, în realitate, în felul acesta n-am lua în considerare decît numerele cu un număr finit de cifre zecimale, adică mulțimea numerelor zecimale, care este o submulțime a numerelor raționale și, prin urmare, o submulțime numărabilă. Trebuie să luăm în considerare mulțimea numerelor cu o infinitate de cifre zecimale.

Pentru a simplifica expunerea, va fi comod să pornim de la reprezentarea numerelor în sistemul cu baza 2; ele vor fi deci scrise sub forma $\overline{0,\ \lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots}$, unde cifrele λ_i sînt 0 sau 1.

Demonstrăm rezultatul enunțat sub forma următoare: *orice* ȘIR *de numere reale am considera, putem construi un număr real care nu aparține șirului.*

Fie așadar un șir dat

$$u_1 = \overline{0,\ \lambda_{1;1}\ \lambda_{1;2}\ \lambda_{1;3} \ldots \lambda_{1;n} \ldots}$$
$$u_2 = \overline{0,\ \lambda_{2;1}\ \lambda_{2;2}\ \lambda_{2;3} \ldots \lambda_{2;n} \ldots}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_p = \overline{0,\ \lambda_{p;1}\ \lambda_{p;2}\ \lambda_{p;3} \ldots \lambda_{p;n} \ldots}$$

În $\lambda_{p;n}$, primul indice indică termenul șirului, iar celălalt rangul cifrei. Convenim să reprezentăm prin λ' cifra pe care nu o reprezintă λ (aceasta înseamnă că dacă λ reprezintă 1, λ' reprezintă 0, și invers). Atunci numărul

$$v = \overline{0,\ \lambda'_{1;1}\ \lambda'_{2;2}\ \lambda'_{3;3} \ldots \lambda'_{n;n} \ldots}$$

nu face parte din șir fiindcă, oricare ar fi n, v diferă de u_n prin cifra de rang n.

Am demonstrat astfel că nici un șir numărabil nu poate epuiza numerele reale cuprinse între 0 și 1, adică mulțimea pe care am numit-o *intervalul* (0, 1), (interval deschis sau închis, aici nu are importanță). Spunem că această mulțime *are puterea continuului.*

Relația „este în corespondență biunivocă" este o relație de echivalență definită între mulțimi, relație numită *echipotență*; despre mulțimile dintr-o aceeași clasă spunem că au *aceeași putere*, sau același *număr cardinal.*

Prin urmare, orice mulțime care poate fi pusă în relație biunivocă cu intervalul (0, 1) are puterea continuului: așa este de pildă mulțimea numerelor reale mai mari decît 1, după cum rezultă din corespondența prin inversiune:

$$y = \frac{1}{x};\ [0 < x < 1] \Longrightarrow [y > 1],$$

şi mulţimea tuturor numerelor reale, după cum rezultă de exemplu din corespondenţa

$$y = \frac{2x - 1}{x(1 - x)},$$

aplicaţie a lui $0 < x < 1$ pe $-\infty < y < +\infty$.

Un interval oarecare (a, b) se va deduce din $(0, 1)$ printr-o omotetie de raport $b - a$. Orice reuniune a unui număr finit de intervale poate fi pusă şi ea în corespondenţă biunivocă cu $(0, 1)$ considerat drept o reuniune de tot atîtea subintervale.

2) Nu trebuie însă să se creadă că, în mulţimea numerelor reale, „nenumărabil" se confundă cu „reuniunea de intervale"; că aceasta ar fi o greşeală, rezultă din exemplul celebru numit *mulţimea triadică a lui Cantor*. (CANTOR, unul din fondatorii teoriei mulţimilor, şi-a publicat lucrările între 1872 şi 1897.)

Folosim de data aceasta numeraţia în baza trei, aşadar cifrele 0, 1, 2. Pornind de la intervalul $0 \leqslant x \leqslant 1$, suprimăm intervalul $0,1 \leqslant x < 0,2$, aşa că nu rămîn decît următoarele două intervale

$$0 \leqslant x < 0,1 \quad \text{şi} \quad 0,2 \leqslant x < 1.$$

Apoi, în mod analog, suprimăm

$$0,01 \leqslant x < 0,02 \quad \text{şi} \quad 0,21 \leqslant x < 0,22.$$

După aceea, suprimăm cele patru intervale mediane ale intervalelor care rămîn:

$$0,001 \leqslant x < 0,002, \quad 0,021 \leqslant x < 0,022,$$
$$0,201 \leqslant x < 0,202, \quad 0,221 \leqslant x < 0,222$$

şi aşa mai departe.

Toate numerele eliminate au cel puţin o cifră 1 în sistemul de numeraţie ales de noi; prin urmare, mulţimea A rămasă conţine, chiar după un număr infinit (numărabil) de operaţii, toate numerele care se scriu exclusiv cu ajutorul cifrelor 0 şi 2.

Or, mulţimea acestor numere este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea tuturor numerelor scrise în sistemul cu baza doi, fiindcă este suficient să înlocuim simbolul 2 cu simbolul 1, păstrînd simbolul 0. Prin urmare, *mulţimea A considerată conţine o submulţime care are puterea continuului*.

Şi totuşi, mulţimea A nu conţine nici un interval: într-adevăr, fiecare din intervalele păstrate în fiecare etapă are lungimea

$$\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots,$$

şir care tinde către 0; chiar şi suma lungimilor acestor intervale păstrate în fiecare etapă, sumă care este succesiv

$$\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots,$$

tinde de asemenea către zero.

Vedem deci cît de riscant este să ne bazăm pe intuiţie în aceste chestiuni extrem de delicate.

III. Supliment despre numerele cardinale

Pentru a caracteriza, printre mulţimile infinite, pe cele care sînt echipotente, se foloseşte metoda următoare:

Fie două mulţimi A şi B astfel încît există o bijecţie a lui A în B, ceea ce înseamnă că fiecare element $a \in A$ are asociat un element $b = f(a) \in B$, corespondenţa între A şi $f(A) = B'$ fiind biunivocă. Dacă o teorie permite să se ataşeze numere cardinale mulţimilor A şi B, vom avea prin definiţie

$$\text{Card. } A = \text{Card. } B'$$

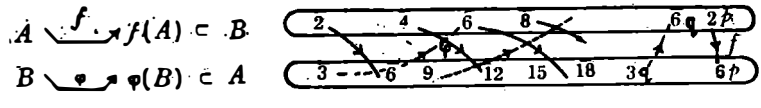
şi, deoarece $B' \subset B$, am vrea să putem scrie

$$\text{Card. } A \leqslant \text{Card. } B$$

dar, pentru a justifica aserţiunea, trebuie să ne asigurăm că s-a definit în felul acesta o relaţie de ordine; prin urmare, trebuie să verificăm antisimetria:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Card. } A \leqslant \text{Card. } B \\ \text{Card. } B \leqslant \text{Card. } A\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Card. } A = \text{Card. } B.$$

Un exemplu ne arată că această situaţie este posibilă. Să luăm drept A mulţimea întregilor pari, iar drept B mulţimea multiplilor lui 3. Funcţia „dublare" este o injecţie φ a lui B în A. Funcţia „triplare" este o injecţie f a lui A în B.



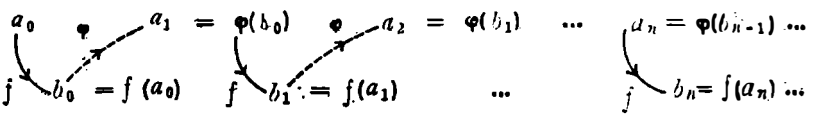
Or, A şi B sînt echipotente cu N, prin urmare sînt echipotente între ele, aşa cum rezultă din corespondenţa

$$2n \leftrightarrow 3n.$$

Teorema lui Bernstein. *Dacă există o injecţie f a lui A în B şi o injecţie φ a lui B în A, există o corespondenţă biunivocă între A şi B, ceea ce înseamnă că A şi B sînt echipotente.*

Prin ipoteză, f defineşte o corespondenţă biunivocă între A şi $f(A) = B' \subset B$, şi la fel φ, între B şi $\varphi(B) = A' \subset A$.

Fie A'' complementara lui A' în A. Dacă A'' este vidă, φ este tocmai corespondenţa biunivocă afirmată în enunţ. Vom presupune deci că A'' nu este vidă. Să pornim atunci de la un element $a_0 \in A''$ şi să considerăm şirul:



Acest şir este infinit fiindcă f şi φ sînt injective şi de aceea nu putem regăsi un element deja găsit. Din aceleaşi considerente, şirurile care pleacă de la elemente distincte ale lui A'' sînt disjuncte.

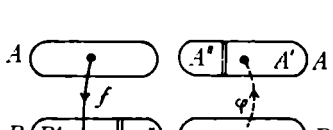
Să considerăm în felul acesta toate şirurile generate de elementele lui A''. Funcţia f determină o bijecţie între mulţimea A_1 a elementelor de sosire în A şi mulţimea B_1 a elementelor de sosire în B.

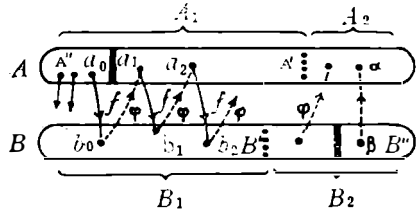
Nu ne rămîne decît să asociem complementarele

$$A_2 = \mathbf{C}_A A_1 \quad \text{şi} \quad B_2 = \mathbf{C}_B B_1.$$

Or:

$$A_1 \supset A'' \Longrightarrow A \supset A'$$





prin urmare A_2 este imaginea prin φ a unei submulțimi a lui B care nu are nici un element în B_1; această submulțime este însă B_2, fiindcă orice element β al lui B_2 are o imagine $\alpha = \varphi(\beta)$ care este în A' fără să fie în A_1. Prin urmare $A_2 = \varphi(B_2)$.

Am definit așadar corespondența biunivocă căutată prin

$$A_1 \overset{f}{\nearrow} B_1 \quad \text{și} \quad A_2 \overset{\varphi}{\nwarrow} B_2.$$

În consecință, relația Card. $A \leqslant$ Card. B este o relație de ordine largă. Dar nimic nu ne permite să credem că ordinea este totală.

În afară de aceasta, noi n-am definit operații în mulțimea cardinalelor. De aceea, este mai bine să evităm cuvîntul „număr" în legătură cu cardinalele. Cele de mai sus nu ne permit să considerăm că prin introducerea cardinalelor am realizat o extensie a mulțimii întregilor.

§ 2. LOGARITMI. EXPONENȚI GENERALIZAȚI

În mulțimea numerelor reale, cele două operații: adunarea și înmulțirea au structuri analoage pe care le-am caracterizat în Cartea I. Totuși, operația inversă adunării, scăderea $a - a'$, este definită pentru toate perechile de numere reale, în timp ce împărțirea $\frac{b}{b'}$ nu este definită decît dacă b' nu este nul. Mulțimea numerelor reale înzestrată cu operația adunare (grup aditiv) și mulțimea numerelor reale (cu zero exclus) înzestrată cu operația înmulțire (grup multiplicativ) sînt izomorfe pentru aceste operații. Elementele neutre, respectiv 0 și 1, se corespund, în mod evident.

a) Să ne concentrăm atenția asupra anumitor subgrupuri ale grupurilor de mai sus, și anume asupra acelor subgrupuri care nu au decît un singur generator:

Grup aditiv	$\ldots, -na, \ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$													
	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		
Grup multiplicativ	$\ldots, \frac{1}{b^n}, \ldots, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}, 1, b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$													

În primul subgrup, ordinea naturală se păstrează dacă a este pozitiv, și se inversează dacă a este negativ; în al doilea, ordinea

naturală se păstrează dacă b este mai mare decît 1, şi se inversează dacă $0 < b < 1$. Ne limităm la cazul uzual $a > 0$, $b > 1$; din el putem deduce fără dificultate cazul cu a negativ, sau cel cu b mai mic decît 1, inversînd, pur şi simplu, relaţia de ordine, dar *este esenţial ca b să fie pozitiv*.

Pentru n întreg pozitiv, $a > 0$ şi $b > 1$ fiind daţi, asociem aşadar elementele na şi b^n. Pe baza izomorfismului celor două grupuri din punctul de vedere al operaţiilor şi a relaţiei de ordine totală, asociem de asemenea

$$-na \quad \text{şi} \quad 1/b^n.$$

Apoi, dacă p şi q sînt întregi pozitivi, asociem

$$\frac{p}{q}a \quad \text{şi} \quad \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p,$$

şi, de asemenea,

$$-\frac{p}{q}a \quad \text{şi} \quad \frac{1}{\sqrt[q]{b^p}}.$$

Fie $\mathcal{A}$ mulţimea numerelor $\frac{p}{q}a$ cu p întreg de semn oarecare şi q întreg pozitiv, şi $\mathcal{B}$ mulţimea numerelor reale asociate; izomorfismul arată că sumei a două elemente din $\mathcal{A}$ îi corespunde produsul elementelor asociate din $\mathcal{B}$.

Rămîne să extindem corespondenţa în aşa fel încît $\mathcal{A}$ să devină mulţimea $\mathcal{R}$ a tuturor numerelor reale, iar $\mathcal{B}$ mulţimea $\mathcal{R}^+$ a tuturor numerelor reale pozitive.

Dificultatea este următoarea: vecinătăţile-capcane care permit să se definească un element r al lui $\mathcal{R}$ plecînd de la elementele lui Q sînt definite folosind structura aditivă. Şi atunci se pune întrebarea: dacă un şir de intervale cuprinse unul în altul (α_n, α'_n) este astfel încît $\alpha'_n - \alpha_n$ tinde către zero, oare la fel se întîmplă şi cu diferenţa $\beta'_n - \beta_n$ a imaginilor lor în $\mathcal{R}^+$, unde structura considerată este structura multiplicativă?

În Cartea III (cap. 5, § III), problema aceasta va fi abordată şi rezolvată altfel, aşa că cititorul poate omite demonstraţia care urmează: ea reuşeşte graţie unei alegeri judicioase a valorilor α_n, α'_n.

b) *Demonstraţie*. Să plasăm numărul real r, presupus pozitiv, printre multiplii unui număr $a > 0$ care aparţine lui $\mathcal{A}$. Deoarece acest şir al multiplilor este arhimedean, α şi α' sînt determinaţi de

$$\alpha = ka, \quad \alpha' = (k + 1)a.$$

Ideea constă în a alege valori succesive ale lui a definite prin $a_n = \frac{a_0}{2^n}$, unde a_0 este un număr ales.
Astfel,

$$\alpha_n = k_n \frac{a_0}{2^n}, \quad \alpha'_n = (k_n + 1)\frac{a_0}{2^n}; \quad \alpha'_n - \alpha_n = \frac{a_0}{2^n}.$$

Să traducem totul în $\mathfrak{B}$, presupunînd că $b_0 > 1$ este numărul care corespunde lui a_0:

$$\beta_n = \sqrt[2^n]{b_0^{k_n}}, \quad \beta'_n = \sqrt[2^n]{b_0^{k_n+1}}; \quad \frac{\beta'_n}{\beta_n} = \sqrt[2^n]{b_0} > 1$$

Să notăm atunci $\frac{\beta'_n}{\beta_n} = 1 + u_n$, unde $u_n > 0$.
Scriind numai primii doi termeni ai dezvoltării, obţinem $b_0 = (1 + u_n)^{2^n} > 1 + 2^n u_n$, adică $u_n < \frac{b_0 - 1}{2^n}$.

Atunci:

$$\frac{\beta'_n}{\beta_n} - 1 < \frac{b_0 - 1}{2^n}, \text{ prin urmare } \beta'_n - \beta_n < \beta_n \frac{b_0 - 1}{2^n}.$$

Să dăm acum lui n două valori:

$$\boxed{n_1 < n_2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < \alpha'_{n_2} < \alpha'_{n_1}} \Rightarrow \boxed{\beta_{n_2} < \beta'_{n_1}},$$

de unde

$$\beta'_{n_2} - \beta_{n_2} < \beta'_{n_1} \frac{b_0 - 1}{2^{n_2}}.$$

Este suficient acum să menţinem n_1 constant şi să-l facem pe n_2 să tindă către infinit: deoarece 2^{n_2} tinde către infinit, inversul lui tinde către zero; prin urmare, şi $\beta'_{n_2} - \beta_{n_2}$ tinde către zero.

c) Şirul valorilor β_n şi β'_n formează prin urmare intervale cuprinse unele în altele, a căror lungime tinde către 0; ele sînt „capcane“ care determină un număr real ρ pe care trebuie să-l asociem lui r, pentru a păstra izomorfismul după extensie.

Invers, orice număr real pozitiv ρ poate fi definit prin intervale cuprinse unele în altele (β_n, β'_n) folosind numere luate din $\mathfrak{B}$, fiindcă $\mathfrak{R}^+$ este total ordonată, de unde rezultă r, imaginea lui ρ în $\mathfrak{R}$.

În final, am definit o corespondenţă biunivocă între $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}^+$ care este un izomorfism între mulţimea $\mathcal{R}$ înzestrată cu o structură de grup aditiv ordonat şi mulţimea $\mathcal{R}^+$ înzestrată cu o structură de grup multiplicativ ordonat.

În particular, numărului $1 \in \mathcal{A}$ îi corespunde un număr $\beta \in \mathcal{R}$. Corespondenţa este definită prin perechea de elemente neutre $(0\,;1)$ şi perechea $(1\,;\beta)$. Spunem că β este *baza logaritmilor* şi scriem

$$a = \log_\beta b.$$

Pe de altă parte, dacă n este un întreg pozitiv, numărul $a = n$ are asociat numărul $b = \beta^n$. Convenim să extindem această notaţie:

dacă $a = -n$ (n întreg pozitiv), $b = 1/\beta^n$ se scrie $b = \beta^{-n}$

dacă $a = \frac{p}{q}$ (p şi q întregi pozitivi), $b = \sqrt[q]{\beta^p}$ se scrie $b = \beta^{p/q}$

dacă $a = -\frac{p}{q}$, $b = \frac{1}{\sqrt[q]{\beta^p}}$ se scrie $b = \beta^{-p/q}$

În fine, dacă r este un număr real oarecare, convenim să-i scriem asociatul sub forma

$$\rho = \beta^r$$

(care se citeşte „β la puterea r" sau „β la exponentul r").

În felul acesta, oricare ar fi numărul real x şi asociatul acestuia y din $\mathcal{R}^+$, am introdus două notaţii echivalente:

$$x = \log_\beta y, \quad y = \beta^x$$

şi izomorfismul se exprimă prin

$$\log_\beta(y_1 \cdot y_2) = \log_\beta y_1 + \log_\beta y_2 \quad \text{şi} \quad \beta^{x_1+x_2} = \beta^{x_1} \cdot \beta^{x_2}.$$

Am introdus deci două funcţii inverse una alteia; prima se numeşte *funcţia logaritm de bază* β; a doua se numeşte *funcţia exponenţială de bază* β.

Alegerea bazei. Baza β poate fi aleasă arbitrar, pozitivă, diferită de 1; în general, ea este luată mai mare ca 1 pentru ca funcţiile logaritm şi exponenţială care se deduc să fie crescătoare.

a) Din punctul de vedere al calculului, dat fiind sistemul de numeraţie pe care-l folosim, singura bază practică este 10. În acest caz, a aduna un întreg lui x corespunde, în y, la o simplă deplasare a virgulei; de aceea, în tabele nu figurează decît partea zeci-

mală a lui x. Astfel, deoarece în tabel găsim, ca valoare aproximativă corespunzătoare lui 34, şirul de cifre 53 148, şi deoarece

$$\log 1 = 0, \quad \log 10 = 1, \text{ trebuie să luăm}$$
$$\log 3{,}4 = 0{,}53\,148, \quad \log 34 = 1{,}53\,148, \quad \log 340 = 2{,}53\,148$$

etc., şi

$$\log 0{,}34 = -1 + 0{,}53\,148,$$
$$\log 0{,}034 = -2 + 0{,}53\,148 \text{ etc.}$$

Este evident comod să lăsăm aceşti logaritmi negativi sub forma în care i-am obţinut, fără a face scăderea care ne-ar face să pierdem avantajul numeraţiei zecimale. Se face doar convenţia de a condensa scrierea: ultimii doi logaritmi de mai sus se scriu respectiv $\bar{1}{,}53\,148$ şi $\bar{2}{,}53\,148$. Se subînţelege că partea zecimală este totdeauna pozitivă.

Efectuarea calculelor în $\mathcal{A}$ şi *nu* în $\mathcal{B}$ constituie o simplificare importantă mai ales atunci cînd trebuie extrase rădăcini de ordinul n în $\mathcal{B}$, dar trebuie început totdeauna prin a face în aşa fel încît în $\mathcal{B}$ să nu rămînă de efectuat decît operaţii notate cu semnul înmulţirii; spunem atunci că expresiile au devenit „calculabile prin logaritmi". Deseori reuşim să ne atingem acest scop introducînd unghiuri auxiliare prin funcţii trigonometrice şi folosind supleţea formulelor trigonometrice care permit înlocuirea sumelor cu produse.

Din punct de vedere istoric, introducerea logaritmilor de către Neper (1550—1618) şi introducerea de către Briggs, prietenul lui Neper, a tabelelor de logaritmi în baza 10 (numerele de la 1 pînă la 100000 cu 11 zecimale), curînd după extinderea, de către Stevin, a notaţiei zecimale la fracţiile zecimale (1585), au permis astronomilor să ducă la bun sfîrşit calculele cerute de aplicarea legii lui NEWTON (1642 — 1727). În zilele noastre, calculele acestea se fac cu ajutorul calculatoarelor. Rigla de calcul şi discurile de calcul sînt construite, şi ele, folosind corespondenţa prin logaritmi.

b) Din punct de vedere teoretic, dacă se studiază *funcţia logaritm şi funcţia exponenţială*, se constată că există un număr care se bucură de o situaţie privilegiată. Din însăşi analiza care ne-a permis să definim $y = \beta^x$ pentru orice valoare a lui x, ştim că y tinde către β^{x_0} cînd x tinde către x_0; prin urmare

$$\beta^{x-x_0} \to 1 \text{ cînd } x - x_0 \to 0.$$

Dar raportul

$$\frac{\beta^{x-x_0}-1}{x-x_0}$$

admite, în aceste condiții, o limită care depinde de β. Vom vedea că există o valoare a lui β, pe care o notăm e, astfel încît acest raport tinde către 1. Atunci, derivata pentru $x = x_0$ a funcției exponențiale de bază e, adică limita raportului

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \text{ cînd } x \to x_0$$

este tocmai $y_0 = e^{x_0}$.

Tot astfel, derivata funcției logaritm în baza e, $x = \log_e y$, adică limita raportului $\frac{x-x_0}{y-y_0}$ este $1/y_0$.

Așadar

$$(e^x)' = e^x \text{ și } (\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

Aceste formule care dau, respectiv, o soluție a „ecuațiilor diferențiale"

$$f'(x) = f(x) \text{ și } g'(x) = \frac{1}{x}$$

justifică introducerea numărului e în analiză. Adăugăm că e, ca și π, este un număr transcendent. Valoarea lui aproximativă este

$$e \simeq 2{,}71\,828.$$

Vom regăsi toate acestea pe o cale diferită în Cartea a III-a, cap. 5, III.

PARTEA A DOUA

EXPRESII ALGEBRICE REZOLVAREA ECUAȚIILOR

CAPITOLUL 1

POLINOAME. FRACȚII RAȚIONALE

Dacă x reprezintă un număr real, regulile de calcul ne permit — făcînd dezvoltările — să punem orice *expresie întreagă*, adică orice expresie care nu conține decît specificări de sumă, diferență, produs, sub *forma ei dezvoltată*, care este o sumă de produse. Exemplu:

$$(x + 1)^2 + 2x - 3(x - 2)^2 - (5x + 1) = 4x^2 - 13x + 12.$$

Ne vom ocupa acum de expresii de tipul acesta fără însă a presupune că x reprezintă un număr și introducînd axiomatic definiții de operații care sînt valabile cînd x reprezintă un număr. În felul acesta, vom introduce, într-o formă abstractă, așa-numita *structură de polinom cu o nedeterminată*.

I. Definiția unui polinom

Pornim de la două mulțimi: una este formată dintr-un element x numit *nedeterminată* și din elemente care se deduc din el printr-o operație notată cu semnul înmulțirii: elementele ei sînt deci

$$x^1 = x,\ x^2,\ \ldots,\ x^p,\ \ldots\ (p \text{ întreg pozitiv})$$

cu

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n};$$

Adăugăm un element neutru notat x^0 şi numim $\mathcal{H}$ mulţimea astfel constituită.

Cealaltă mulţime este o mulţime de numere. Anumite părţi ale teoriei impun ca această submulţime a mulţimii numerelor să fie un corp (aşadar, ca în ea să fie posibilă împărţirea, dacă se exclude zero), dar foarte adesea este suficient ca ea să fie un inel, de exemplu inelul Z al întregilor relativi. În această mulţime vom lua *coeficienţii*. Afară de cazul în care vom specifica altfel, vom lua mulţimea $\mathcal{R}$ a tuturor numerelor reale şi vom defini *polinoamele cu o nedeterminată pe corpul numerelor reale*.

1) Introducem O OPERAŢIE NOTATĂ CU SEMNUL ÎNMULŢIRII

$$ax^p,\ a \in \mathcal{R},\ x^p \in \mathcal{H}$$

cu asociativităţile

$a(bx^p)$ dă $(ab)x^p$ care se notează abx^p şi $(ax^p)\ (bx^q)$ dă $(ab)(x^px^q)$, deci abx^{p+q}.

Elementul neutru este $1x^0$. Vom vedea că (printr-un abuz de notaţie) acest element se notează 1, şi că $1x^m$ se notează x^m, iar ax^0 se notează a. Noi însă nu folosim aceste abrevieri, la începutul studiului.

Expresiile introduse se numesc *monoame*; în monomul ax^m, a este coeficientul iar m, exponentul puterii lui x, este *gradul monomului*. Monoamele cu aceiaşi exponenţi se numesc monoame *asemenea*.

2) Introducem între monoame O OPERAŢIE NOTATĂ CU SEMNUL ADUNĂRII

$$ax^p + bx^q$$

cu o condiţie de distributivitate în cazul $p = q$

$$ax^p + bx^p \text{ dă monomul } (a + b)x^p.$$

Aceasta ne determină să acceptăm ca element neutru monomul $0x^p$, oricare ar fi p. Îl vom nota Ω (mai tîrziu, vom scrie pur şi simplu, 0, zero).

Dacă monoamele nu sînt asemenea $p \neq q$, adunarea introduce elemente noi care nu mai sînt monoame şi care se numesc *polinoame*: ele sînt sume de un număr oarecare, finit, de monoame neasemenea (vom presupune totdeauna că s-a făcut *reducerea termenilor asemenea*), iar monomul apare ca fiind un polinom cu un singur termen.

Adunarea este presupusă asociativă și comutativă, ceea ce permite reducerea termenilor asemenea, precum și adunarea polinoamelor. Se poate însă întîmpla ca toți coeficienții să devină nuli; polinomul este atunci elementul neutru al adunării; spunem că el este *polinomul nul*, pe care îl vom nota Ω. (Mai tîrziu, vom scrie pur și simplu 0, printr-un abuz de notație.)

3) Introducem, în fine, ÎNMULȚIREA UNUI POLINOM CU UN NUMĂR, definită prin distributivitate în raport cu adunarea monoamelor.

$$k(ax^p + bx^q) \quad \text{dă} \quad kax^p + kbx^q.$$

Mulțimea $\mathfrak{P}$ a polinoamelor apare acum ca fiind un spațiu vectorial care are ca bază mulțimea $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^h, \ldots$, și pe $\mathfrak{R}$ ca mulțime a operatorilor (sau ca fiind un *modul*, dacă mulțimea coeficienților este doar un inel). Acest spațiu vectorial are deci o infinitate de dimensiuni. Dacă ne limităm însă la exponenți mai mici sau cel mult egali cu un p dat, este vorba de un spațiu cu $p + 1$ dimensiuni (Cartea I, cap.3).

Prin convenție, se presupune că termenul cu exponentul cel mai mare, care este scris efectiv, are coeficientul nenul (așa cum, la un număr scris în numerația cu baza zece și despre care se spune că are trei cifre, se presupune că cifra sutelor este nenulă). Exponentul cel mai mare se numește *gradul polinomului*. Dacă numim P polinomul, gradul lui se scrie $d(P)$. Uneori este important să considerăm termenul cu exponentul cel mai mic și cu coeficient nenul; acel exponent va fi notat $\delta(P)$.

Din însăși definiție rezultă că $d(P) \geqslant \delta(P)$, egalitatea realizîndu-se numai în cazul unui monom.

Cazul $d(P) = \delta(P) = 0$ corespunde monomului ax^0.

Polinomul nul Ω nu are grad.

Înmulțirea cu un număr nenul conservă $d(P)$ și $\delta(P)$. În cazul adunării, din regula de reducere a termenilor asemenea rezultă că $d(P_1 + P_2)$ este cel mult egal cu cel mai mare dintre gradele $d(P_1)$ și $d(P_2)$, iar $\delta(P_1 + P_2)$ este cel puțin egal cu cel mai mic dintre numerele $\delta(P_1)$ și $\delta(P_2)$, ceea ce se scrie

$$d(P_1 + P_2) \leqslant \sup\,[d(P_1),\ d(P_2)]$$
$$\delta(P_1 + P_2) \geqslant \inf\,[\delta(P_1),\ \delta(P_2)].$$

Mulțimea monoamelor ax^0 constituie un spațiu vectorial cu o dimensiune izomorf cu mulțimea numerelor reale; tocmai de aceea scriem, în general, elementul ax^0 sub forma a.

Cu baza formată din x^0 şi x^1 generăm un spaţiu cu două dimensiuni, cel al binoamelor de gradul întîi

$$ax^1 + bx^0, \text{ care se scrie, în general, } ax + b.$$

Cu x^0, x^1, x^2 generăm mulţimea trinoamelor de gradul doi $ax^2 + bx^1 + cx^0$, care se scrie, în general, $ax^2 + bx + c$ etc.

Schimbarea bazei. Din punctul de vedere al spaţiilor vectoriale, două polinoame sînt independente dacă nu există perechi de numere reale nenule r_1, r_2 astfel încît $r_1P_1 + r_2P_2$ să fie polinomul nul Ω, adică dacă coeficienţii lui P_1 şi P_2 *nu* sînt proporţionali. În particular, dacă gradele nu sînt egale, polinoamele sînt totdeauna independente. Dar singura bază cu adevărat simplă este cea formată din monoame cu coeficienţii egali cu unitatea; o vom numi *bază fundamentală* şi vom reveni ceva mai departe supra acestei noţiuni.

4) INELUL POLINOAMELOR. Mai introducem în mulţimea polinoamelor o operaţie notată cu semnul înmulţirii şi definită plecînd de la înmulţirea monoamelor şi de la distributivitatea acestei operaţii în raport cu adunarea monoamelor: este operaţia exprimată prin formula concisă (în care semnul $\sum$ indică suma):

$$\left(\sum_{i=p}^{i=n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=p'}^{j=n'} b_j x^j\right) \text{ dă } \sum a_i b_j x^{i+j},$$

unde se subînţelege că în membrul al doilea trebuie făcută reducerea termenilor asemenea, adică a termenilor care dau aceeaşi valoare $i + j$. Această reducere a termenilor asemenea se efectuează numai asupra termenilor de grade intermediare, fiindcă termenul de grad cel mai mare este exact

$$a_n b_{n'} x^{n+n'},$$

iar termenul de grad cel mai mic este $a_p b_{p'} x^{p+p'}$. De unde, formulele importante:

$$d(P_1P_2) = d(P_1) + d(P_2)$$
$$\delta(P_1P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2)$$

care sînt mai simple decît cele referitoare la suma polinoamelor.

Consecinţă. *Un produs de două polinoame este polinomul nul dacă şi numai dacă unul din factori este polinomul nul.* Într-adevăr, acesta este singurul caz în care produsul nu are grad.

Un produs de mai multe polinoame se definește în modul obișnuit, și se verifică (de pildă, printr-un raționament prin recurență) că este asociativ, comutativ și distributiv în raport cu adunarea polinoamelor. Mulțimea polinoamelor formează prin urmare un inel comutativ.

Pe baza asociativității, se demonstrează — ca la numere — că *un produs de polinoame este polinomul nul* Ω, *dacă și numai dacă* (*cel puțin*) *unul din factori este el însuși polinomul nul.*

Calculul practic al produsului. Se caută toate monoamele de un același grad — acest grad putînd lua toate valorile de la $d(P_1) + d(P_2)$ pînă la $\delta(P_1) + \delta(P_2)$ — și se fac, rînd pe rînd, toate reducerile.

Caz particular important. PUTERILE UNUI BINOM $ax + b$.

Așa cum se poate demonstra prin recurență, termenii polinomului obținut dezvoltînd $(ax + b)^n$ sînt toți monoame de forma

$$c_{n,p} a^p b^{n-p} x^p, \quad 0 \leqslant p \leqslant n,$$

unde numerele $c_{n,p}$ se obțin din tabelul numit *triunghiul lui Pascal*:

$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1
....

după formula

$$c_{n+1,\,p+1} = c_{n,p} + c_{n,\,p+1}.$$

Considerînd atunci termenii de grad p în $(ax + b)^k$ și $(ax + b)^{k+1}$ $(k > p)$, se verifică prin recurență după n formula

$$c_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p}.$$

Aceste numere, numite „coeficienții binomiali", se notează C_n^p sau $\binom{n}{p}$.

Formula astfel *verificată* a fost *descoperită* cînd ne-am ocupat de numărări (Cartea a II-a, Partea I, cap. 1, § 1).

5) SCHIMBAREA BAZEI FUNDAMENTALE. Convenim să numim bază fundamentală a spaţiului vectorial al polinoamelor nu numai baza $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, ci şi baza

$$(1x^1 - \alpha x^0)^0, \quad (1x^1 - \alpha x^0)^1, \quad (1x^1 - \alpha x^0)^2, \ldots, (1x^1 - \alpha x^0)^n, \ldots$$

scrisă prescurtat

$$(x - \alpha)^0, \ (x - \alpha)^1, \quad (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n, \ \ldots$$

unde α este un număr oarecare ales în corpul coeficienţilor. După ce se fac dezvoltările, expresiile acestea sînt polinoame de grade diferite, deci — polinoame independente. Să numim X binomul $x - \alpha$; celelalte polinoame ale bazei sînt puterile lui X. Noua expresie a unui polinom P se va obţine *înlocuind în P puterile lui x prin puterile lui $X + \alpha$, dezvoltînd aceste puteri şi reducînd termenii asemenea ai expresiei considerate drept un polinom în X.*

EXEMPLU. P este polinomul $2x^2 - 3x + 1$.

Obţinem

$$2(X + \alpha)^2 - 3(X + \alpha) + 1,$$

de unde, polinomul în X:

$$2X^2 + (4\alpha - 3)X + (2\alpha^2 - 3\alpha + 1).$$

În final, forma căutată este

$$2(x - \alpha)^2 + (4\alpha - 3)(x - \alpha) + (2\alpha^2 - 3\alpha + 1).$$

Trebuie însă să spunem că, în general, răspunsul se dă păstrînd polinomul în X. Unicitatea rezultatului este asigurată de proprietăţile spaţiului vectorial; de altfel, ceva mai departe, o vom putea demonstra şi direct. Ceea ce ne interesează acum este mai ales posibilitatea efectuării acestui calcul, care este fără excepţie.

Două remarci importante sînt imediate. 1) Polinoamele în x şi în X sînt de acelaşi grad, termenii de gradul cel mai mare avînd chiar şi coeficienţii egali. 2) Termenul de grad 0 este totdeauna numărul care s-ar obţine dacă am înlocui, în polinomul P, nedeterminata x cu numărul α şi am face cu numerele operaţiile care erau indicate ca trebuind să fie făcute cu monoamele. Numărul astfel calculat se numeşte *valoarea numerică a polinomului* cînd se înlocuieşte x cu α. Acest număr se scrie simbolic $P(\alpha)$. Asemenea valori numerice ataşate polinoamelor sînt atît de impor-

tante pentru cunoașterea polinomului, încît trebuie să le studiem încă înainte de a continua studiul inelului polinoamelor și de a defini în el împărțiri.

II. Valori numerice ale unui polinom. Divizibilitatea cu $(x - \alpha)$

Am definit mai sus valoarea numerică $P(\alpha)$ a unui polinom P cînd înlocuim în el nedeterminata cu $\alpha \in \mathcal{R}$, sau, cum se spune mai pe scurt, „valoarea pentru $x = \alpha$". Conform axiomelor alese, dacă S și Π sînt respectiv suma și produsul a două polinoame P_1 și P_2, avem, oricare ar fi numărul α,

$$S(\alpha) = P_1(\alpha) + P_2(\alpha)$$

și

$$\Pi(\alpha) = P_1(\alpha) \cdot P_2(\alpha)$$

(egalități numerice).

Dacă facem o schimbare de bază notînd cu X binomul $x - \alpha$ și dacă numim $T(X)$ polinomul format după regula indicată mai sus, rezultă — din paralelismul între calculul cu polinoame și calcul cu numere — că

$$\forall \beta \in \mathcal{R} : P(\beta) = T(\beta - \alpha).$$

În particular, luînd

$$\beta = \alpha, \quad P(\alpha) = T(0),$$

care este tocmai rezultatul pe care îl sesizasem deja prin calcul, fiindcă $T(0)$ este coeficientul termenului de grad 0 al polinomului T. Dar a spune că acest coeficient este nul este echivalent cu a spune că, după schimbarea bazei, $x - \alpha$ poate fi scos în factor:

Condiția $P(\alpha) = 0$ este echivalentă cu condiția de existență a unui polinom Q astfel încît P să fie dezvoltarea lui $(x - \alpha)Q$. Convenim să folosim semnul $\equiv$, pe care îl citim *„echivalent cu"*, pentru a exprima că niște expresii care conțin nedeterminata x formează, după dezvoltare și reducerea termenilor asemenea, un același polinom. Așadar, acest semn se deosebește net de semnul $=$ scris între două numere. Pe de altă parte, convenim să indicăm numele ales pentru nedeterminată plasîndu-l între paranteze: $P(x)$ este un polinom, dacă x este nedeterminata; același simbol reprezintă un număr dacă x este un număr. Enunțul nostru se scrie:

Teorema I:

$$[P(\alpha) = 0] \Longleftrightarrow [\exists Q(x) : P(x) \equiv (x - \alpha)Q(x)] \qquad (1)$$

Vom spune că $P(\alpha) = 0$ este condiţia necesară şi suficientă ca polinomul $P(x)$ să fie *factorizabil* (*decompozabil*) într-un produs în care unul din factori este $x - \alpha$. Exprimăm de asemenea acest fapt spunînd că polinomul $P(x)$ este *divizibil cu binomul* $(x - \alpha)$.

Un număr r astfel încît $P(r) = 0$ se numeşte *un zero al polinomului*; spunem, de asemenea, că r este *o rădăcină a ecuaţiei* $P(x) = 0$, iar nedeterminata x apare de data aceasta ca fiind *necunoscuta ecuaţiei*.

A căuta rădăcinile unei ecuaţii înseamnă *a o rezolva*. În fine, o ecuaţie în care unul din membri este 0 iar celălalt este un polinom se numeşte o *ecuaţie întreagă*.

În final, vedem că există o legătură strînsă între cele trei puncte de vedere: rezolvarea ecuaţiilor întregi, căutarea zerourilor unui polinom şi descompunerea într-un produs (factorizarea) a unui polinom.

Trebuie să mai notăm că dacă polinomul Q introdus mai sus este el însuşi astfel încît

$$Q(\alpha) = 0,$$

există un polinom Q_1 astfel încît

$$Q(x) \equiv (x - \alpha)Q_1(x),$$

de unde rezultă

$$P(x) \equiv (x - \alpha)^2 Q_1(x)$$

şi aşa mai departe. Dacă obţinem, în cele din urmă,

$$P(x) \equiv (x - \alpha)^m \Pi(x) \qquad (2)$$

cu

$$\Pi(\alpha) \neq 0,$$

spunem că α este un *zero de ordinul m* al lui P şi o *rădăcină de ordinul m* a ecuaţiei $P(x) = 0$; zerourile şi rădăcinile se numesc „simple" dacă $m = 1$, şi „multiple" dacă m este mai mare decît 1.

De remarcat că procedeul care foloseşte schimbarea de bază ne dă direct pe (2), fără a mai trece prin (1), prin intermediul polinomului $T(X)$.

Exemple de calcul:

Fie $P(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 34x^2 - 36x + 8$. El este astfel încît $P(2) = 0$.

Să înlocuim pe x cu binomul $X + 2$. Coeficienții lui $P(x)$ sînt scriși în ultima coloană a tabelului:

$(X+2)^5 \equiv$	X^5	$+10$	X^4 $+40$	X^3 $+80$	X^2 $+80$	X $+32$	$+1$
$(X+2)^4 \equiv$		$+1$	$+8$	$+24$	$+32$	$+16$	-3
$(X+2)^3 \equiv$			$+1$	$+6$	$+12$	$+8$	-7
$(X+2)^2 \equiv$				$+1$	$+4$	$+4$	$+34$
$X+2 \equiv$					$+1$	$+2$	-36
$1 \equiv$						$+1$	$+8$
$T(X) \equiv$	X^5	$+7$	X^4 $+9$	X^3 $+0$	X^2 $+0$	X $+0$	

de unde

$$P(x) \equiv (x-2)^3\,[(x-2)^2 + 7(x-2) + 9]$$

$$\equiv (x-2)^3\,[x^2 + 3x - 1].$$

Să reținem că polinomul $Q(x)$ din formula (1) va apărea, cînd vom studia diviziunea polinoamelor, ca fiind cîtul împărțirii lui $P(x)$ la $x - \alpha$. Vom vedea acolo și procedeul de calcul direct.

Teorema II. *Dacă un polinom P se anulează pentru valori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ diferite două cîte două, el este divizibil cu produsul*

$$(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,\ldots\,(x - \alpha_k).$$

Într-adevăr,

$$[P(\alpha_1) = 0] \Longleftrightarrow [\exists Q_1 : P(x) \equiv (x - \alpha_1)Q(x)].$$

De aici deducem

$$P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)\, Q_1(\alpha_2)$$

Or,

$$\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0,$$

prin urmare

$$[P(\alpha_2) = 0] \Longleftrightarrow [Q_1(\alpha_2) = 0] \Longleftrightarrow [\exists Q_2 : Q_1(x) \equiv (x - \alpha_2)Q_2(x)]$$

de unde, pe baza asociativităţii produsului de polinoame:

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)Q_2(x).$$

De aici deducem

$$P(\alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_1)\ (\alpha_3 - \alpha_2)\ Q_2(\alpha_3).$$

Or,

$$\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0 \text{ şi } \alpha_3 - \alpha_2 \neq 0,$$

prin urmare

$$[P(\alpha_3) = 0] \Longleftrightarrow [Q_2(\alpha_3) = 0] \Longleftrightarrow [\exists Q_3 : Q_2(x) \equiv (x - \alpha_3)\ Q_3(x)],$$

de unde

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\, Q_3(x)$$

şi aşa mai departe, pînă la

$$P(x) \equiv (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_k)\, Q_k(x).$$

Consecinţe fundamentale. 1) *Un polinom de grad n nu poate lua valoarea numerică* 0 *pentru mai mult de n valori atribuite lui x.*

Un polinom care ia valoarea 0 *pentru o infinitate de valori atribuite lui x nu poate fi decît polinomul* Ω, *care nu are grad.*

2) *Un polinom de grad n care admite n zeroruri* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *este polinomul care se obţine dezvoltînd*

$$a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ \ldots\ (x - \alpha_n) \equiv ax^n - a(\alpha_1 + \alpha_2 + \\ + \ldots + \alpha_n)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n.$$

Dacă polinomul ordonat este

$$P(x) \equiv ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_px^{n-p} + \ldots + a_nx^0$$

și notăm cu s_p suma produselor rădăcinilor luate cîte p, avem

$$a_1 = -as_1, \ldots, a_p = (-1)^p as_p, \ldots, a_n = (-1)^n as_n.$$

Așadar, coeficienții sînt expresii simetrice de rădăcini.

Corolar. *Dacă două polinoame P_1 de grad n_1 și P_2 de grad n_2 iau aceleași valori numerice pentru un număr k de valori ale lui x, și k este mai mare decît n_1 și n_2, polinoamele sînt formate din aceleași monoame* (și, în particular, $n_1 = n_2$).

Într-adevăr, $P_1 - P_2$ este un polinom de grad cel mult egal cu cel mai mare dintre gradele n_1 și n_2, și el ia valoarea 0 pentru cele k valori atribuite lui x.

APLICAȚII. Nu există decît un singur polinom de grad $(n - 1)$ care ia n valori numerice date pentru n valori date ale lui x.

Este ușor de construit un asemenea polinom; de exemplu, pentru $n = 2$, formăm expresia

$$p_1 \frac{x - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + p_2 \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

și obținem, într-adevăr, p_1 pentru $x = \alpha_1$ și p_2 pentru $x = \alpha_2$.

Pentru $n = 3$, extindem expresia și scriem

$$p_1 \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + p_2 \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + p_3 \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}$$

și așa mai departe. Teorema demonstrată ne arată că soluțiile scrise sînt singurele posibile. Ele există dacă inelul coeficienților este un corp.

CONCLUZIE. Două polinoame care pentru măcar o valoare atribuită nedeterminatei iau valori diferite, nu sînt constituite din aceleași monoame, și invers. Or, numim în general *identitate* o egalitate literală ai cărei doi membri iau aceeași valoare numerică pentru *orice* valori numerice atribuite literelor; spunem că cei doi membri sînt *identici*. Am arătat deci că *două polinoame identice*

sînt formate din aceleaşi monoame, fapt pe care îl exprimăm prin simbolul $\equiv$. Rezultă de aici că pentru a verifica că o egalitate este o identitate în raport cu o literă care intervine sub formă întreagă, este suficient să dezvoltăm cei doi membri şi să constatăm egalitatea coeficienţilor polinoamelor în care litera este considerată drept o nedeterminată.

REMARCĂ. Studiul de mai sus presupune inelul coeficienţilor destul de cuprinzător. Dacă, de exemplu, acesta este inelul claselor de resturi de întregi, modulo 2 (în care singurele numere distincte sînt 0 şi 1), polinomul $x^2 - x$ este nul oricare ar fi x! De remarcat că gradul 2 nu face parte din mulţimea în care sînt luaţi coeficienţii.

III. Împărţirea în inelul polinoamelor

1. Cît exact. Fie date două polinoame $A(x)$ şi $B(x)$; există oare un polinom-cît $Q(x)$ astfel încît $A \equiv BQ$? De la început, studiul acesta diferă profund de problema tratată pentru inelul întregilor, fiindcă nu dispunem de o relaţie de ordine totală. Este adevărat că putem clasifica polinoamele după ordinea crescătoare a gradelor, dar există o infinitate nenumărabilă de polinoame de un grad dat — dacă coeficienţii sînt luaţi în corpul numerelor reale, aşa cum presupunem noi.

Fără a demonstra *a priori* existenţa sau neexistenţa polinomului Q, vom căuta mai întîi monoamele succesive folosind condiţii necesare.

În primul rînd, *dacă Q există*, avem

$$d(Q) = d(A) - d(B), \text{ fie el} = n$$
$$\delta(Q) = \delta(A) - \delta(B), \text{ fie el} = p,$$

aşa că o condiţie necesară este

$$0 \leqslant \delta(A) - \delta(B) \leqslant d(A) - d(B) \text{ prin urmare } 0 \leqslant p \leqslant n;$$

aşadar numărul termenilor lui Q (termenii intermediari putînd însă să aibă şi coeficienţi nuli) este cunoscut, este egal cu $n - p + 1$. Scriem, prin urmare

$$Q \equiv q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_{p+1} x^{p+1} + q_p x^p.$$

Vom calcula coeficienții din aproape în aproape.

a) *Operăm în ordinea gradelor descrescătoare*, presupunînd mereu că Q există.

Introducem $Q \equiv q_n x^n + Q_1$, $d(Q_1) \leqslant n - 1$.

Din definiția lui Q rezultă

$$A \equiv q_n x^n B + Q_1 B, \quad d(Q_1 B) < n + d(B) = d(A);$$

prin urmare q_n este cunoscut: este cîtul împărțirii coeficientului gradului cel mai mare din A la coeficientul gradului cel mai mare din B.

Dar atunci Q_1 verifică

$$A_1 \equiv A - q_n x^n B \equiv Q_1 B, \quad d(A_1) < d(A).$$

Regăsim o operație de aceeași natură cu prima — pentru a calcula termenul de grad cel mai mare al lui Q_1, adică termenul al doilea al lui Q și așa mai departe.

Deoarece gradele deîmpărțiturilor parțiale $A, A_1, A_2, \ldots$ descresc, este sigur că operația se oprește; or, ea nu se poate opri decît dacă deîmpărțitul parțial obținut la un moment dat

$$A_i \equiv A_{i-1} - q_j x^j B$$

este de grad mai mic decît $d(B)$.

Atunci sînt posibile numai două cazuri: sau acest A_i nu este polinomul nul Ω, și atunci problema este imposibilă, fiindcă condițiile folosite sînt necesare, sau A_i este polinomul nul; în acest caz, adunînd membru cu membru identitățile folosite:

$$\begin{aligned} A &\equiv q_n x^n B + A_1 \\ A_1 &\equiv q_{n-1} x^{n-1} B + A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{i-1} &\equiv q_j x^j B + \Omega \end{aligned}$$

obținem

$$A \equiv (q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_j x^j) B;$$

prin urmare, polinomul calculat termen cu termen folosind condițiile necesare, satisface condiția din enunț: condițiile erau așadar

suficiente. Prin urmare, atunci cînd problema este posibilă, ştim să calculăm acel unic polinom Q care satisface enunţul.

b) *Dacă operăm în ordinea gradelor crescătoare*, studiul este absolut analog. Presupunînd că operaţia este posibilă, introducem

$$Q \equiv q_p x^p + Q_1', \ \delta(Q_1') \geqslant p + 1,$$

şi deducem imediat

$$A_1' \equiv A - q_p x^p B \equiv Q_1' B, \quad \delta(Q_1' B) > \delta(A),$$

unde q_p este cîtul termenilor cu gradele cele mai mici din A şi B. După aceea, continuăm în mod analog. Dar de data aceasta numerele $\delta(A_i)$ merg crescînd. Oare operaţia se opreşte? Dacă polinomul Q există, condiţiile noastre — care sînt necesare — dau coeficienţii lui Q, şi cînd vom fi găsit toţi termenii lui Q, ultimul deîmpărţit parţial va fi polinomul nul. Dacă problema este imposibilă, operaţia nu se opreşte, fiindcă $\delta(A_i)$, număr din ce în ce mai mare, este firește mai mare decît $\delta(B)$.

EXEMPLU DE OPERAŢIE ÎN CAZUL ÎN CARE Q EXISTĂ:

$A \equiv$	$x^5 + 3$	$x^4 + 0$	$x^3 + 5$	$x^2 - 7$	$x + 2$	$x^2 + 3x - 2 \equiv B$
	$-1 - 3$	$+ 2$				$x^3 + 2x - 1 \equiv Q$
$A_1 \equiv$		$+ 2$	$x^3 + 5$	$x^2 - 7$	$x + 2$	
		$- 2$	$- 6$	$+ 4$		
$A_2 \equiv$			$- 1$	$x^2 - 3$	$x + 2$	
			$+ 1$	$+ 3$	$- 2$	
$A_3 \equiv$				Ω		

Tot astfel, în ordinea gradelor crescătoare

$A \equiv$	$x^5 + 3$	$x^4 + 0$	$x^3 + 5$	$x^2 - 7$	$x + 2$	$x^2 + 3x - 2 \equiv B$
			$+ 1$	$+ 3$	$- 2$	$-1 + 2x + x^3 \equiv Q$
$A_1' \equiv$	$x^5 + 3$	$x^4 + 0$	$x^3 + 6$	$x^2 - 4$	x	
		$- 2$	$- 6$	$+ 4$		
$A_2' \equiv$	$x^5 + 3$	$x^4 - 2$	x^3			
-1	$- 3$	$+ 2$				
$A_3' \equiv$		Ω				

EXEMPLU DE OPERAȚIE IMPOSIBILĂ. Deși condiția

$$0 \leqslant \delta(A) - \delta(B) \leqslant d(A) - d(B)$$

este verificată, obținem:

În ordinea gradelor crescătoare:

$A \equiv$	$x^3 + 5$	$x^2 -$	$x + 1$	$3x^2 + x - 2 \equiv B$	
-1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}x + \frac{14}{9}$	
$A_1 \equiv$	$+\frac{14}{3}$	$x^2 - \frac{1}{3}$	$x + 1$		
	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{14}{9}$	$+\frac{28}{9}$		
$A_2 \equiv$		$-\frac{17}{9}$	$x + \frac{37}{9}$		

Calculul se oprește fiindcă

$$d(A_2) < d(B).$$

În ordinea gradelor descrescătoare:

$A \equiv$	$x^3 + 5$	$x^2 -$	$x + 1$	$3x^2 + x - 2 \equiv B$	
	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{25}{8}x^2$	
$A_1' \equiv$	$x^3 + \frac{13}{2}$	$x^2 - \frac{1}{2}$	x		
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$			
$A_2' \equiv$	$+\frac{1}{4}$	$x^3 + \frac{25}{4}$	x^2		
$+\frac{75}{8}x^4 + \frac{25}{8}$	$-\frac{25}{4}$				
$A_3' \equiv +\frac{75}{8}x^4 + \frac{29}{8}$	x^3				

Calculul continuă indefinit; termenul în x^{k+1} din A_k nu poate dispărea.

REMARCI

1) Calculul în ordinea gradelor crescătoare presupune doar că $d(A) \geqslant d(B)$, iar calculul în ordinea gradelor descrescătoare presupune doar că $\delta(A) \geqslant \delta(B)$.

2) Cîturile de coeficienţi efectuate în cursul calculelor trebuie să existe; tocmai de aceea presupunem coeficienţii luaţi într-un corp. Totuşi, la împărţirea în ordinea gradelor descrescătoare nu se împarte decît la coeficientul puterii celei mai mari a lui x din B: dacă acest coeficient este 1, coeficienţii pot fi luaţi într-un inel (exemplu: împărţirea la $x - \alpha$). O situaţie analoagă la împărţirea în ordinea gradelor crescătoare, în ceea ce priveşte coeficientul termenului de grad cel mai mic din B.

Cele două moduri de calcul conduc la două analize foarte diferite pe care le vom examina pe rînd.

2. Împărţirea euclidiană a polinoamelor. Calculul în ordinea gradelor descrescătoare ne dă, cu singura condiţie că $d(A) \geqslant d(B)$, o pereche de polinoame Q şi R care verifică

$$A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B).$$

R este ultimul deîmpărţit parţial obţinut; el este Ω dacă A este un multiplu al lui B, adică dacă împărţirea, operaţie inversă înmulţirii, este posibilă.

Unicitatea perechii Q, R rezultă din cele de mai sus, folosind observaţia că, în $A - R$, toţi termenii de grade mai mari decît $d(B)$ sînt termenii lui A. De altfel, putem demonstra şi direct această unicitate, calculul precedent nemaiservindu-ne atunci decît pentru a demonstra existenţa unei perechi-soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B) \\ A \equiv BQ' + R', \quad d(R') < d(B) \end{array}\right\} \Rightarrow B(Q-Q') + (R - R') \equiv \Omega$$

Or, dacă $Q - Q'$ nu este Ω, gradul primului termen este mai mare sau egal cu $d(B)$, în timp ce $d(R - R')$ este mai mic decît $d(B)$; suma nu poate fi Ω. Prin urmare, $Q \equiv Q'$, de unde rezultă $R \equiv R'$.

Ca şi la împărţirea întregilor, Q şi R se numesc respectiv *cîtul* şi *restul* operaţiei care poartă numele de *împărţire euclidiană:*

într-adevăr, algoritmul lui Euclid este posibil. Considerăm șirul de împărțiri:

$$A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B);$$
$$B \equiv RQ_1 + R_1, \quad d(R_1) < d(R);$$
$$R \equiv R_1Q_2 + R_2, \quad d(R_2) < d(R_1) \text{ etc.}$$

Deoarece gradele resturilor succesive descresc, algoritmul se termină în mod necesar: or, inegalitatea gradelor este tocmai condiția suficientă ca operația să fie posibilă! Prin urmare, singurul caz în care împărțirea nu este posibilă este cel în care se obține Ω ca rest. Așadar, acest caz survine după un număr finit de operații, și algoritmul se termină totdeauna cu

$$R_{n-1} \equiv R_nQ_{n+1} + R_{n+1},$$
$$R_n \equiv R_{n+1}Q_{n+2}.$$

Să numim D ultimul rest nenul R_{n+1}. Exact ca la întregi, se arată că există (cel puțin) o pereche de polinoame X și Y care verifică $XA + YB \equiv D$.

Aceste analogii ne conduc la considerarea următoarei probleme:

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR. Spunem că un polinom A este divizibil cu un polinom B dacă împărțirea euclidiană dă $R \equiv \Omega$, adică dacă există Q astfel încît

$$A \equiv BQ.$$

Să remarcăm însă că

$$A \equiv BQ \Longleftrightarrow A \equiv (\lambda B)\left(\frac{1}{\lambda}Q\right)$$

unde λ este un număr oarecare nenul.

EXEMPLU:

$$x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2) \equiv \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)(3x + 6).$$

Prin urmare, pentru a construi o teorie acceptabilă a divizibilității, trebuie să considerăm echivalente polinoamele ale căror coeficienți sînt proporționali (polinoame neindependente, din punctul de vedere al spațiului vectorial). Elementul neutru al

înmulţirii este atunci nu numai $1x^0$ (pe care îl scriem 1), ci şi λx^0 (pe care îl scriem λ), un număr real arbitrar nenul.

Ca şi la întregi, relaţia „A este multiplu al lui B" sau „B divide pe A" este o relaţie de ordine, fiindcă există tranzitivitate:

$$\left.\begin{array}{l} \exists Q : A \equiv BQ \\ \exists S : B \equiv CS \end{array}\right\} \rightarrow [\exists T : A \equiv CT].$$

În plus, dacă un polinom divide alte două polinoame, el divide şi suma lor. Prin urmare, rămîn valabile toate consecinţele algoritmului lui Euclid, inclusiv concluzia: dacă D este ultimul rest nenul, mulţimea polinoamelor divizori comuni ai lui A şi B este mulţimea divizorilor lui D. Acest polinom este polinomul divizor comun de gradul cel mai mare (fiindcă divizorii lui, dacă ei există, sînt de grad mai mic decît el). El se numeşte, prin analogie cu întregii, *cel mai mare divizor comun al lui A şi B*.

Spunem că A şi B sînt *primi între ei* dacă divizorul lor comun cel mai mare este elementul neutru al înmulţirii, adică, în cazul de faţă, λx^0. Restul următor în algoritm este, în mod necesar Ω.

Ca şi la întregi, se demonstrează teorema fundamentală: *dacă un polinom divide un produs de două polinoame şi este prim cu unul din ele, îl divide pe celălalt.*

Ne rămîne deci să întocmim lista completă a divizorilor unui polinom. Aici însă analogia cu întregii dispare: nu putem încerca toate polinoamele de grade mai mici fiindcă, de fiecare grad dat, există o infinitate nenumărabilă de polinoame.

Cum putem stabili că un polinom este sau nu factorizabil, şi, în cazul afirmativ, cum putem găsi toate descompunerile lui?

În primul rînd, trebuie să înţelegem clar că *posibilitatea de a descompune un polinom depinde de corpul în care sînt luaţi coeficienţii*: de exemplu, dacă a este un număr *pozitiv*, avem

$$x^2 - a \equiv (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}).$$

descompunere totdeauna posibilă dacă corpul coeficienţilor este mulţimea numerelor reale, dar nu totdeauna dacă acesta ar fi mulţimea numerelor raţionale.

Presupunînd în continuare pe a pozitiv, se vede uşor că $x^2 + a$ nu este factorizabil: într-adevăr,

$$x^2 + a \equiv (ux + v)(u'x + v') \equiv uu'x^2 + (uv' + u'v)x + vv'$$

cere, așa cum rezultă din condiția de identificare,

$$uu' = 1 > 0,\ vv' = a > 0,\ uv' + u'v = 0,$$

condiții incompatibile în corpul numerelor reale.

Singurele polinoame absolut nefactorizabile sînt polinoamele de gradul 1; deci polinoamele comparabile cu numerele prime sînt aceste polinoame simple; dar nu toate polinoamele pe corpul numerelor reale sînt factorizabile într-un produs de factori de gradul întîi. Adăugăm că a fost creat, prin extensie, un corp mai cuprinzător decît cel al numerelor reale și care se numește *corpul numerelor complexe* (sau imaginare), astfel încît toate polinoamele pe acest corp sînt produse de factori de gradul întîi. Analogia cu întregii este atunci perfectă, din punctul de vedere care ne interesează aici (vezi Cartea a III-a, cap.7).

Cele spuse mai sus nu sînt suficiente pentru a recunoaște, în cazul general, dacă un polinom este sau nu factorizabil. Tot ceea ce știm, este să stabilim dacă un polinom este divizibil cu un polinom *dat* — făcînd împărțirea, în cazul general, sau folosind o regulă mai simplă dacă acest polinom dat este de gradul întîi (divizibilitatea cu $x - \alpha$).

3. **Împărțirea în ordinea puterilor crescătoare.** Studiul este cu totul diferit de cel precedent, în care n-am considerat decît un singur rest privilegiat: ultimul rest al împărțirii, resturile intermediare fiind deîmpărțiturile parțiale. Acum însă operația se continuă indefinit și trebuie s-o analizăm în fiecare etapă. (A nu se face confuzie cu algoritmul lui Euclid! noi vorbim de o împărțire: așadar, divizorul rămîne mereu același.)

Amintim că procedeul de calcul este următorul.

Se presupune că polinoamele A și B sînt astfel încît $\delta(A) - \delta(B) = p$ este pozitiv. Determinăm

q'_p astfel încît $A'_1 \equiv A - q'_p x^p B$ verifică $\delta(A'_1) > p$,

q'_{p+1} astfel încît $A'_2 \equiv A'_1 - q'_{p+1} x^{p+1} B$ verifică $\delta(A'_2) > \delta(A'_1)$

și așa mai departe.

Scoțînd în factor termenul de grad cel mai mic din B, putem reduce problema la cazul $\delta(B) = 0$, sau putem presupune că termenul de grad cel mai mic din B este $1x^0 = 1$. Atunci condițiile scrise exprimă că q'_p este ales astfel încît să facă să dispară din A'_1 termenul de grad p; q'_{p+1} este astfel ales încît să facă să dispară din A'_2 termenul de grad $p + 1$ etc.

Prin urmare, dacă Q'_i este mulţimea termenilor obţinuţi pînă la etapa care dă

$$Q'_i \equiv q'_p x^p + q'_{p+1} x^{p+1} + \ldots + q'_{p+i} x^{p+i},$$

$$A'_{i+1} \equiv A'_i - q'_{p+i} x^{p+i} B, \quad \delta(A'_{i+1}) > p + i.$$

Obţinem

$$A \equiv BQ'_i + A'_{i+1}, \quad \delta(A'_{i+1}) > d(Q').$$

Să definim deci operaţia: fiind date polinoamele A şi B cu $\delta(B) = 0$ şi alegînd un întreg n, definim polinoamele Q' şi A' prin

$$A \equiv BQ' + A', \; d(Q') = n, \quad \delta(A') > n.$$

Unicitatea soluţiei rezultă din condiţiile necesare puse în evidenţă. Putem totuşi da şi o demonstraţie directă: fie o pereche $\{Q'', A''\}$ care verifică aceleaşi condiţii, cu acelaşi număr n; prin scădere obţinem:

$$B(Q' - Q'') + (A' - A'') \equiv \Omega, \quad d(Q' - Q'') \leqslant n.$$

Atunci

$$\delta(B) = 0$$

implică

$$\delta[B(Q' - Q'')] \leqslant n,$$

prin urmare

$$\delta(A' - A'') \leqslant n,$$

inegalitate care nu este compatibilă cu

$$\delta(A') > n, \quad \delta(A'') > n$$

decît dacă avem

$$A' \equiv A''$$

şi, ca o consecinţă,

$$Q' \equiv Q''.$$

Operaţia ne furnizează identităţi foarte importante, pe care le vom regăsi cînd vom studia fracţiile raţionale. Cele mai remarcabile sînt cele în care divizorul este de forma $\lambda x + 1$.

EXEMPLU. $A \equiv 1$, $B \equiv -x + 1$. Efectuăm operația după următoarea schemă:

$$\begin{array}{l|l} A \equiv 1 & B \equiv 1 - x \\ \quad -1 + x & \hline 1 + x + x^2 \\ \hline A_1' \equiv \quad +x & \\ \quad -x + x^2 & \\ \hline A_2' \equiv \quad x^2 & \\ \quad -x^2 + x^3 & \\ \hline A_3' \equiv \quad x^3 & \end{array}$$

$$1 \equiv (1 - x)(1) + x, \quad n = 0$$

$$1 \equiv (1 - x)(1 + x) + x^2, \quad n = 1$$

$$1 \equiv (1 - x)(1 + x + x^2) + x^3, \quad n = 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \equiv (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) + x^{n+1}, \quad \forall n \text{ întreg}$$

Dar legea de succesiune a coeficienților nu mai apare la fel de simplu cînd divizorul este un polinom oarecare!

IV. Fracții raționale cu o nedeterminată

Așa cum un număr rațional se definește cu ajutorul perechilor de întregi, pe baza relației de echivalență

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow ab' = ba',$$

tot astfel, plecînd de la perechi de polinoame, se introduce *fracția rațională algebrică*

$$\frac{A}{B} \equiv \frac{A'}{B'} \Longleftrightarrow AB' \equiv BA'.$$

Din motive tipografice, vom scrie uneori A/B.

În particular, dacă A este un multiplu al lui B, adică dacă există un polinom Q astfel încît $A \equiv BQ$, avem $A/B \equiv Q$.

Dacă A nu este multiplu al lui B, împărțirea euclidiană

$$A \equiv BQ + R, \quad d(R) < d(B)$$

dă

$$\frac{A}{B} \equiv Q + \frac{R}{B}, \quad d(R) < d(B).$$

O asemenea identitate (adică: egalitate pentru orice valoare a lui x) se dovedeşte foarte importantă în studiul funcţiilor şi al graficelor acestora. Inegalitatea referitoare la grade va arăta că pentru valorile lui x foarte mari în valoare absolută, valoarea luată de fracţia raţională din membrul al doilea este mică, aşa că polinomul $Q(x)$ dă atunci valori aproximative satisfăcătoare.

Împărţirea în ordinea gradelor crescătoare, oprită în etapa în care cîtul este de grad n, dă

$$A \equiv BQ_n + R_n, \quad \delta(R_n) > d(Q_n),$$

presupunînd că

$$\delta(B) = 0,$$

de unde deducem

$$\frac{A}{B} \equiv Q_n + \frac{R_n}{B}, \quad \delta(R_n) > d(Q_n).$$

Identitatea are deci forma

$$\frac{A}{B} \equiv (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n) + \frac{x^{n+1}(\gamma_0 + \gamma_1x + \ldots + \gamma_kx^k)}{b_0 + b_1x + \ldots + b_px^p} \qquad (1)$$

cu $b_0 \neq 0$.

Dacă atribuim lui x o valoare α foarte puţin diferită de 0, fracţia raţională din membrul al doilea dă, pentru n suficient de mare, valori mici (ca urmare a prezenţei factorului x^{n+1}), aşa că polinomul Q_n dă o bună valoare aproximativă a valorii lui $A(\alpha)/B(\alpha)$.

Toate acestea vor fi formulate mai precis în Analiză, după ce vom studia limitele. Deocamdată spunem doar că a scrie fracţia raţională sub forma (1) înseamnă *„a dezvolta fracţia raţională după puterile lui x pînă la ordinul n“*.

Teoria divizibilităţii polinoamelor conduce la proprietăţi importante ale fracţiilor raţionale: ea rezolvă problema simplificării fracţiilor raţionale prin împărţirea celor doi termeni cu un divizor comun. Ea face posibile, de asemenea, o serie de transformări foarte utile în analiză; de exemplu, am văzut că dacă A şi B

sînt polinoame prime între ele, algoritmul lui Euclid dă două polinoame X și Y astfel încît $AX + BY \equiv 1$; aceasta înseamnă că putem obține descompunerea în sumă

$$\frac{1}{AB} \equiv \frac{Y}{A} + \frac{X}{B} \text{ de unde } \frac{N}{AB} \equiv \frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{B}.$$

V. Polinoame și fracții raționale cu mai multe nedeterminate

Un polinom cu mai multe nedeterminate este o expresie care este un polinom în raport cu fiecare nedeterminată, coeficienții respectivi fiind luați în inelul polinoamelor formate cu celelalte nedeterminate. El este prin urmare o sumă de monoame, adică o sumă de produse de forma

$$ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt întregi pozitivi sau nuli. Numerele a sînt *coeficienții* polinomului. *Gradul* polinomului este cel mai mare dintre numerele $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ care corespund unui coeficient nenul.

Teoremă. *Dacă un polinom P ia valoarea 0 oricare ar fi valorile atribuite nedeterminatelor, toți coeficienții lui sînt nuli.* Într-adevăr, teorema este adevărată pentru o nedeterminată și se demonstrează prin recurență, fiindcă coeficienții polinomului considerat drept un polinom în x_1 sînt polinoame cu $n - 1$ nedeterminate care se anulează, și ele, pentru orice valori ale acestor nedeterminate.

Prin urmare, teorema fundamentală cu privire la polinoamele identice rămîne valabilă.

În ceea ce privește divizibilitatea, vom demonstra numai teorema următoare, pe care o enunțăm mai întîi pentru două nedeterminate x și y.

Teoremă. *Dacă un polinom P cu două nedeterminate x și y ia valoarea 0 pentru $x = \alpha$, $\forall y$ și pentru $y = \beta$, $\forall x$, el este divizibil cu $(x - \alpha)(y - \beta)$.*

Într-adevăr, am remarcat că împărțirea la $x - \alpha$ a polinomului cu o variabilă nu necesită nici o împărțire de coeficienți. Prin urmare, dacă considerăm P drept un polinom în x cu coeficienții

aparţinînd inelului polinoamelor în y, putem face împărţirea. Deoarece polinomul este nul pentru $x = \alpha$, această împărţire dă

$$P(x, y) \equiv (x - \alpha)Q_1(x, y).$$

Dar $P(x, \beta)$ este nul oricare ar fi x, în particular este nul pentru $x \neq \alpha$, prin urmare $Q_1(x, \beta)$ este nul oricare ar fi x, ceea ce dovedeşte, ca mai sus, că $Q_1(x, y)$ este divizibil cu $y - \beta$:

$$\exists Q_2(x, y) : Q_1(x, y) \equiv (y - \beta)\, Q_2(x, y).$$

Deducem de aici

$$P(x, y) \equiv (x - \alpha)(y - \beta)Q_2(x, y).$$

Generalizarea la un număr oarecare de nedeterminate se face fără dificultate. Trebuie notat, de altfel, că în demonstraţia precedentă polinoamele considerate în x şi y pot avea coeficienţii luaţi în inelul polinoamelor referitoare la alte nedeterminate $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Însă teoria bazată pe împărţirea euclidiană şi pe algoritmul lui Euclid nu mai este aplicabilă, aşa cum rezultă clar din exemplul următor: polinoamele de două nedeterminate $P \equiv x$ şi $Q \equiv y$ ar trebui considerate, evident, ca fiind prime între ele; or, nu există nici o pereche de polinoame $X(x, y)$ şi $Y(x, y)$ care să asigure echivalenţa

$$xX(x, y) + yY(x, y) \equiv 1,$$

fiindcă primul membru nu poate avea un termen de grad 0.

Fracţiile raţionale cu mai multe variabile se definesc pornind de la polinoame ca în cazul unei singure nedeterminate.

Metoda coeficienţilor necunoscuţi. Teorema despre identitatea polinoamelor se dovedeşte utilă în probleme de tipul următor: Care este condiţia ca $P \equiv x^4 + ax^2y^2 + by^4 + cx^2 + dy^2 + e$ să fie divizibil cu $x^2 + 3y^2 - 1$?

Examinarea gradelor ne arată că, dacă există, cîtul este de forma $ux^2 + vy^2 + w$; coeficienţii lui sînt necunoscuţi. Îl determinăm *identificînd* P şi produsul

$$(x^2 + 3y^2 - 1)\ (ux^2 + vy^2 + w)$$

și pentru aceasta *egalăm* coeficienții termenilor asemenea.

$$\begin{cases} u = 1 \\ 3u + v = a \\ 3v = b \\ w - u = c \\ 3w - v = d \\ -w = e \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{b}{3} \\ w = -e \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a = 3 + \dfrac{b}{3} \\ c = e - 1 \\ d = -\left(3e + \dfrac{b}{3}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

Așadar, doi coeficienți rămîn arbitrari, de exemplu b și e. În funcție de ei deducem valorile necesare pentru a, c, d, iar cîtul este

$$x^2 + \frac{b}{3}y^2 - e.$$

VI. Notă despre introducerea trigonometriei în problemele de algebră.

Rigiditatea formulelor referitoare la polinoame și fracții raționale este o calitate prețioasă, fiindcă face din fiecare polinom un obiect matematic care nu poate fi înlocuit cu un altul; identitățile se verifică prin comparare termen cu termen, *cu condiția ca literele care figurează să fie independente*, adică să nu fie legate prin vreo relație care impune valori anumitor litere, cînd valorile altor litere sînt date. (Pentru a verifica o identitate, trebuie să avem totdeauna grijă să nu lăsăm în expresia ei decît litere independente.) Din contra, supleţea formulelor trigonometrice permit dirijarea calculelor în vederea atingerii unor obiective determinate: evitarea radicalilor, punerea sub formă de produs, scăderea gradului etc. De aceea se întîmplă foarte frecvent să fie avantajos să introducem în calculele algebrice anumite *unghiuri auxiliare*, și aceasta chiar independent de existența unei interpretări geometrice adecvate, care uneori, este suficientă pentru a justifica procedeul.

1. **Un singur număr.** Oricare ar fi numărul a, îi putem totdeauna asocia un unghi α prin relația $a = \operatorname{tg} \alpha$; corespondența devine biunivocă dacă îi adăugăm condiția $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Dacă a este cuprins între -1 şi $+1$, putem pune

$$a = \cos \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < \pi \text{ sau } a = \sin \alpha,\ -\pi/2 < \alpha \leqslant \pi/2.$$

Procedeul se aplică mai ales pentru a evita introducerea rădăcinilor pătrate, graţie formulelor

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},\ 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha,\ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

care permit să se evite extragerea rădăcinii pătrate din polinoamele

$$1 + x^2,\ 1 - x^2,\ x^2 - 1,$$

şi, în consecinţă, din orice polinom de gradul doi, pe baza identităţii care transformă $ax^2 + bx + c$ într-o sumă sau într-o diferenţă de pătrate, dintre care numai unul conţine pe x.

2. **Două numere.** *Se defineşte o corespondenţă biunivocă între perechile* (a, b) *de numere reale şi perechile* (r, α) *formate dintr-un număr real şi un unghi, cu ajutorul formulelor*

$$a = r \cos \alpha,\quad b = r \sin \alpha$$

unde fie $0 \leqslant \alpha < \pi$, *fie* $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

În ambele variante, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, după care se calculează r din una din egalităţile scrise, însă în primul caz unghiul este determinat şi semnul lui r se deduce în concordanţă cu α, în timp ce în cazul al doilea α trebuie ales în aşa fel încît $\cos \alpha$ să aibă semnul lui a (ceea ce face ca, automat, $\sin \alpha$ să aibă semnul lui b.)

Firește, în ambele cazuri $r^2 = a^2 + b^2$.

EXEMPLE DE APLICAŢII

Fie

$$P(x, y) \equiv ax + by$$

Introducînd r, α, ρ, φ prin

$$\begin{cases} a = r \cos \alpha \\ b = r \sin \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

polinomul $P(x, y)$ devine

$$r\rho \cos(\varphi - \alpha).$$

În mod analog,

$$a(x^2 - y^2) + 2bxy$$

devine

$$r\rho^2 \cos(2\varphi - \alpha).$$

Polinoamele omogene în x și y (adică cele care au toți termenii de același grad) și fracțiile raționale care au ca termeni asemenea polinoame se transformă introducînd multipli ai unui arc, ceea ce coboară gradul expresiei.

EXEMPLU

$$E \equiv ax^2 + bxy + cy^2,$$

prin

$$x = \rho \cos \varphi, \; u = \rho \sin \varphi$$

devine

$$E = \frac{\rho^2}{2}[(a - c) \cos 2\varphi + b \sin 2\varphi + (a + c)].$$

Introducînd atunci

$$a - c = r \cos \alpha, \; b = r \sin \alpha,$$

obținem

$$E = \frac{r\rho^2}{2}\left[\cos(2\varphi - \alpha) + \frac{a + c}{r}\right].$$

În cazul în care $(a + c)/r < 1$, putem introduce în continuare $(a + c)/r = \cos \beta$ și obținem

$$E = r\rho^2 \cos\left(\varphi - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\varphi - \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Vom alege totdeauna forma cea mai adecvată în funcție de scopul urmărit.

3. **Introducerea tangentei.** În cazul fracțiilor raționale în $\cos \alpha$ și $\sin \alpha$ care au la numărător și numitor polinoame omogene de același grad, se introduce pur și simplu $\operatorname{tg} \alpha$ — după împărțirea celor doi termeni cu o putere convenabilă a lui $\cos \alpha$. Dar înlocuirea aceasta este posibilă și în cazuri mai generale, dacă expre-

siile pot fi reduse la cazul omogen cu termeni de acelaşi grad, folosind identitatea

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

care permite modificarea gradului, păstrînd paritatea termenilor.

EXEMPLU

$$\frac{\cos^3\alpha - \sin \alpha}{2\cos^5\alpha + \sin^3\alpha} = \frac{[\cos^3\alpha - \sin \alpha(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)]\ (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2\cos^5 \alpha + \sin^3 \alpha\ (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} =$$

$$= \frac{[1 - \operatorname{tg} \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]\ (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 + \operatorname{tg}^3 \alpha\ (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$$

după care putem reveni la algebră introducînd $\operatorname{tg} \alpha = t$.

4. **Cazuri de simetrie sau de pseudosimetrie.** Aşa cum în algebră, atunci cînd există simetrie între x şi y, introducem suma şi produsul, $x + y = s$, $xy = p$ şi considerăm că x şi y sînt perechea de rădăcini ale ecuaţiei $u^2 - su + p = 0$, tot aşa, atunci cînd este vorba de două unghiuri φ şi ψ care intervin simetric, introducem suma şi diferenţa lor (sau, mai adesea, semisuma şi semidiferenţa), aceasta din urmă apărînd printr-un cosinus, pentru a respecta simetria. Vom spune că există pseudosimetrie dacă simetria este violată numai prin cîteva schimbări de semne care sînt astfel încît putem încă introduce suma şi diferenţa unghiurilor, aceasta din urmă apărînd însă nu numai prin cosinusul ei, ci şi prin sinusul ei.

Caz particular. EXPRESIE SIMETRICĂ ÎN $\sin\varphi$ ŞI $\cos\varphi$. Ea este simetrică în φ şi $\frac{\pi}{2} - \varphi$, aşa că introducem $\varphi - \frac{\pi}{4}$ folosind

$$\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

şi

$$\cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \cos 2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

(ceea ce revine la schimbarea originii unghiurilor, luînd ca nouă origine prima bisectoare a axelor vechi).

După aceea revenim la algebră notînd

$$u = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

de unde

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\,u, \quad \cos\varphi \sin\varphi = u^2 - \frac{1}{2}.$$

Dacă păstrăm $\varphi - \frac{\pi}{4} = \psi$, obținem

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\psi, \quad \cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\psi$$

și, de asemenea

$$\cos\varphi - \sin\varphi = -\sqrt{2}\sin\psi.$$

Trebuie însă spus că numai o experiență suficientă în ceea ce privește calculele trigonometrice poate permite folosirea cu oarecare virtuozitate a acestor procedee.

CAPITOLUL 2

REZOLVAREA ECUAȚIILOR

I. Definiții

În cele ce urmează, literele P, Q, ... vor desemna, dacă nu se va specifica altfel, polinoame, sau fracții raționale sau — într-un mod mai general — expresii algebrice sau chiar trigonometrice pentru care operațiile folosite au fost definite. Se presupune că aceste expresii iau valori numerice bine determinate pentru orice sistem de valori $x_0, y_0, z_0, \ldots$ ale nedeterminatelor $x, y, z, \ldots$ care figurează în ele. Pentru a simplifica scrierea, vom presupune trei nedeterminate. Valoarea numerică $P(x_0, y_0, z_0)$ va fi notată P_0.

Coeficienții expresiilor sînt luați într-o submulțime $\mathcal{C}$ a numerelor reale; valorile atribuite nedeterminatelor sînt luate într-o mulțime $\mathcal{E}$ a numerelor reale, care poate fi $\mathcal{C}$ sau o extensie a lui $\mathcal{C}$: de exemplu, presupunînd coeficienții întregi, acceptăm pentru nedeterminate valori raționale, sau valori de forma $a + b\sqrt{c}$, cu a, b, c raționale, sau acceptăm orice număr real.

Presupunem deci $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$.

Identitate. Dacă, oricare ar fi sistemul de valori x_0, y_0, z_0 din $\mathcal{E}$ atribuite nedeterminatelor, $P(x_0, y_0, z_0) = Q(x_0, y_0, z_0)$, vom spune că, pe $\mathcal{E}$, expresiile $P(x, y, z)$ și $Q(x, y, z)$ sînt *identice*. Aceasta se scrie $P(x, y, z) \equiv Q(x, y, z)$, dacă $\mathcal{E}$ a fost definit în prealabil.

EXEMPLU: $x \equiv \sqrt{x^2}$ dacă $\mathcal{E}$ este mulțimea numerelor reale pozitive, dar este fals pe mulțimea numerelor reale de semne oarecare.

Ecuație. În general, două expresii nu sînt identice; atunci se pune problema de a ști pentru care sisteme de valori ale nedeterminatelor, P și Q iau aceeași valoare numerică. A găsi toate mulțimile $\{x_0, y_0, z_0\}$ astfel încît $P_0 = Q_0$ înseamnă *a rezolva ecuația*

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z).$$

Fiecare mulțime $\{x_0, y_0, z_0\}$ se numește *o soluție a ecuației.*

În mod analog, *a rezolva un sistem de ecuații*

$$\left|\begin{array}{l} P = Q \\ R = S \\ \ldots\ldots \\ L = M \end{array}\right.$$

înseamnă a căuta toate mulțimile de valori (x_0, y_0, z_0) care sînt soluții ale tuturor ecuațiilor. Fiecare din aceste mulțimi se numește *o soluție a sistemului.*

În cele ce urmează, vom presupune că mulțimea $\mathcal{C}$ în care sînt luați coeficienții este un *corp* (este posibilă împărțirea, cu excepția împărțitorului zero). Valorile atribuite nedeterminatelor — care aici se numesc *necunoscute* — sînt luate în mulțimea $\mathcal{S}$ care rămîne să fie precizată; astfel, putem examina existența și numărul soluțiilor ecuațiilor

$$2x + 3 = 0, \quad x^2 - 4 = 0, \quad x^2 - 3 = 0, \quad x^2 + 3 = 0$$

în mulțimile N, Z, Q^+, Q sau R.

Ultima ecuație are două soluții dacă $\mathcal{S}$ este mulțimea numerelor complexe (Cartea a III-a, cap. 7).

II. Echivalența ecuațiilor

Spunem că două ecuații sînt echivalente în raport cu o aceeași mulțime $\mathcal{S}$ dacă ele au aceleași soluții în această mulțime. O definiție analoagă pentru sisteme.

REMARCĂ. Din punctul de vedere axat pe noțiunea de mulțime, ecuațiile

$x^2 - 4 = 0$ și $x - 2 = 0$ sînt echivalente în R^+,

$x - 2 = 0$ și $(x - 2)^2 = 0$ sînt echivalente în R.

Dar în geometria curbelor algebrice studiate pe ecuaţiile lor, sistemele

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = (x-2)^2, \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ y^3 = (x-2)^2, \end{cases},$$

corespund unor situaţii distincte din punctul de vedere al *ordinului de multiplicitate* (Cartea a II-a, Partea a II-a, cap.1) şi al *contactului* (Cartea a III-a, cap. 3). În acest caz, numai teorema IV din cele care urmează este adecvată.

În cele ce urmează, adoptăm punctul de vedere bazat pe noţiunea de mulţime.

Presupunem mulţimea $\mathfrak{S}$ specificată, aşa că P, Q, ... sînt definite, ele iau valori determinate P_0, Q_0, ... pentru toate valorile atribuite nedeterminatelor în $\mathfrak{S}$. De pildă, dacă intervine un radical, expresia din care se extrage rădăcina pătrată trebuie să fie nenegativă pentru orice element din $\mathfrak{S}$. De asemenea, nici un numitor nu trebuie să se anuleze. Aceste valori interzise se exclud încă înainte de analiză.

Teorema I. *Oricare ar fi expresia R, ecuaţiile $P = Q$ şi $P + R = Q + R$ sînt echivalente.*

Într-adevăr, operaţiile cu expresiile au fost alese cu aceeaşi structură ca operaţiile cu numerele, aşa că

$$[P_0 = Q_0] \Longleftrightarrow [P_0 + R_0 = Q_0 + R_0]$$

Teorema II. Cunoaştem implicaţia

$$[P_0 = Q_0] \Longrightarrow [P_0 R_0 = Q_0 R_0],$$

dar implicaţia inversă *se descompune*:

$$[P_0 R_0 = Q_0 R_0] \Longrightarrow [R_0 = 0 \text{ sau (neexclusiv) } P_0 = Q_0]$$

(Prin „neexclusiv" vrem să spunem că cele două posibilităţi nu se exclud în mod necesar; ele pot fi adevărate simultan.)

De unde enunţurile:

1) *Ecuaţia $PR = QR$ se descompune în $R = 0$ şi $P = Q$.* Altfel spus, mulţimea soluţiilor lui $PR = QR$ este reuniunea mulţimii soluţiilor lor $R = 0$ şi a mulţimii soluţiilor lui $P = Q$.

2) Dacă R nu ia valoarea 0 pe $\mathfrak{S}$, ecuaţiile $PR = QR$ şi $P = Q$ sînt echivalente.

Teorema III. Știm că

$$P_0^2 = Q_0^2 \iff [P_0 = Q_0 \text{ sau } P_0 = -Q_0]$$

de unde enunțurile:

1) *Ecuația* $P^2 = Q^2$ *se descompune în* $P = Q$ și $P = -Q$.

2) Pe o mulțime în care P_0 și Q_0 au același semn, ecuațiile $P^2 = Q^2$ și $P = Q$ sînt echivalente.

Aplicații ale acestor teoreme. 1) Posibilitatea de a găsi o ecuație cu 0 în membrul al doilea, echivalentă cu o ecuație dată. („Trecem toți termenii în unul din membri".)

2) Înlocuirea unei ecuații cu numitori printr-o ecuație fără numitori. Dacă membrii erau fracții raționale, cei ai ecuației nou formate sînt polinoame. Ecuația se numește atunci *ecuație întreagă*. Ea se scrie $P = 0$, unde P este un polinom.

3) Sesizarea posibilității de a descompune o ecuație.

4) Trecerea de la o ecuație care conține una sau două rădăcini pătrate, la o ecuație fără radicali: în acest scop, se izolează un radical, apoi se ridică cei doi membri la pătrat: dacă radicalul era unic, el dispare; dacă mai există un radical, rămîne numai unul și procedeul este aplicat din nou. Dar dacă existau 3 radicali, atunci — în general — rămîn tot atîția. Obligația de a studia semnele — ceea ce uneori este destul de complicat — justifică REGULA PRACTICĂ: ÎN PROBLEMELE DE MATEMATICĂ ELEMENTARĂ, NU TREBUIE NICIODATĂ INTRODUȘI RADICALI DIN NECUNOSCUTE.

De exemplu, a scrie $x > 3$, $\sqrt{x-3} = x + a$ (cu intenția de a-i găsi soluțiile) înseamnă a adopta o metodă greșită de a rezolva sistemul

$$\begin{cases} y^2 = x - 3 \\ y = x + a \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{care trebuie transformat în} \quad \begin{cases} x = y - a \\ y^2 = y - a - 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

De remarcat că $x > 3$, $\sqrt{x-3} = x + a$ este echivalent cu

$$x + a \geqslant 0, \quad (x - 3) = (x + a)^2$$

ceea ce face inutilă păstrarea inegalității $x > 3$ care e asigurată automat de ecuație.

Teorema IV. Teorema combinaţiei liniare.

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases} \textit{ este echivalent cu } \begin{cases} P = 0 \\ aP + bQ = 0 \end{cases} \textit{ cu condiţia } b \neq 0.$$

Exprimăm deci că Q intervine efectiv în combinaţie.
Demonstraţia este imediată, după modelul de mai sus.

Teorema V. Teorema substituţiei

$$\text{(I)} \begin{cases} x = F(y, z) \\ P(x, y, z) = 0 \\ Q(x, y, z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ S(x, y, z) = 0 \end{cases} \textit{este echivalent cu} \quad \text{(II)} \begin{cases} x = F(y, z) \\ P[F(y, z), y, z] = 0 \\ Q[F(y, z), y, z] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S[F(y, z), y, z] = 0 \end{cases}$$

A trece de la (I) la (II) înseamnă *a elimina pe x între ecuaţii*, adică a forma un sistem în care numai una din ecuaţii îl conţine pe x: din celelalte ecuaţii această literă x a dispărut. Teorema IV este folosită, între altele, şi la efectuarea unor asemenea eliminări.

A trece de la (II) la (I) înseamnă *a introduce pe x ca necunoscută auxiliară*.

Pentru a introduce o necunoscută auxiliară $x = F(y, z)$, expresia F trebuie în prealabil pusă în evidenţă în ecuaţiile în y şi z.

EXEMPLU. Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
Primul membru se poate scrie şi sub forma

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Putem deci introduce necunoscuta auxiliară u definită prin $u = x + b/2a$ şi putem folosi

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ u = x + \dfrac{b}{2a} \end{cases} \quad \text{echivalent cu} \quad \begin{cases} x = u - \dfrac{b}{2a} \\ u^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{cases}$$

REMARCĂ. Introducerea unei necunoscute auxiliare u date printr-o relaţie $u = x + h$ se poate face înlocuind pe x cu binomul $u - h$. Tot astfel putem introduce o necunoscută auxiliară u prin

$x = f(u)$, dar se poate întîmpla ca valori distincte ale lui u să dea o aceeași valoare a lui x; în asemenea cazuri se precizează mulțimea în care este luat u în așa fel încît să se asigure o *corespondență biunivocă între x și u*. De exemplu, dacă introducem unghiul u prin $x = \cos u$, vom impune $0 \leqslant u < \pi$.

III. Ecuații și sisteme clasice

A) Ecuații fundamentale

($\mathbb{S}$ este aici mulțimea numerelor reale).

1) ECUAȚIA AFINĂ CU O NECUNOSCUTĂ: $ax + b = 0$

$a \neq 0$ [$x = -b/a$: o soluție

$a = 0$ | $b \neq 0$ nici o soluție (imposibilitate)
| $b = 0$ orice x_0 este soluție (nedeterminare).

2) ECUAȚIA BINOMĂ: $x^n = k$, n întreg pozitiv.

$k > 0$ [n impar $x = \sqrt[n]{k}$ o soluție
n par { $x' = \sqrt[n]{k}$, $x'' = -\sqrt[n]{k}$ două soluții

$k < 0$ [n impar $x = -\sqrt[n]{-k}$ o soluție
n par nici o soluție

$k = 0$ $x = 0$ o soluție.

3) SISTEM DE DOUĂ ECUAȚII AFINE CU DOUĂ NECUNOSCUTE:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Dacă unul din coeficienții necunoscutelor este nenul, de exemplu $a \neq 0$, folosirea teoremei IV sau a teoremei V permite eliminarea lui x și reduce totul la o ecuație în y care fie admite o soluție, fie este imposibilă, sau nedeterminată. Dacă cei patru coeficienți ai necunoscutelor sînt nuli, sistemul este — evident — imposibil, cu excepția cazului de nedeterminare completă $c = c' = 0$.

Sistemul are o interpretare simplă: rezolvarea lui înseamnă căutarea punctelor comune a două drepte din plan, date prin ecuațiile lor, drepte care, dacă ele există, sînt fie secante, fie paralele sau confundate.

Existenţa unei soluţii unice se exprimă prin $\delta = ab' - ba' \neq 0$.
Tot astfel, pentru 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, condiţia este

$$\Delta = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a'' \neq 0.$$

Numerele δ şi Δ se numesc *determinanţii* coeficienţilor.

Tot astfel, un sistem de p ecuaţii afine cu p necunoscute se reduce, prin eliminări succesive, la o ecuaţie sau la un sistem de ecuaţii liniare cu o singură necunoscută. Studiul fiecărui exemplu în parte se face fără dificultate; nu abordăm aici cazul general şi discuţia lui, care cer cunoştinţe de teoria determinanţilor.

4) SISTEM SIMETRIC

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

O soluţie — dacă ea există — este constituită de perechea de soluţii ale ecuaţiei $u^2 - su + p = 0$. Dacă această ecuaţie are două rădăcini, u' şi u'', sistemul admite două soluţii:

$$\begin{cases} x = u' \\ x = u'' \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y = u'' \\ y = u' \end{cases}$$

Dacă această ecuaţie nu are decît o rădăcină u_0 — ceea ce se întîmplă cînd discriminantul este nul — sistemul are o singură soluţie $x = y = u_0$. În fine, dacă ecuaţia nu are rădăcini, sistemul este imposibil.

Să reţinem că există o corespondenţă biunivocă între perechea

$$\{x, y\}, \quad x \leqslant y$$

şi perechea

$$\{s, p\}, \quad s^2 \geqslant 4p.$$

B) Ecuaţii care se reduc la cele precedente prin schimbarea necunoscutei.

1) PRINCIPALELE NECUNOSCUTE AUXILIARE CARE POT FI INTRODUSE:

$u = x - \alpha$, pentru a face să dispară anumiţi termeni, de exemplu termenul de gradul întîi în ecuaţia de gradul al doilea.

$u = x^2$, într-o ecuaţie în care x nu intervine decît prin puteri pare (*ecuaţii bipătrate*).

$u = x + 1/x$ poate fi introdusă în polinoamele ai căror termeni echidistanți de extremi au coeficienți egali (*ecuații reciproce*), fiindcă se calculează, pentru valorile succesive ale lui n, expresia $x^n + (1/x)^n$ în funcție de puterile lui u.

În fine, am indicat deja introducerea unghiurilor auxiliare pentru transformarea expresiilor, folosind trigonometria.

O formulă trigonometrică sau algebrică irațională nu permite decît calcule numerice aproximative: dacă scopul analizei este determinarea unor asemenea valori aproximative, poate fi inutil să se caute formule exacte (vezi Cartea a III-a, Analiza); dar problema pe care o tratăm aici este următoarea:

Fiind dat un sistem de ecuații (sau o singură ecuație) ai căror coeficienți sînt litere independente, se cere să se găsească toate soluțiile sub formă de expresii care cuprind acești coeficienți precum și, eventual, numere cunoscute.

Spunem atunci că ecuațiile de rezolvat sînt cele *generale* de tipul considerat; literele care figurează în ele, altele decît necunoscutele, se numesc *parametri*. Rezolvarea se numește *algebrică* dacă expresiile obținute sînt ele însele algebrice. Am rezolvat deja ecuațiile de gradul 1 și 2 cu o necunoscută.

2) STUDIUL ECUAȚIEI DE GRADUL TREI $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

a) Rezolvare algebrică. Introducerea necunoscutei auxiliare $X = x + b/3a$ face să dispară termenul de gradul al doilea și conduce la

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Să introducem în continuare două necunoscute auxiliare u și v prin $X = u + v$, ținînd în rezervă posibilitatea de a mai alege o condiție care leagă pe u și v. Făcînd înlocuirea obținem

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

de unde ideea de a pune

$$3uv + p = 0.$$

În final, sistemul care trebuie rezolvat este

$$\text{(I)} \begin{cases} X = u + v \\ uv = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad \text{echivalent cu} \quad \text{(II)} \begin{cases} X = u + v \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Ultimele două ecuaţii exprimă că (u^3, v^3) este o pereche de rădăcini ale ecuaţiei $Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$.

Obţinem deci, în cazul

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \geqslant 0; \qquad X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

(*Formula lui Cartan şi Tartaglia.*)

Dacă Δ este negativ, metoda nu dă nici o soluţie.

Dar este oare sigur că soluţia este unică — dacă am găsit-o în felul acesta, şi că ea nu există — dacă n-am găsit-o? Nu, fiindcă metoda nu poate da decît soluţiile care verifică $X^2 \geqslant -\frac{4p}{3}$, condiţie impusă de existenţa lui u şi v. De altfel, ea dă toate soluţiile care satisfac această condiţie.

b) *Soluţia trigonometrică*. Să introducem necunoscuta auxiliară φ prin $X = \lambda \cos \varphi$, $\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < \pi$, rezervîndu-ne dreptul de a alege mai tîrziu pe λ.

Ecuaţia devine (remarcînd că $\lambda = 0$ nu este soluţie decît în cazul neinteresant $q = 0$),

$$\lambda^3 \left(\cos^3 \varphi + \frac{p}{\lambda^2} \cos \varphi \right) + q = 0.$$

Comparînd cu identitatea $4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi = \cos 3\varphi$, sîntem conduşi să punem $\lambda^2 = -\frac{4p}{3}$, şi sistemul obţinut este

$$\begin{cases} X = \lambda \cos \varphi \\ \lambda^2 = -\frac{4p}{3} \\ \lambda^3 \cos 3\varphi = -4q, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} X = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \varphi \\ \cos 3\varphi = \frac{3\sqrt{3}\, q}{2(-p)\sqrt{-p}} \\ 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

În cazul $p < 0$, $27\,q^2/(-4p^3) < 1$ găsim trei valori pentru cos 3 φ, de unde trei valori pentru cos φ, deci trei valori pentru X.

Or, condițiile pentru existența celor trei soluții pot fi exprimate printr-o condiție unică

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$$

care acoperă tocmai cazul în care prima metodă nu dădea nimic.

Să notăm însă că n-am obținut o formulă care dă toate rădăcinile, sau măcar una din ele, printr-o expresie algebrică în p și q; prin urmare, problema nu poate fi considerată rezolvată, din punct de vedere algebric.

3) ECUAȚIA DE GRADUL PATRU $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Se verifică ușor: 1) că se suprimă termenul de gradul 3 prin schimbarea de necunoscută $X = x + b/4a$; 2) că introducînd o nouă necunoscută y prin $x = ky + h$, pot fi scrise condiții pentru ca ecuația în y să fie reciprocă (prin urmare, rezolvabilă prin ecuații de gradul 2) și că atunci, după eliminarea lui k, ecuația în h nu este decît de gradul 3.

În felul acesta ecuația de gradul 4 este redusă la ecuații succesive de gradul 2 și 3.

Încheiem insistînd asupra faptului că n-am rezolvat complet problema pentru gradul 3 și 4, iar în ceea ce privește rezolvarea problemei generale, că n-am făcut nici măcar un prim pas. Ceva mai tîrziu, vom face o asemenea tentativă, dar putem mărturisi încă de pe acum că nu vom reuși decît să lămurim un pic problema, fără s-o rezolvăm. Și nu fără motiv! Tînărul norvegian ABEL (1803—1829) a demonstrat la 19 ani imposibilitatea de a rezolva prin radicali ecuația de gradul 5, iar GALOIS (1811—1832), prin geniala sa teorie a grupurilor, a demonstrat că problema este imposibilă pentru ecuația generală de grad n mai mare decît 4.

CARTEA A TREIA

ANALIZĂ

Fundamentele studiului local şi global al funcţiilor numerice au fost expuse în Cartea I, cap. 4. Aici nu vom face decît să amintim enunţurile esenţiale, înainte de a arăta consecinţele lor şi de a aplica aceste noţiuni la cîteva funcţii particulare.

CAPITOLUL 1

STUDIUL GLOBAL DIRECT AL FUNCȚIILOR NUMERICE

I. Recapitularea definițiilor

Fiind dată o mulțime de definiție $X \subseteq R$, o funcție numerică f asociază fiecărui element $x \in X$ o imagine în R. Cînd x, elementul generic al lui X, parcurge această mulțime, y generează o submulțime $Y = f(X)$ a lui R

$$\forall x \in X, \quad x \overset{f}{\longmapsto} y = f(x).$$

(Din considerente tipografice, în cărți găsim și notația $f : x \to y$ care însă nu permite construirea de scheme.) Funcția f este *surjectivă* atunci cînd $Y = R$. Funcția este *injectivă* în R dacă fiecare element al lui Y este imaginea numai a unui singur element al lui X, altfel spus, dacă f este *bijectivă* pe Y. Atunci f are asociată o *funcție reciprocă* g definită pe Y, care ia valori pe X. Altfel spus, *imaginea reciprocă* a fiecărui y prin f se reduce la un singur element.

Scriem $g = f^{-1}$ sau $g = \overset{-1}{f}$.

O funcție care respectă relația de ordine naturală în R se numește *funcție crescătoare*; dacă funcția inversează această relație de ordine, ea este *descrescătoare*. Studiul creșterii unei funcții cere, în general, o *partiție* a lui X în submulțimi în care funcția este monotonă. Concluziile acestui studiu se consemnează în *tabelul de variație* care pregătește trasarea graficului.

Mai toate funcțiile pe care le considerăm sînt definite pe o reuniune de *intervale* ale lui R, unele intervale putînd însă să se

reducă la puncte izolate. Totuşi, schimbînd la nevoie cîteva cuvinte, conţinutul acestui capitol este valabil şi pentru *şiruri*, adică pentru funcţiile definite pe mulţimea N a întregilor naturali sau pe mulţimea Z a întregilor relativi.

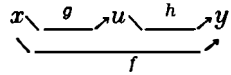
Exemple:

$\forall n \in N,\ n \xrightarrow{\quad} y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ (funcţia factorial)

$\forall m \in Z,\ m \xrightarrow{\quad} y = aq^m$ (termenii unei progresii geometrice)

II. Legea de compoziţie în mulţimea funcţiilor

Schema fundamentală permite definirea produsului $f = g \times h$.



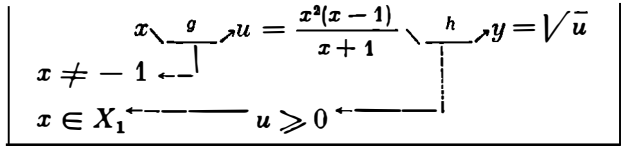
Imaginile succesive ale lui x sînt

$$u = g(x), \quad y = h(u) = h[g(x)],$$

ceea ce justifică notaţia $f = h \circ g$, singurul exemplu în care o operaţie este notată de la dreapta la stînga. Folosind schemele, este mai comod să păstrăm notaţia de produs.

a) **Determinarea mulţimii de definiţie.** Fie X mulţimea de definiţie a lui g şi U cea a lui h. Mulţimea de definiţie a lui f este cea mai mare submulţime X_1 a lui X care verifică $g(X_1) \subseteq U$; aceasta înseamnă că este tocmai mulţimea imaginilor reciproce prin g ale elementelor lui U.

EXEMPLU



$$X =]-\infty, -1] \cup]-1, +\infty[, \quad U = [0, +\infty]$$

$$X_1 =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup [+1, +\infty[.$$

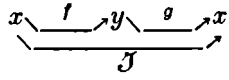
b) **Proprietăţile produsului de compoziţie**

1) Această lege de compoziţie este, evident, *asociativă* şi, în general, *necomutativă*. Numai în cazul în care toate componentele sînt bijective, ea conferă mulţimii funcţiilor o structură de grup, prin existenţa funcţiilor inverse (reciproce).

2) *Creşterea.* Aşa cum rezultă din însăşi definiţia produsului de compoziţie, dacă fiecare din componente este crescătoare sau descrescătoare cînd x parcurge o submulţime $X_0 \subseteq X_1$, funcţia produs este crescătoare sau descrescătoare după cum numărul de funcţii componente descrescătoare este par sau impar.

CAZUL PARTICULAR AL FUNCȚIILOR RECIPROCE

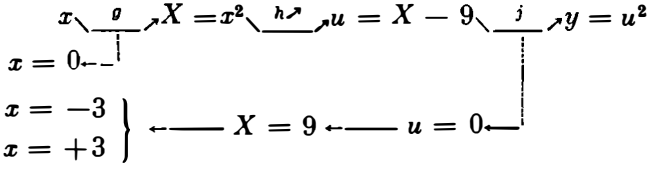
O funcţie bijectivă f este monotonă; atunci şi funcţia g este monotonă, şi cele două funcţii sînt sau ambele crescătoare, sau ambele descrescătoare.



c) **Aplicaţii la întocmirea tabelului de variaţie**

Pentru a simplifica întocmirea şi citirea tabelului, în loc de a indica creşterea funcţiilor componente (săgeţi verticale în tabelul 1), marcăm creşterea produselor $g \times h$, $g \times h \times j$ chiar pe rîndul rezervat imaginilor (săgeţi oblice în tabelul 1) aşa că, deoarece x *creşte* de la stînga la dreapta, săgeţile arată dacă valorile *cresc* sau *scad* de la stînga la dreapta.

EXEMPLU



g	x	0	
	X	↘	↗

h	u	0	
	y	↘	0 ↗

TABELUL 1

	x	↗	−3	↗	0	↗	+3	↗
g		↓		↓		↑		↑
	X	↘	9	↘	0	↗	9	↗
h		↑		↑		↑		↑
	u	↘	0	↘	−9	↗	0	↗
j		↑		↓		↓		↑
	y	↘	0	↗	81	↘	0	↗

TABELUL UZUAL	x	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+3$	$\nearrow$	$y = (x^2 - 9)^2$
	X	$\searrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	9	$\nearrow$	
	u	$\searrow$	0	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
	y	$\searrow$	0	$\nearrow$	81	$\searrow$	0	$\nearrow$	

III. Funcţiile fundamentale

Cele de mai sus ne permit să studiem funcţii complexe plecînd de la funcţii fundamentale studiate direct:

1) *Funcţia constantă* de valoare k ... $\forall x \in R,\ x \searrow\!\nearrow y = k$

2) *Funcţia identică* ... $\forall x \in R,\ x \searrow \mathcal{I} \nearrow y = x$

3) *Funcţia translaţie* ... $\forall x \in R,\ x \searrow \mathcal{T} \nearrow y = x + a,$

funcţie care este crescătoare, fiindcă $\forall x_1, \forall x_2,\ y_2 - y_1 = x_2 - x_1$.

4) **Funcţie liniară** $k \neq 0$ ... $\forall x \in R,\ x \searrow \mathcal{L} \nearrow y = kx$

$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, deci $k > 0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}\nearrow$, $k < 0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}\searrow$

PROPRIETATE. *Orice funcţie liniară respectă adunarea:*

$$\forall x_1, \forall x_2,\quad x_1 + x_2 \searrow\!\nearrow y_3 = y_1 + y_2.$$

Această proprietate este caracteristică. Într-adevăr, fie o funcţie f care verifică

$$\forall x_1, \forall x_2,\quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Elementului neutru 0 al adunării îi corespunde, în mod necesar, $f(0) = 0$. Să notăm atunci $k = f(1)$.

Să construim funcția prin puncte.

X	Y
$-n$	$-nk$
-1	$-k$
0	0
1	k
$2=1+1$	$k+k=2k$
n	nk
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}k$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}k$
$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{q}k$

Fie, de exemplu , $k > 0$.
Lui $2 = 1 + 1$ îi corespunde $f(1) + f(1) = k + k = 2k$.
Tot astfel, lui $n \in N$ îi corespunde nk.
Dar, de exemplu, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; prin urmare

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = k; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}k.$$

În felul acesta $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}k$,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}k.$$

În fine, $\left(-\frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} = 0$, deci

$$f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{p}{q}k.$$

Prin urmare, $\forall x \in Q$, $x \overset{f}{\longmapsto} y = x \cdot k = kx$.

Spre a conchide pentru $\forall x \in R$, trebuie făcut apel la topologie. Prin însăși definiția lui, $r \in R$ este definit printr-o capcană de intervale cuprinse unul în altul, definită în Q. Or, lui (a_n, b_n) îi corespunde $[f(a_n), f(b_n)]$, fiindcă funcția este monotonă, și inegalitatea $|f(b_n) - f(a_n)| = |k| \cdot |b_n - a_n| < \varepsilon$ este satisfăcută de îndată ce $|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$; prin urmare, $f(r) = k \cdot r$, pe baza definiției înmulțirii în R.

REMARCĂ. Mulțimea funcțiilor liniare formează un grup în raport cu operația produs de compoziție (elementul neutru $\mathcal{J}$ este dat de $k = 1$, funcțiile inverse sînt date de numerele inverse k și $1/k$).

5) **Funcţia omografică elementară**

$$\forall x \in R - \{0\},\ x \xrightarrow{\mathcal{H}} y = \frac{1}{x}$$

0 este *valoare interzisă*.

$$y_2 - y_1 = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

x	$\nearrow$	0	$\nearrow$
y	$\searrow$		$\searrow$

Studiul creşterii funcţiei se face în fiecare din intervalele a căror reuniune este mulţimea de definiţie. În fiecare din ele x_1x_2 este pozitiv, prin urmare funcţia este descrescătoare.

PROPRIETATE. *Funcţia respectă birapoartele* (Cartea a IV-a, cap.2), ceea ce justifică numele ei, de origine geometrică.

6) **Funcţia putere de exponent n** $\in \mathbf{N}$. $\forall x \in R,\ x \xrightarrow{\mathcal{Q}} y = x^n$

$$y_2 - y_1 = x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)[x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \ldots + x_2^{n-p} x_1^p + \ldots + x_1^{n-1}].$$

Pe R^+, funcţia este crescătoare. Pentru a o studia pe R^-, trebuie precizată paritatea lui n. Vom folosi o descompunere a funcţiei.

n par

$$x \underset{x\in R^-}{\searrow\nearrow} u = -x \underset{u\in R^+}{\nearrow\nearrow} v = u^n \xrightarrow{\mathcal{S}\nearrow} y = v,$$

deci $f \searrow$ pe R^-;

n impar

$$x \underset{x\in R^-}{\searrow\nearrow} u = -x \underset{u\in R^+}{\nearrow\nearrow} v = u^n \xrightarrow{\searrow} y = -v,$$

deci $f \nearrow$ pe R^-.

PROPRIETATE. *Orice funcţie putere de exponent întreg transformă sumele în produse*:

$$\forall x_1, \forall x_2,\ \mathcal{Q}(x_1 + x_2) = \mathcal{Q}(x_1) \cdot \mathcal{Q}(x_2),$$
$$\text{de unde } p \in N, \mathcal{Q}(px_1) = [\mathcal{Q}(x_1)]^p.$$

7) **Alte funcţii fundamentale.** Funcţiile precedente sînt date cu ajutorul unor expresii din algebra numerică. Trebuie să mai introducem:

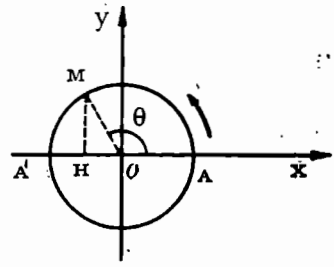
a) *Funcțiile logaritm și exponențială* (vezi mai departe cap. 5, III).

b) *Funcția valoare absolută* $\forall x \in R$, $x \xrightarrow{\quad} y = |x|$ definită prin

$$\begin{cases} \forall x \in R^+ \\ x \xrightarrow{\mathcal{J}} y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 0 \xrightarrow{\quad} 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in R^- \\ x \xrightarrow{\quad} y = -x \end{cases}$$

c) *Funcțiile definite cu ajutorul geometriei*: funcțiile *sinus* și *cosinus* legate prin schema de mai jos

$$\varphi \begin{cases} \xrightarrow{\quad} \psi = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{sinus}} y = \sin \psi \\ \xrightarrow[\text{cosinus}]{\quad} y = \cos \varphi \end{cases}$$



În cercul trigonometric orientat, de raza 1, și presupunînd unghiurile măsurate în radiani,

$$\theta \xrightarrow[\theta \in R]{\quad} M \xrightarrow[M \in \mathcal{C}]{\quad} H \xrightarrow[H \in A'A]{} \begin{cases} X = \overline{OH} = \cos \theta \\ Y = \overline{HM} = \sin \theta \end{cases}$$

φ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin \varphi$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\cos \varphi$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Am văzut (Cartea I, cap. 5) că aceste funcții admit perioada 2π. Ele stau la baza formării funcțiilor periodice a căror definiție o amintim: *numărul p este perioada unei funcții f dacă este cel mai mic număr astfel încît*

$$\forall x, \quad f(x + p) = f(x).$$

IV. Funcţii compuse

Compunînd funcţiile fundamentale precedente, putem obţine o infinitate de noi funcţii. Le consemnăm pe cele mai simple:

1) Funcţia afină: $\forall x \in R,\ x \xrightarrow{\mathcal{A}} y = ax + b,\ a \neq 0.$

Pe baza identităţii $ax + \quad = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$, folosim

$$x \xrightarrow{\mathfrak{L}} u = ax \xrightarrow{\mathfrak{T}} y = u + b$$

sau

$$x \xrightarrow{\mathfrak{T}_1} v = x + \frac{b}{a} \xrightarrow{\mathfrak{L}} y = av$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \mathcal{A}\nearrow \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0 \\ \mathcal{A}\searrow \end{cases}$$

2) Funcţia omografică: $x \xrightarrow{f} y = \frac{ax+b}{a'x+b'},\quad a' \neq 0.$

Pe baza identităţii

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{a}{a'} + \frac{h}{x + \frac{b'}{a'}}, \qquad h = \frac{ba' - ab'}{a'^2},$$

folosim

$$x \xrightarrow{\uparrow} u = x + \frac{b'}{a'} \xrightarrow{\downarrow} v = \frac{1}{u} \xrightarrow{\mathcal{A}} y = \frac{a}{a'} + hv$$

$x \neq -\frac{b'}{a'}$ ⟵ $u \neq 0$ (valoare interzisă)

$$\begin{cases} h > 0 \\ f\searrow \end{cases} \qquad \begin{cases} h < 0 \\ f\nearrow \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 0 \\ y = \frac{a}{a'} \end{cases}$$

3) Funcţia trinom de gradul doi:

$$x \xrightarrow{\mathfrak{s}} y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$$

Pe baza identităţii $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d,\ d = c - \frac{b^2}{4a},$

folosim

$$x \searrow^{\nearrow} u = x + \frac{b}{2a} \searrow^{g} v = u^2 \searrow^{h} w = av + d$$

$$x = -\frac{b}{2a} \longleftarrow u = 0 \longleftarrow |$$

(valoare remarcabilă)

$$\begin{cases} a > 0 \\ h \nearrow \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0 \\ h \searrow \end{cases}$$

$a > 0$

x	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$
y	$\searrow$	d	$\nearrow$

$a < 0$

x	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$
y	$\nearrow$	d	$\searrow$

Ca exercițiu, se vor studia funcțiile definite prin $f = g \times \mathcal{S}$

$$x \searrow^{g} u = g(x) \searrow^{\mathcal{S}} y = au^2 + bu + c$$

cînd g este o funcție cunoscută, de exemplu $g(x) = x^2$ (*f este funcție bipătrată*).

4) **Funcția putere** (exponent $m \in Q$). Mulțimea de definiție este în cazul de față R^+. Știm că, în acest caz, pentru orice întreg n, funcția $x \searrow^{\mathcal{Q}} y = x^n$ este crescătoare.

Introducerea exponenților întregi negativi. Notăm $\left(\frac{1}{x}\right)^n = x^{-n}$ și $x \searrow^{f} y = x^{-n}$ este definit prin

$$\forall x \in R^+,\ x \searrow^{\mathcal{H}}_{\searrow} u = \frac{1}{x} \searrow^{\mathcal{Q}}_{\nearrow} y = u^n, \text{ deci } f \searrow .$$

Afirmația este justificată pentru că avem, în plus $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Introducerea exponenților fracționari. Deoarece funcția $\mathcal{Q}$ este crescătoare, ea admite o funcție reciprocă definită pe $Y = \mathcal{Q}(R^+)$. Faptul că $Y = R^+$ a fost justificat de noi cînd am studiat mulțimea numerelor reale (Cartea a II-a, Partea I, cap.3, § 2), ceea ce ne permite să generalizăm structura

$$x \searrow^{\mathcal{Q}_n} y = x^n \searrow^{\mathcal{Q}_{n'}} z = y^{n'} = x^{nn'}$$

la situaţia

$$x \searrow \underline{\quad \mathfrak{Q}_n \quad} \nearrow y = x^n \searrow \underline{\quad \mathfrak{Q}_n^{-1} \quad} \nearrow z = x = x^1$$

luînd $n' = \frac{1}{n}$. Prin urmare, funcţia inversă lui

$$x \searrow \underline{\quad} \nearrow y = x^n \text{ este } u \searrow \underline{\quad} \nearrow v = u^{\frac{1}{n}}.$$

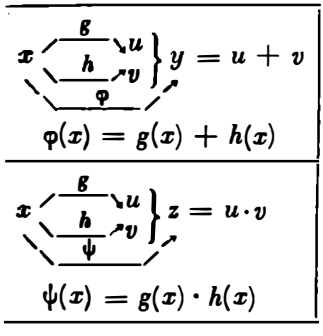
În felul acesta se defineşte funcţia $x \searrow \underline{\quad} \nearrow y = x^q$ pentru $q \in Q$.

Exemplu: $x \searrow \underline{\quad f \quad} \nearrow y = x^{-\frac{3}{4}}$ este definită prin

$\forall x \in R^+$, $x \searrow \underline{\quad} \searrow u = \frac{1}{x} \searrow \underline{\quad} \nearrow v = u^3 \searrow \underline{\quad} \nearrow y = v^{\frac{1}{4}}$, prin urmare $f \searrow$.

Noi nu vom folosi exponenţi neraţionali.

V. Introducerea unei structuri de corp în mulţimea funcţiilor



Cele două scheme alăturate definesc două funcţii, φ şi ψ, care dau respectiv imaginea sumă şi imaginea produs ale imaginilor date de g şi h. Este vorba de două operaţii în mulţimea funcţii lor, pe care este firesc să le numim *sumă* şi *produs* de funcţii şi să le notăm

$$\varphi = g + h, \quad \psi = g \cdot h.$$

(A nu se confunda cu produsul de compoziţie. Dacă va exista pericol de confuzie, vom spune „funcţie compusă" şi vom folosi notaţia $F = h \circ g$ sau $F(x) = h[g(x)]$.)

STRUCTURA ADITIVĂ. Elementul neutru υ: funcţia constantă cu valoarea 0.

Elementul simetric lui g este funcţia $x \searrow \underline{\quad g \quad} \nearrow u \searrow \underline{\quad (-1) \quad} \nearrow v = -u$.

Prin urmare — grup aditiv comutativ.

STRUCTURA MULTIPLICATIVĂ. Elementul neutru μ: funcţia cu valoarea constantă egală cu 1. Elementul simetric lui g, di-

ferit de 0, este funcția $x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{\mathcal{H}} v = \frac{1}{u}$. Prin urmare — grup multiplicativ comutativ, dacă se exclude funcția 0.

DISTRIBUTIVITATEA. Rezultă din identitatea numerică

$$[g(x) + h(x)] \cdot f(x) = g(x) \cdot f(x) + h(x) \cdot f(x).$$

(Lăsăm pe seama cititorului să facă schemele).

Există deci *structură de corp comutativ*. Va fi interesant de văzut care proprietăți sînt respectate de această structură (vom stabili continuitatea, derivabilitatea). În ceea ce privește creșterea, nu indicăm decît două enunțuri foarte particulare:

Teorema 1. *Funcția sumă a două funcții crescătoare (sau descrescătoare) este crescătoare (sau descrescătoare).*

Teorema 2. *Funcția produs de două funcții cu* **valori pozitive** *crescătoare (sau descrescătoare) este crescătoare (sau descrescătoare).*

Aceasta rezultă din identitatea numerică:

$$g(x_2)h(x_2) - g(x_1)h(x_1) = [g(x_2) - g(x_1)] \cdot h(x_2) + g(x_1) \cdot [h(x_2) - h(x_1)].$$

Concluzie. Cu toată importanța rezultatelor obținute, studiul de mai sus nu reușește totuși să cuprindă o serie de funcții foarte simple, de exemplu $x \xrightarrow{\quad} y = x^3 - x$, pe care nu știm s-o studiem decît pe R^-. Procedeele mult mai puternice ale analizei ne vor permite să eliminăm această deficiență.

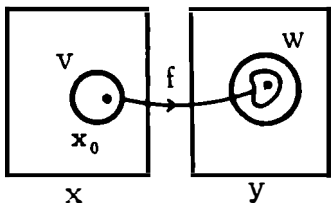
CAPITOLUL 2

STUDIUL LOCAL AL FUNCȚIILOR

1. Recapitularea definițiilor

Noțiunile de continuitate, limită, derivată au fost introduse în Cartea I, cap. 4 , Partea a II-a; amintim totuși definiția lor generală, înainte de a le folosi în cazul funcțiilor numerice.

O funcție f aplică o mulțime X într-o mulțime Y; se presupune că în fiecare din cele două mulțimi a fost definită o topologie, adică o mulțime de vecinătăți.



a) **Continuitate.** În x_0, funcția este definită $f(x_0) = y_0$. Funcția f este continuă în x_0 dacă, oricare ar fi vecinătatea $\mathrm{W}(y_0) \subset Y$, există o vecinătate $V(x_0) \subset \mathrm{X}$ a cărei imagine este inclusă în $\mathrm{W}(y_0)$.

$$\forall \mathrm{W}(y_0), \quad \exists V(x_0): \quad f[V(x_0)] \subset \mathrm{W}(y_0)$$

Limită. În x_0 funcția poate să nu fie definită, dar ea este definită pe o vecinătate „găurită" $V(x_0) - \{x_0\}$. Dacă există un element λ astfel încît, dacă punem $f(x_0) = \lambda$, funcția devine continuă în x_0, spunem că λ *este limita lui* f *în* x_0. Spunem de

asemenea că „$f(x)$ tinde către λ cînd x tinde către x_0". Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} f = \lambda \quad \text{sau} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \text{sau} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\to} \lambda.$$

b) **Derivate.** Noțiunea de derivată apare de îndată ce au fost definite măsuri pentru submulțimile W și V. Derivata, *dacă* există, este limita raportului

$$\frac{\text{măs } f[V(x_0)]}{\text{măs } V(x_0)} \quad \text{cînd măs } V(x_0) \to 0;$$

(de exemplu, dacă X este mulțimea volumelor și Y cea a maselor, derivata în x_0 se numește *densitatea* în acel punct).

c) **Cazul funcțiilor numerice,** adică al funcțiilor definite pe R și luînd valori în R. Vecinătățile folosite sînt intervale centrate în punctul considerat, prin urmare mulțimi definite prin $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \beta$ etc. În tot acest studiu, vom folosi notațiile $|x - x_0| = \Delta x$, $|y - y_0| = \Delta y$ etc. Astfel, continuitatea în x_0 va fi definită prin

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha: |\Delta x| < \alpha \Longrightarrow |\Delta y| < \varepsilon$$

iar derivata va fi — dacă există — $y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(Vom nota că măsurile care intervin aici sînt orientate.)

Dacă funcția este derivabilă în orice punct x_0 al unui interval, mulțimea valorilor y'_0 definește o *funcție derivată* $y' = f'(x)$.

d) **Cazul unei funcții vectoriale** $x \in R \nearrow \mathbf{V}(x) \in \mathcal{V}$:

Pa baza structurii de spațiu vectorial (Cartea I, cap.3), putem scrie $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0$ și $\mathbf{U} = \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \Delta \mathbf{V}$.

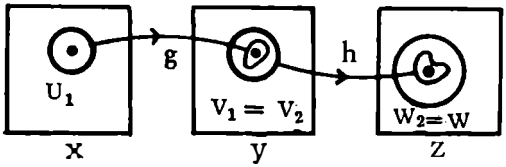
Dacă acest vector $\mathbf{U}$ are o limită cînd Δx tinde către 0, acel vector limită este derivata $\mathbf{V}'_0$ a funcției vectoriale. În acest caz, cînd x_0 variază, este definită funcția vectorială derivată $x \nearrow \mathbf{V}'(x)$.

II. Continuitate și limită

1) **Studiul local al legii de compoziție** $f = g \times h$ (adică $f = h \circ g$). Se presupune că funcția g este continuă în x_0, iar h în $y_0 = g(x_0)$. Deoarece vecinătățile sînt ordonate prin incluziune, imaginile lor sînt ordonate și ele în același mod, ceea ce ne permite următorul raționament:

Ipoteza 1, $\forall V_1(y_0), \quad \exists U_1(x_0) : g(U_1) \subset V_1,$

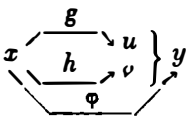
Ipoteza 2, $\forall W_2(z_0), \quad \exists V_2(y_0) : h(V_2) \subset W_2.$

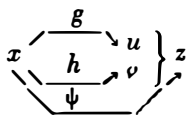


Prin urmare, odată ales $W(z_0)$, pentru a asigura apartenența $z \in W$, este suficient să alegem $W_2 = W$, din ea să deducem V_1, apoi să alegem $V_1 = V_2$ și să deducem din ea U_1. Atunci $x \in U_1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow z \in W$, ceea ce demonstrează continuitatea.

Limită. Dacă funcția g nu este definită în x_0 dar admite o limită λ în acest punct, această limită joacă rolul lui y_0 din cele de mai sus, și f admite limita $h(\lambda)$ în x_0. Tot astfel, dacă h nu este ea însăși definită în $y = \lambda$, dar admite în acest punct o limită μ, funcția admite limita μ în x_0.

2) **Studiu local în corpul funcțiilor numerice.**





Continuitate. Presupunem cele două funcții g și h continue în x_0, prin urmare

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 : |\Delta x| < \alpha_1 \Longrightarrow |\Delta u| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 : |\Delta x| < \alpha_2 \Longrightarrow |\Delta v| < \varepsilon_2$$

a) *Suma*: $\Delta y = \Delta u + \Delta v$.

ε fiind ales, pentru a asigura inegalitatea $|\Delta y| < \varepsilon$, este suficient să asigurăm inegalitatea

$$|\Delta u| + |\Delta v| < \varepsilon.$$

Vom lua $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ de unde deducem pe α_1 și α_2; fie α cel mai mic dintre numerele α_1 și α_2, ceea ce se notează $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$. Atunci

$$|\Delta x| < \alpha \Longrightarrow |\Delta y| < \varepsilon.$$

b) Produsul: $\Delta z = (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v) - u_0 v_0 = v_0 \Delta u + (u_0 + \Delta u)\Delta v$; prin urmare:

$$| \Delta z | < | v_0 | \cdot | \Delta u | + | u_0 + \Delta u | \cdot | \Delta v |$$

ε fiind ales, pentru a asigura $| \Delta z | < \varepsilon$, luăm

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 | v_0 |} \quad \text{și} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(| u_0 | + \varepsilon_1)}.$$

De aici deducem α_1 și α_2; este suficient după aceea să luăm $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$.

Cele de mai sus presupun $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, dar studiul este analog dacă u_0 sau v_0 sau ambele aceste numere sînt nule.

CONCLUZIE. *Suma și produsul a două funcții continue sînt continue.* Afirmația se generalizează din aproape în aproape la un număr oarecare de funcții.

Limită. Dacă g sau h sau ambele aceste funcții nu sînt definite în x_0 dar admit, în acest punct, limitele λ și respectiv μ, este suficient să înlocuim în cele de mai sus pe u_0 și v_0 cu λ și μ.

Suma și produsul funcțiilor care au limite au și ele limite egale respectiv cu suma și cu produsul acelor limite.

c) Cîtul. Vom avea nevoie să cunoaștem rezultatele referitoare la $x \xrightarrow{F} t = \frac{1}{u}$. Este însă suficient să studiem $x \xrightarrow{f} y = \frac{1}{x}$, fiindcă F se descompune sub forma $x \to u \xrightarrow{f} w = \frac{1}{u}$.

Or:

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x) x_0}.$$

$x_0 \neq 0$ ne permite să limităm studiul la $| \Delta x | < \frac{1}{2} | x_0 |$, de unde

$$\frac{| \Delta x |}{\frac{3}{2} | x_0 |^2} < | \Delta y | < \frac{| \Delta x |}{\frac{1}{2} | x_0 |^2}.$$

Prin urmare, inegalitatea $| \Delta y | < \varepsilon$ este asigurată de inegalitatea $| \Delta x | < \frac{1}{2} | x_0 |^2$, ceea ce demonstrează continuitatea lui f, și deci și a lui F, dacă u este continuă. Tot astfel, dacă u nu

este definit în x_0 dar admite limita λ, $F(x)$ admite în x_0 limita $\frac{1}{\lambda}$, cu condiţia ca $\lambda \neq 0$.

CONCLUZIE: *Cîtul a două funcţii care admit limite în x_0 admite o limită egală cu cîtul limitelor.*

III. Derivata

Reluăm notaţiile din paginile precedente.

1) **Derivata unei funcţii compuse** $f = g \times h$ (adică $f = h \circ g$). Am notat

$$r_1 = \frac{\text{măs } g(U_1)}{\text{măs } U_1} \quad \text{şi} \quad r_2 = \frac{\text{măs } h(V_2)}{\text{măs } V_2}$$

Presupunem g şi h derivabile:

$$\lim_{\text{măs } U_1 \to 0} r_1 = g'_0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\text{măs } V_2 \to 0} r_2 = h'_0.$$

Or, definiţia limitelor ne permite să alegem drept vecinătate V_2 vecinătatea $g(U_1)$, fiindcă măsura ei tinde către zero odată cu cea a lui U_1, aşa cum rezultă din continuitatea lui g.

Atunci:

$$h(V_2) = f(U_1) \qquad \text{şi} \qquad r = \frac{\text{măs } f(U_1)}{\text{măs } U_1} = r_1 \cdot r_2.$$

Pe baza teoremei referitoare la limita unui produs de funcţii, cînd măs U_1 tinde către 0, r admite o limită egală cu $g'_0 \cdot h'_0$. *Prin urmare, funcţia $f = g \times h$ admite în x_0 o derivată egală cu produsul derivatelor funcţiilor g şi h.*

Dacă este vorba de funcţii numerice $x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$, scriem funcţiile derivate sub forma $z'_x = z'_y \cdot y'_x$, unde indicii specifică variabila în raport cu care se face derivarea. Trebuie reţinut că z'_y este exprimată cu ajutorul lui y, aşa că formula completă este

$$z'_x(x) = z'_y[y(x)] \,.\, y'_x(x) \quad \text{sau} \quad f'_x(x) = h'_y[g(x)] \cdot g'_x(x).$$

DERIVATA FUNCŢIEI RECIPROCE A UNEI FUNCŢII NUMERICE BIJECTIVE.

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} x$, $\mathcal{J}$ — x_0 fiind ales, $f(x_0) = y_0$. Cele două creşteri Δx şi Δy sînt şi ele asociate prin corespon-

denţă biunivocă. Dacă, prin ipoteza, $r_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ admite limita f'_0 cînd Δx tinde către 0, $r_2 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{r_1}$ admite limita $\frac{1}{f'_0}$. *Funcţia reciprocă a lui f admite deci o derivată egală cu inversa derivatei lui f*:

$$\left(\overline{f}^{1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

2) **Formulele de derivare în corpul funcţiilor numerice.** Presupunem că $x \xrightarrow{f} u$ şi $x \xrightarrow{g} v$ sînt derivabile în x_0. Fie:

a) $x \xrightarrow{\varphi} y = u + v$, $\Delta y = \Delta u + \Delta v$, deci $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$, adică dacă

$$r_1 = \frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad r_2 = \frac{\Delta v}{\Delta x}, \qquad r = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad r = r_1 + r_2.$$

Prin urmare, pe baza teoremei despre limita unei sume, φ admite o derivată $\varphi' = f' + g'$.

Aşadar, *o sumă de funcţii derivabile este derivabilă şi admite ca derivată suma derivatelor.* (Rezultatul se extinde imediat la un număr oarecare de funcţii.)

Dacă α, β, γ sînt constante,

$$y = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) + \gamma u_3(x)$$

are ca derivată

$$y' = \alpha u'_1 + \beta u'_2 + \gamma u'_3.$$

Derivata respectă structura de spaţiu vectorial a mulţimii funcţiilor.

b) $x \xrightarrow{\psi} z = u \cdot v$. Am văzut că

$$\Delta z = v_0 \Delta u + (u_0 + \Delta u)\Delta v,$$

prin urmare, dacă $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \rho$,

$$\rho = v_0 r_1 + (u_0 + \Delta u) r_2.$$

Deoarece prin ipoteză, cînd $x \longrightarrow x_0$, $\Delta u \longrightarrow 0$, $r_1 \longrightarrow u'_0$, $r_2 \longrightarrow v'_0$, din teoremele relative la limita sumei şi limita produsului rezultă că ρ admite o limită şi

$$\lim \rho = z'_0 = v_0 u'_0 + u_0 v'_0.$$

Dacă x_0 devine element generic al unui interval, concluzia se referă la funcţiile derivate:

$$z = u \cdot v \text{ are ca derivată } z' = u'v + uv'.$$

Produsul a două funcţii derivabile are derivata egală cu suma produselor obţinute înlocuind succesiv fiecare factor prin derivata lui.

Acest enunţ se extinde din aproape în aproape la un produs de 3, 4, ... , n factori: de exemplu

$$\begin{aligned}(u, v, w)' &= [(uv) \cdot w]' = (uv)' \cdot w + (uv)w' \\ &= (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.\end{aligned}$$

Demonstraţia este mai uşor de făcut dacă se observă că $z' = u'v + uv'$ dă

$$\frac{z'}{z} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Vom vedea că y'/y este derivata funcţiei $\log y$. Încă de pe acum să numim această funcţie y'/y *derivata logaritmică* a lui y şi să conchidem:

Derivata logaritmică a unui produs de funcţii derivabile este suma derivatelor logaritmice ale factorilor.

c) Derivata funcţiei $x \xrightarrow{F} t = \frac{1}{u}$. Să studiem $x \longrightarrow y = \frac{1}{x}$.

Am obţinut anterior formula

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

prin urmare

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

a cărei limită este $\frac{-1}{x_0^2}$.

Aşadar, în $x_0 \neq 0$ funcţia $y = \frac{1}{x}$ admite derivata $y' = \frac{-1}{x^2}$.

Prin urmare, deoarece F se descompune în

$$x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{f} \frac{1}{u},$$

F are o derivată egală cu

$$F'(x) = -\frac{1}{u^2} \cdot u'_x \quad \text{și} \quad \frac{F'}{F} = -\frac{u'}{u}.$$

Aplicații. Formulele precedente permit să se calculeze derivata funcțiilor uzuale, plecînd de la două funcții elementare

Funcția constantă, $\forall x,\ y = k$; $\forall \Delta x,\ \Delta y = 0$, $\forall x,\ y' = 0$.

Funcția identică, $\forall x,\ y = x$; $\Delta y = \Delta x$, $\forall x,\ y' = 1$.

Funcțiile date prin expresii algebrice sînt următoarele:

Funcțiile polinoame. $n \in N$, $y = x^n$ dă $y' = nx^{n-1}$

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_nx^{n-p} + a_{n-1}\,x + a_n$$

dă

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + (n-p)a_px^{n-p-1} + \ldots + a_{n-1}.$$

Funcția putere. Studiem $y = x^q$, $q \in Q$, definită pe R^+. Este comod să introducem derivatele logaritmice plecînd de la

$$y = x \searrow\!\!\nearrow y' = 1 \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.$$

Fie m și n întregi naturali:

$$u = x^n \searrow\!\!\nearrow \frac{u'}{u} = \frac{n}{x} \quad \text{și} \quad u' = nx^{n-1}.$$

$v = x^{\frac{1}{m}}$ este funcția reciprocă a lui $x \searrow\!\!\nearrow v$, prin urmare

$$v' = \frac{1}{mv^{m-1}} = \frac{1}{m}\,v^{1-m} = \frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1} \quad \text{și} \quad \frac{v'}{v} = \frac{\frac{1}{m}}{x}$$

$$w = x^{\frac{n}{m}} = v^n \searrow\!\!\nearrow \frac{w'}{w} = \frac{nv'}{v} = \frac{\frac{n}{m}}{x} \quad \text{și} \quad w' = \frac{n}{m}\,x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{w} \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = -\frac{w'}{w} = \frac{-\frac{n}{m}}{x} \quad \text{și} \quad y' = -\frac{n}{m}\,x^{-\frac{n}{m}-1}.$$

Prin urmare, $\forall q \in Q$, pe R^+:

$$y = x^q \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{q}{x} \text{ și } y' = qx^{q-1}.$$

De exemplu, $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{2/3}{x}$ și $y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}} \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{-2/3}{x} \text{ și } y' = -\frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$$

CONSECINȚĂ:

$$y = u^q \underset{(u>0)}{\searrow\!\!\nearrow} \frac{y'}{y} = q\frac{u'}{u} \text{ și } y' = qu^{q-1}u'.$$

De exemplu:

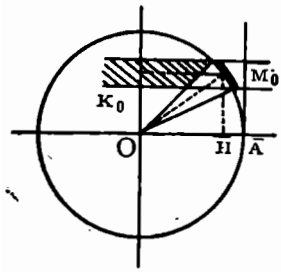
$$y = \sqrt{u} \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{u'}{u} \text{ și } y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Funcția de structură multiplicativă. Vom folosi derivata logaritmică.

Exemplu:

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{(x+1)}} \searrow\!\!\nearrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2+x-1}{x(x^2-1)}.$$

Funcții trigonometrice. Ele se formează plecînd de la funcția sinus, pe care o preferăm funcției cosinus fiindcă singura teoremă care permite un studiu de limite este următoarea: *x fiind exprimat*



în radiani, funcția $\frac{1}{x}\sin x$ *admite o limită în* $x = 0$, *limită care este egală cu* 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin x = 1.$$

Să reluăm studiul făcut în Cartea I, cap.5, mergînd însă acum pe o cale mai geometrică.

1) *Funcțiile sinus și cosinus sînt continue în orice punct...*

Aceasta rezultă din proprietățile cercurilor și din corespondența celor trei vecinătăți: a lui K_0, a lui M_0 și a $\widehat{AOM_0} = x$.

2) În vecinătatea lui $x = 0$, x și $\sin x$ sînt de același semn; deci:

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{|x|} \cdot |\sin x|.$$

Or, incluziunea domeniilor

triunghi $(OAM_0) \subset$ sector $(O\widehat{AM_0}) \subset$ triunghi (OAT)

implică $$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|,$$

prin urmare:

$$\cos x < \left|\frac{1}{x} \sin x\right| < 1.$$

Continuitatea în $x = 0$ a funcției cosinus dă

$$\lim_{x \to 0} (\cos x) = 1, \text{ prin urmare } \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \sin x\right) = 1.$$

3) *Derivata funcției* $y = \sin x$

$x_0 \searrow\!\!\_\_\_\nearrow y_0 = \sin x_0$, deci $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$; prin urmare:

$$\Delta y = \sin (x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \left[\frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\Delta x}{2}\right]$$

a cărei limită există și are valoarea

$$y'_0 = \cos x_0.$$

În felul acesta, funcția $y = \sin x$ admite o funcție derivată $y' = \cos x$.

Tot astfel:

$$z = \cos x \qquad z' = -\sin x.$$

(Se va merge pe aceeaşi cale, sau se va folosi descompunerea: $x \searrow\!\!\nearrow \varphi = x + \frac{\pi}{2} \searrow\!\!\nearrow z = \sin \varphi$, cu $\cos \varphi = -\sin x$).

REMARCĂ. $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ apare aici ca un *factor regulat*: el are o limită nenulă şi nu poate introduce nici o dificultate.

Din cele de mai sus deducem derivata funcţiei

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

şi a funcţiei

$$z = \operatorname{cotg} x$$

care sînt

$$y' = 1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

şi

$$z' = -1 / \sin^2 x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

Mai general, derivatele lui $\sin \varphi(x)$ şi $\cos \varphi(x)$ sînt respectiv — dacă φ este exprimat în radiani,

$$\cos \varphi(x) \cdot \varphi'_x \quad \text{şi} \quad -\sin \varphi(x) \cdot \varphi'_x.$$

În studiul fenomenelor periodice, vom întîlni, în particular, funcţiile

$$\begin{cases} u = \sin(\omega t + \alpha) \\ v = \cos(\omega t + \alpha) \end{cases} \text{ cu derivatele } \begin{cases} u'_t = \omega \cos(\omega t + \alpha) \\ v'_t = -\omega \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

unde t este timpul, ωt şi α sînt exprimaţi în radiani, iar ω şi α sînt constante.

INVERSAREA FUNCŢIILOR SINUS, COSINUS ŞI TANGENTĂ

Pentru ca funcţiile reciproce să fie definite, trebuie restrîns intervalul de variaţie în aşa fel încît funcţia considerată să fie monotonă.

Fie

$$y = \sin x, \quad x \in [-\pi/2, +\pi/2], \quad y'_x = \cos x;$$

funcția inversă se scrie

$$\varphi = \text{Arc sin } \lambda.$$

(φ este arcul al cărui sinus este λ.)

Cunoaștem derivata

$$\varphi'_\lambda = \frac{1}{\cos \varphi} = + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Scriem fără majusculă

$$\psi = \text{arc sin } \lambda$$

o funcție determinată printr-o altă condiție, de exemplu prin

$$\pi/2 < \varphi < 3\,\pi/2.$$

Semnul din fața radicalului se deduce din condiție: în exemplul dat,

$$\varphi'_\lambda = \frac{1}{\cos \varphi} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Pentru funcția arc cos, determinarea principală — notată Arc cos — corespunde arcului cuprins între 0 și π:

$$\Phi = \text{Arc cos } \lambda, \quad \Phi' = \frac{1}{\sin \Phi} = + \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Rezultatul $\varphi' = \Phi'$ este ușor de înțeles, fiindcă diferența $\Phi - \varphi$ este constantă și are valoarea $\pi/2$.

În fine, pentru fiecare determinare, găsim $(\text{arc tg } t)' = \frac{1}{1+t^2}$.

De remarcat că operația derivare efectuată asupra acestor funcții trigonometrice inverse conduce la o funcție algebrică: prin urmare, în timp ce orice funcție algebrică are o derivată algebrică, reciproca nu este adevărată.

IV. Extinderea noțiunilor de limită și de derivată

În Cartea I, cap. 4, am fost conduși să adăugăm un număr la mulțimea valorilor unei funcții, cu scopul de a face funcția continuă: dacă $f(x)$ este definită în (a, b) cu excepția lui x_0 și dacă ea admite o limită λ cînd x tinde către x_0, completăm definiția atribuind lui $f(x_0)$ valoarea λ.

Fie, de exemplu

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x},$$

prin urmare

$$f(x) = x + 1$$

pentru $x \neq 0$. Introducem $f(0) = 1$.

O asemenea extindere a unei definiţii făcută cu scopul de a face să dispară o excepţie este un procedeu cu totul obişnuit în matematică; găsim exemple numeroase în geometrie. Valoarea astfel introdusă pentru $f(x_0)$ este numită deseori „valoarea adevărată" a lui f în x_0.

Să considerăm însă funcţia

$$x \searrow\!\!\!\!\!\!\_\_\_\_\nearrow f(x) = \frac{1}{x - x_0}$$

în vecinătatea lui x_0.

Nu există nici o valoare pe care am putea s-o atribuim lui $f(x_0)$ pentru a-i asigura continuitatea.

Faptul care înlocuieşte existenţa unei limite se enunţă:

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha: \ | x - x_0 | < \alpha \Longrightarrow | f(x) | > A.$$

(Oricare ar fi A pozitiv, există un număr α astfel încît $| f(x) |$ depăşeşte A, pentru x suficient de vecin cu x_0).

Exprimăm acest fapt spunînd că „$f(x)$ *tinde către infinit cînd* x *tinde către* x_0", ceea ce se scrie

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\to} \infty \text{ sau, echivalent, } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Pe scurt, adăugăm mulţimii numerelor reale un număr, un număr mai mare decît orice număr real, aşa că vecinătatea acestui punct este mulţimea valorilor y care verifică $0 < A < | y |$.

Reprezentarea grafică ne determină să considerăm separat cele două semivecinătăţi $0 < A < y$ şi $y < -A < 0$. În felul acesta, punctul de la infinit al axei valorilor y este dedublat în două puncte pe care le notăm $-\infty$ şi $+\infty$. Tocmai de aceea, pe exemplul dat vom deosebi

$x < x_0$, $f(x) \to -\infty$ cînd x tinde către x_0 la stînga;
$x > x_0$, $f(x) \to +\infty$ cînd x tinde către x_0 la dreapta.

Vom completa, în mod analog, axa valorilor x cu două puncte $+\infty$ și $-\infty$ care au fiecare cîte o semivecinătate. De exemplu, fraza „$f(x)$ tinde către L cînd x tinde către $+\infty$" va însemna

$$\forall \varepsilon,\ \exists B > 0 \colon B < x \Longrightarrow | f(x) - L | < \varepsilon.$$

Scriem

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} L$$

Faza „$f(x)$ tinde către $+\infty$ cînd x tinde către $-\infty$" înseamnă

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 : x < -B \Longrightarrow A < f(x).$$

Scriem

$$f(x) \underset{x \to -\infty}{\Longrightarrow} +\infty$$

(Dispariția semnelor de valoare absolută corespunde faptului că aici se consideră semivecinătăți).

Pentru a utiliza această extensie a noțiunii de limită, trebuie să reluăm demonstrația teoremelor referitoare la operațiile cu limite. Obținem fără dificultate enunțuri cu totul analoage enunțurilor demonstrate, dacă acceptăm să precizăm semnificația simbolului ∞ prin convențiile următoare:

$$\forall L : +\infty + L = L + \infty = +\infty;\quad -\infty + L = L - \infty = -\infty$$

$$L > 0 : (+\infty) \cdot L = L \cdot (+\infty) = +\infty;\ (-\infty) \cdot L = L \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$L < 0 : (+\infty) \cdot L = L \cdot (+\infty) = -\infty;\ (-\infty) \cdot L = L \cdot (-\infty) = +\infty$$

De exemplu, ultimul rezultat enunțat este: „dacă două funcții au ca limită, cînd x tinde către x_0, respectiv un număr negativ L și $-\infty$, produsul lor tinde către $+\infty$". Tot astfel de exemplu $(+\infty)\ (-\infty) = -\infty$.

Putem accepta o scriere simbolică cum este $1/\infty = 0$, a cărei semnificație este: „dacă o funcție tinde către infinit cînd x tinde către x_0, inversa ei tinde către zero, în aceleași condiții". De asemenea, putem accepta

$$1/0 = \infty.$$

Apare însă imediat și pericolul acestor notații, fiindcă din cele de mai sus *nu* putem deduce $0 \cdot \infty = 1$. Este fals că produsul a două funcții care tind respectiv către 0 și către infinit ar tinde

totdeauna către 1: pentru a ne da seama de aceasta, este suficient să considerăm, de exemplu în vecinătatea lui $x = 0$, funcţiile x, x^2, x^3, $5x^3$ care tind către 0 şi funcţiile

$$\frac{4}{x}, \quad \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{+4}{3x^3}, \quad \frac{2}{x^4},$$

care tind către infinit, şi să facem produsul unei funcţii de primul tip cu o funcţie de tipul al doilea: în aceste exemple, găsim 0, sau infinit, sau un număr oarecare. Se poate însă întîmpla, de asemenea, să nu obţinem nici o limită.

Astfel, să considerăm

$$u = x \sin (1/x) \text{ şi } v = 1/x.$$

Cînd $x \to 0$, ştim că $u \to 0$ şi $v \to \infty$. Or, produsul

$$uv = \sin (1/x)$$

oscilează între -1 şi $+1$ fără să aibă o limită.

Prin urmare, nu este posibil să se atribuie o semnificaţie simbolurilor

$$0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad +\infty - \infty$$

De fiecare dată cînd aplicarea regulilor generale conduce la astfel de simboluri, căutarea limitelor trebuie investigată adecvat cazului concret. Vom analiza cîteva asemenea cazuri cînd vom studia unele funcţii particulare.

DERIVATĂ. Se acceptă noţiunea de derivată la stînga sau la dreapta în x_0, precum şi cea de derivată infinită, noţiuni care, pe grafic, se interpretează: semitangenta sau tangenta la grafic este paralelă cu axa y.

CAPITOLUL 3

TRECERE DE LA STUDIUL LOCAL LA STUDIUL GLOBAL AL FUNCȚIILOR NUMERICE

I. Recapitularea teoremelor referitoare la funcțiile continue derivabile

a) CONTINUITATE. Dacă o funcție f este continuă pentru orice valoare x_0 dintr-un interval $[a, b]$, spunem că ea este *continuă pe interval*. Amintim teoremele care permit studiul global pe $[a, b]$.

Teorema continuității uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha: \ \forall_{x_2}^{x_1} \in [a, b], \ |x_2 - x_1| < \alpha \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Putem atunci împărți intervalul finit (a, b) în $n + 1$ segmente de lungime cel mult egală cu α, cu

$$n\alpha \leqslant b - a < (n + 1)\alpha.$$

Teorema marginilor. Mulțimea valorilor $f(x)$ luate de o funcție continuă în $[a, b]$ are o margine superioară și o margine inferioară. Ele sînt atinse pentru valori x care aparțin lui $[a, b]$.

Teorema valorilor intermediare. Orice valoare cuprinsă între margini este efectiv atinsă pentru o valoare x care aparține lui $[a, b]$.

b) DERIVABILITATE. Dacă o funcție f este derivabilă în orice valoare x_0 a unui interval $]a, b[$, spunem că ea este *derivabilă pe interval*.

Teorema creșterilor finite. Dacă o funcție f este continuă pe $[a, b]$ și este derivabilă pe $]a, b[$,

$$\exists \xi \in \ ]a, b[\ : f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

Deşi această teoremă nu dă nici o indicaţie precisă despre valoarea lui ξ, ea permite totuşi să se ajungă la concluzii importante. Semnalăm numai aplicarea ei la **calculele aproximative.**

Dacă în vecinătatea considerată a lui x_0 derivata unei funcţii f nu variază mult, vom putea estima pe $f(x)$, plecînd de la $f(x_0)$, prin valoarea aproximativă

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Dintr-un alt punct de vedere, dacă x_0 nu este cunoscut exact, dar dispunem de o valoare x_1 care aproximează pe x_0 pînă la un α, $|\Delta x| < \alpha$, eroarea comisă asupra lui $f(x_0)$ dacă înlocuim valoarea $f(x_0)$ cu valoarea $f(x_1)$ va fi

$$|\Delta y| = |f'(\xi)| \cdot |\Delta x|.$$

Dacă $|f'(x)|$ este majorat de k cînd x rămîne în vecinătatea considerată a lui x_0, putem da limita superioară a erorii prin inegalitatea

$$|\Delta y| < k \cdot \alpha.$$

II. Creşterea funcţiilor derivabile

Teoremă preliminară. *Dacă o funcţie φ ia valori pozitive $\varphi(x) > 0$ oricare ar fi x în vecinătatea lui x_0, şi dacă admite o limită în x_0, această limită λ nu poate fi negativă.*

Într-adevăr, valorile $\lambda < 0$ şi 0 pot fi *separate* cu ajutorul a două vecinătăţi $V(\lambda)$ şi $V(0)$ disjuncte. O funcţie cu limita λ ia valori $y_1 \in V(\lambda)$, de unde rezultă $y_1 < 0$, ceea ce contravine ipotezei.

CONSECINŢĂ REFERITOARE LA SEMNUL DERIVATEI

f *crescătoare pe* (a, b) $r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \Longrightarrow \forall x_0,\ f'(x_0) \geqslant 0,$

f *descrescătoare pe* (a, b) $r < 0 \Longrightarrow \forall x_0,\ f'(x_0) \leqslant 0,$

La care adăugăm: f *are valoarea constantă* $\Longrightarrow \forall x_0,\ f'(x_0) = 0.$

Teoreme reciproce. Teoremele precedente — avînd ipoteze globale și concluzii locale — sînt imediate. Din contra, pentru a folosi *infinitatea ipotezelor locale în toate punctele*, aplicăm teorema creșterilor finite.

ENUNȚURI

(1) $\forall x_0 \in (a, b),\ f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x) = k$ pe (a, b)

(2) $\forall x_0 \in (a, b),\ f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f \uparrow$

(3) $\forall x_0 \in (a, b),\ f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f \downarrow$

Demonstrația se face verificînd enunțurile contrapuse care sînt logic echivalente

$$\boxed{f(x) \text{ non-constantă}} \Longrightarrow \boxed{\exists x_1, x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)} \Longrightarrow \boxed{\exists \xi : f'(\xi) \neq 0}$$

$$\boxed{f(x) \text{ non-crescătoare}} \Longrightarrow \boxed{\exists x_1, x_2 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant 0} \Longrightarrow \boxed{\exists \xi : f'(\xi) \leqslant 0}$$

și la fel pentru (3).

APLICAȚIE. În felul acesta, studiul variației unei funcții este redus la studiul semnului derivatei funcției. Pentru funcțiile algebrice, aceasta înseamnă a reduce o problemă de analiză la o problemă de algebră, ceea ce, din punct de vedere teoretic, este mai simplu.

Din punct de vedere practic, rezolvarea aproximativă a ecuației $f'(x) = 0$ dă informații suficiente pentru construirea graficului și pentru nevoile practice.

Concluziile studiului variației unei funcții sînt prezentate într-un tabel numit *tabel de variație*: intervalul de definiție este descompus în intervale în care funcția este monotonă. Valoarea funcției, sau eventual limita ei, este indicată pentru fiecare valoare remarcabilă; dacă limita nu există, absența ei este semnalată. Se indică de asemenea valorile sau limitele derivatei, care se vor dovedi utile pentru precizarea graficului.

EXEMPLU:

$$y = x^2\sqrt{1-x^3}\ ;\quad y' = \frac{-7x(x^3-4/7)}{2\sqrt{1-x^3}}$$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{4/7}$		1	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	

$$M = 2^{4/3}\,3^{1/2}\,7^{-7/6} \simeq 0{,}45$$

$$\sqrt[3]{4/7} \simeq 0{,}82.$$

Pe lîngă valorile exacte indicate în tabel, se calculează şi valorile aproximative respective, ele fiind necesare pentru a marca punctele pe grafic, precum şi pentru eventuale aplicaţii practice.

CAPITOLUL 4

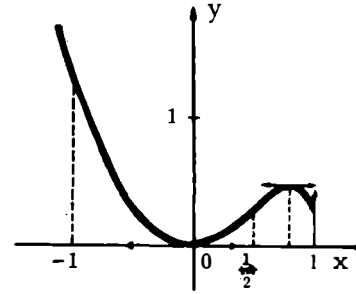
GRAFICE

I. Studiul global

Studiul variației unei funcții se completează cu trasarea și studierea graficului ei. Tabelul indică alura generală a curbei, fiindcă indică semnul pantei coardelor care unesc punctele dintr-un același interval. În cazul general — cînd nu cunoaștem natura curbei, pentru a dirija trasarea graficului, trebuie calculate coordonatele unui număr mai mult sau mai puțin mare de puncte, coordonate care sînt consemnate într-un *tabel de valori*.

În exemplul dat mai sus, la sfîrșitul cap. 3, pentru a preciza alura graficului, vom întocmi de pildă tabelul foarte simplu

x	-2	-1	0,5
y	12	$\sqrt{2}$	0,23



Uneori studiul poate fi simplificat, dacă se aplică observațiile următoare: ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$) fiind vectorii unitari pe axe,

a) Curba se deduce din graficul lui $y = g(x)$
prin translația $a\mathbf{j}$, dacă $\forall x$, $f(x) = g(x) + a$
prin translația $b\mathbf{i}$, dacă $\forall x$, $f(x) = g(x - b)$
prin afinitatea de axă $x'x$ și de raport k, dacă $f(x) = kg(x)$
prin afinitatea de axă $y'y$ și de raport h, dacă $f(x) = g(x/h)$.

Coliniaritățile nu mai sînt însă respectate de inversiunea axială

$$\forall x,\ f(x) = 1/g(x)$$

și nici de

$$\forall x,\ f(x) = [g(x)]^m.$$

Prin aceste transformări, graficele funcțiilor algebrice pot fi deduse din dreapta $y = x$, graficul funcției identice.

Vom consemna de asemenea corespondența $f(x) = |g(x)|$ care nu transformă prin simetrie în raport cu $x'x$ decît arcele lui $y = g(x)$ situate sub axa $x'x$.

b) Studiul poate fi simplificat dacă există simetrii:
Simetrie în raport cu o dreaptă $x = x_0$, dacă

$$\forall x,\ f(x_0 + x) = f(x_0 - x).$$

Simetrie în raport cu punctul $x = x_0$, $y = a$, dacă

$$\forall x,\ f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2a.$$

c) În cazul unei funcții trigonometrice, vom căuta *perioada*, cel mai mic număr pozitiv p astfel încît

$$\forall x,\ f(x + p) = f(x).$$

Studiul se face atunci într-un interval $(x_0, x_0 + p)$; arcul astfel obținut dă apoi graficul complet aplicîndu-i toate translațiile de vectori multipli ai lui $p\mathbf{i}$.

II. Studiul local

Construcția prin puncte se completează cu o construcție prin tangente și cu un studiu al concavității.

1. Tangenta

Teoremă. *Dacă într-un punct* (x_0, y_0) *al graficului, funcția admite o derivată în* x_0, *curba admite acolo o tangentă al cărei coeficient director este* $f'(x_0)$.

Acest enunț nu face decît să traducă definiția tangentei la o curbă într-un punct, și cea a derivatei unei funcții într-un punct.

Ceea ce constituie interesul acestei traduceri este faptul că, în vecinătatea punctului de contact, curba este foarte apropiată de

tangenta ei şi practic, pentru nevoile desenului, se confundă cu tangenta: este vorba aici de o problemă de contact, noţiune care trebuie precizată.

2. Introducere la noţiunea de contact

Spunem că două curbe care au un punct comun (x_0, y_0) şi care în vecinătatea acestui punct sînt graficele a două funcţii $y = f(x)$ şi $y = g(x)$, au în acel punct un *contact de ordin cel puţin egal cu* 1 dacă $\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$ tinde către zero cînd x tinde către x_0. Condiţia enunţată este echivalentă cu a spune că, într-o vecinătate de ordin α suficient de mică, putem asigura satisfacerea inegalităţii

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon |x - x_0|.$$

Prin urmare, în vecinătatea punctului comun, curbele sînt foarte vecine.

În particular, în punctul (x_0, y_0), ecuaţia tangentei (presupusă neparalelă cu $0y$) este

$$y = g(x) \equiv f'_0 \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Să formăm raportul

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'_0.$$

Limita lui, cînd x tinde către x_0, este $f'_0 - f'_0 = 0$.

Prin urmare, în punctul de contact, o curbă şi tangenta ei au un contact de ordin cel puţin egal cu 1.

Acest contact este de ordin cel puţin egal cu 2 dacă şi raportul $\frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^2}$ tinde către 0. El este de ordin cel puţin egal cu 3 dacă $\frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^3}$ tinde către 0 etc.

EXEMPLU: Graficul lui $y = x^3 + x$ în punctul $x = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \; f'_0 = 1, \; g(x) = x,$$

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^2} = x \to 0, \text{ însă } \frac{f(x) - g(x)}{x^3} \to 1.$$

Curba şi tangenta ei au în origine un contact de ordinul 2. Tangenta traversează curba. Punctul se numeşte *punct de inflexiune*.

Vedem de asemenea că graficul lui $y = x^4 + x$ și tangenta lui în origine au un contact de ordinul 3: tangenta nu traversează curba, dar în vecinătatea punctului considerat, curba are o curbură foarte mică; este un punct de suprainflexiune. Să notăm că am folosit termenul „curbură" într-un sens intuitiv. Teoria contactului ne permite să-i dăm un sens matematic.

3. Sensul concavității

Fără a merge prea departe cu studiul contactului, vom introduce noțiunea de *sens al concavității* graficului, determinînd de ce parte a tangentei se află graficul în vecinătatea unui punct (x_0, y_0).

Am văzut că ecuația tangentei este

$$y = g(x) \text{ cu } g(x) = f'_0 \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Graficul este deasupra tangentei lui (adică de partea valorilor y crescătoare) dacă este îndeplinită condiția $f(x) - g(x) > 0$, adică

$$f(x) - f(x_0) - f'_0 \cdot (x - x_0) > 0 \tag{1}$$

Conform teoremei creșterilor finite, există între x_0 și x o valoare ξ astfel încît

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0);$$

condiția este deci

$$[f'(\xi) - f'(x_0)] \cdot (x - x_0) > 0 \tag{2}$$

Să presupunem acum că funcția derivată $f'(x)$ este ea însăși continuă și derivabilă și să notăm $f''(x)$ această derivată; există atunci un nou număr între ξ și x_0, fie el x_1, astfel încît

$$f'(\xi) - f'(x_0) = f''(x_1) \cdot (\xi - x_0)$$

și condiția a devenit

$$f''(x_1)\,(\xi - x_0)\,(x - x_0) > 0. \tag{3}$$

Dar $(\xi - x)$ are semnul lui $(x - x_0)$, prin urmare condiția este cu siguranță satisfăcută dacă $f''(x)$ este pozitivă în orice punct al vecinătății considerate a lui x_0.

Reciproc, dacă o funcție $y = f(x)$ este astfel încît derivata ei este ea însăși derivabilă, adică dacă $f(x)$ admite o derivată secundă $f''(x)$, atunci în orice interval în care $f''(x)$ este pozitivă, curba este deasupra tangentei ei. Într-adevăr, funcția $f'(x)$ este crescătoare, ceea ce asigură condiția (2), deci asigură condiția (1). Spunem atunci că *graficul are concavitatea spre y crescător.*

Pentru un interval în care $f''(x)$ este negativ, studiul este analog. Concavitatea nu-şi poate schimba sensul, într-un interval în care $f''(x)$ există şi este continuă, decît într-un punct în care $f''(x) = 0$.

În felul acesta, *studiem sensul concavităţii graficului studiind semnul derivatei a doua* $f''(x)$.

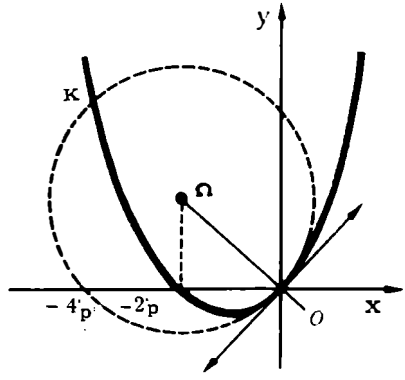
4. Curbura (geometrie metrică — bază ortonormală)

Curbura este mai mare sau mai mică după cum derivata — care dirijează tangenta — creşte mai rapid sau mai puţin rapid; aici intervine valoarea însăşi a lui $f''(x)$, nu numai semnul ei. *Raza de curbură* R într-un punct este raza cercului care, în acel punct, are cu curba contactul de ordinul cel mai mare, iar *curbura* este $1/R$.

EXEMPLU. Raza de curbură în origine a parabolei care este graficul funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{2p}x^2 + x.$$

Deoarece $f'(x) = \frac{x}{p} + 1$, $f'(0) = 1$ şi tangenta este prima bisectoare a axelor. Un cerc tangent situat de acea parte a tan-



gentei în care se află curba are ecuaţia

$$(y-a)^2+(x+a)^2=2a^2,\ a>0.$$

raza fiind $r = \sqrt{2}$.

În vecinătatea originei, arcul cercului tangent este graficul funcţiei $y = g(x)$ cu $g(x) = a - \sqrt{a^2 - 2ax - x^2}$.

Pentru a studia $f(x) - g(x)$ în vecinătatea lui $x = 0$, facem să intervină o cantitate conjugată expresiei iraţionale:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2p} x^2 + (x - a) + \sqrt{a^2 - 2ax - x^2} =$$

$$= \frac{1}{2p} x^2 + \frac{2x^2}{(x - a) - \sqrt{a^2 - 2ax - x^2}}$$

prin urmare, cînd x tinde către 0,

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^2}$$

tinde către

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{a}.$$

În consecinţă, cercul admite, în general, cu parabola un contact de ordinul 1, dar acest contact este de ordinul 2 dacă cercul este astfel încît $a = 2p$. Raza de curbură a parabolei în punctul O este deci $R = 2p\sqrt{2}$.

De notat că am fi putut determina pe a din condiţia $f''(0) = g''(0)$.

Cercul a cărui rază este raza de curbură şi care, firește, are centrul de partea concavităţii curbei se numeşte *cercul osculator* la curbă în punctul considerat.

Făcînd figura, vom căuta toate punctele comune parabolei şi cercului său osculator în O. Găsim că abscisele intersecţiilor satisfac ecuaţia

$$x^3(x + 4p) = 0$$

aşa că $x = 0$ apare ca fiind o rădăcină triplă, iar $x = -4p$ o rădăcină simplă. Rezultă de aici că cercul taie parabola în punctul $x = -4p$, $y = +4p$, aşa că *el traversează parabola în punctul O în care este tangent la ea.* Acesta este un fapt general pentru un cerc osculator, aşa cum fapt general este şi acela că într-un punct de inflexiune tangenta traversează curba.

Această introducere la punctul de vedere al contactului va fi completată în § IV.

Pentru a justifica definiţiile de mai sus a contactului şi a curburii, ar fi esenţial să se demonstreze că aceste proprietăţi sînt intrinsece, cu alte cuvinte că rezultatele sînt invariante la schimbarea coordonatelor. Vom relua problema la sfîrşitul acestui capitol.

III. Studiul ramurilor infinite

1. Curba admite o ramură infinită dacă cel puţin una din coordonatele punctului generic M al graficului tinde către infinit. În tabelul corespunzător variaţiei funcţiei pot apărea următoarele cazuri:

1) $f(x)$ *tinde către infinit cînd* x *tinde către* x_0. Spunem că dreapta de ecuaţie $x = x_0$ este *asimptota* acestei ramuri. În cazul general, y tinde către infinit cu semne diferite după cum x tinde către x_0 la dreapta sau la stînga (ex: $y = 1/x$).

2) $f(x)$ *tinde către o limită* L *cînd* x *tinde către infinit.* Dreapta de ecuaţie $y = L$ este asimptota curbei corespunzătoare ramurii infinite considerate. În cazul general, curba este deasupra sau dedesubtul acestei drepte după cum x tinde către infinit cu un semn sau altul.

3) Se poate întîmpla ca, atunci cînd x tinde către infinit, $f(x)$ să nu aibă o limită, sau să tindă şi ea către infinit (ex: $f(x) = \sin x$; $f(x) = x^2$). Trebuie atunci să deosebim următoarele două noţiuni:

a) **Direcţia asimptotică a unei ramuri infinite** (**geometrie afină**) Deoarece noţiunile pe care vrem să le introducem ţin de geometria afină, vom evita introducerea unghiurilor, şi vom face geometrie analitică într-o bază oarecare.

Fie $\mathcal{C}$ o curbă care admite o ramură infinită. Să unim punctul generator M cu un punct O oarecare; examinăm cazul în care direcţia OM admite o limită δ cînd M se îndepărtează indefinit. Să numim coordonatele: $O(0, 0)$, $M(x, y)$ şi fie $A(a, b)$ un punct diferit de O. Prin ipoteză, cînd x tinde către infinit, $m = y/x$ admite o limită δ şi AM este orientat de

$$m_1 = \frac{y - b}{x - a} = \frac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{b}{x}}{1 - \dfrac{a}{x}},$$

care admite aceeaşi limită δ.

Limita — dacă există — a direcţiei OM *cînd* M *se îndepărtează nelimitat se numeşte* **direcţia asimptotică** *a ramurii curbei.*

În felul acesta, pentru a determina direcția asimptotică a unei ramuri infinite a graficului funcției $x \searrow\!\!\nearrow y = f(x)$, căutăm limita lui

$$m = \frac{f(x) - b}{x - a},$$

unde b și a sînt alese cît mai convenabil.

EXEMPLE:

$y = 3(x - 1) + \frac{1}{x}$: Direcție asimptotică de coeficient director 3.
$y = \sin x$: Direcție asimptotică — corespunzătoare lui Ox.
$y = x^2$: Direcție asimptotică — corespunzătoare lui Oy.
$y = x \sin x$: Nu există direcție asimptotică.

b) **asimptotă**

Presupunînd că o ramură infinită are o direcție asimptotică Δ, să studiem această ramură în raport cu mulțimea dreptelor D de direcție Δ.

Să proiectăm punctul M — genericul lui $\mathcal{C}$ — pe una din aceste drepte, paralel cu o direcție Δ', diferită de Δ, de vector director $\mathbf{j}$. Dacă $\mathbf{KM} = \mu\mathbf{j}$ admite o limită $k\mathbf{j}$, dreapta D_0 care derivă din D prin translația $\mathbf{KK_0} = k\mathbf{j}$ este astfel încît $\mathbf{K_0M}$ tinde către $\mathbf{0}$.

Această dreaptă D_0 nu depinde nici de alegerea lui D de direcție Δ, nici de alegerea direcției Δ'. Obținem astfel definiția:

O dreaptă D_0 este dreaptă asimptotă a unei ramuri infinite dacă distanța punctului generic M pînă la D_0, măsurată paralel cu o direcție fixă, tinde către 0 cînd acest punct se îndepărtează nelimitat.

(Aceasta nu înseamnă, firește, că dreapta nu taie curba! De exemplu, axa x este asimptota curbei-grafic a lui $y = \frac{1}{x} \sin x$, care o taie în toate punctele de abscisă $x = k\pi$.)

Natural, pentru a studia un grafic, folosim ca direcție de proiecție direcția uneia din axele de coordonate, în general, cea a axei $y'y$, pentru orice direcție distinctă de cea a acestei axe.

Din punctul de vedere al geometriei metrice, se proiectează cel mai adesea perpendicular pe direcția Δ, și distanța considerată este distanța (ortogonală) pînă la dreapta D_0.

EXEMPLE:

1) $$y = 3x + 2 + \frac{1}{x}.$$

Este evidentă asimptota oblică, de ecuație

$$y = 3x + 2$$

2) $$y = 2x + \sqrt{\frac{x(x^2+4)}{x-1}}$$

definită pe $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

$$y = 2x + \sqrt{x^2 \frac{x + 4/x}{x-1}}.$$

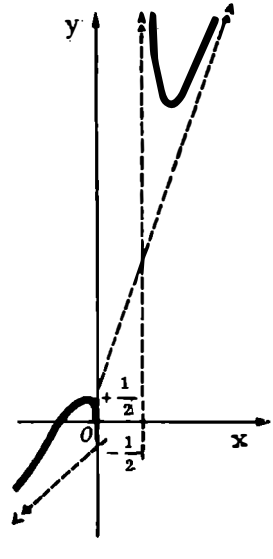
Calcule auxiliare:

$$R = \frac{x + \frac{4}{x}}{x-1} = \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} R = 1$$

$$R - 1 = \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x(R-1) = 1.$$



Prima ramură: $\boxed{x > 0}$

$$y = 2x + x\sqrt{R}$$

$$\frac{y}{x} = 2 + \sqrt{R} \to 3.$$

Dreapta D: $y = 3x$

$$\mathbf{KM} = y - 3x = x(\sqrt{R} - 1) = \frac{x(R-1)}{\sqrt{R}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Dreapta asimptotă: $y = 3x + \frac{1}{2}$.

A doua ramură: $\boxed{x<0}$

$$y = 2x - x\sqrt{R}$$

$$\frac{y}{x} - 2 - \sqrt{R} \to 1 \quad \text{dreapta } D\colon y = x.$$

$$\mathbf{KM} = y - x = x(1 - \sqrt{R}) \to \frac{1}{2}.$$

Dreapta asimptotă $y = x - \frac{1}{2}$.

Generalizare.

Mai general, spunem că *două curbe sînt una asimptota celeilalte* în ceea ce privește două ramuri infinite asociate, dacă secționarea prin drepte de direcție fixă d (de exemplu, cea a axei Oy) stabilește între ele o corespondență punctuală $M \searrow\!\!\nearrow P$ astfel încît distanța MP tinde către 0 cînd aceste puncte se îndepărtează nelimitat. Evident, dacă una din ramuri admite o asimptotă, cealaltă o admite și ea. Alegerea direcției d — diferită de o direcție asimptotică — nu intervine.

Cînd se construiește un grafic oarecum complicat, se caută — în lipsa unei asimptote rectilinii — o curbă asimptotă simplă pentru fiecare ramură infinită. De exemplu, pentru $y = x^2 + 2 + 1/x$ vom lua $z = x^2 + 2$ — cînd studiem ramura în vecinătatea lui x infinit.

2. Ramuri infinite — din punct de vedere proiectiv

Geometria proiectivă plană (Cartea a IV-a, Partea I, cap. 2) conduce la completarea fiecărei drepte cu un punct la infinit, mulțimea acestor puncte fiind dreapta de la infinit a planului p. A spune că o curbă c din planul p admite un punct la infinit înseamnă a spune că, dacă se face perspectiva într-un plan P neparalel cu p, curba C imagine a lui c admite un punct K în comun cu dreapta U a cărei imagine în p este dreapta de la infinit.

Pentru a defini în p direcția asimptotică δ, unim punctul generic m cu un punct ales a, apoi considerăm poziția limită a dreptei

d duse prin m paralel cu δ. După perspectivă, vedem că δ are direcţia lui SK şi că asimptota este imaginea t_0 a lui T_0. În felul acesta, *asimptota apare ca fiind tangenta în punctul de la infinit.*

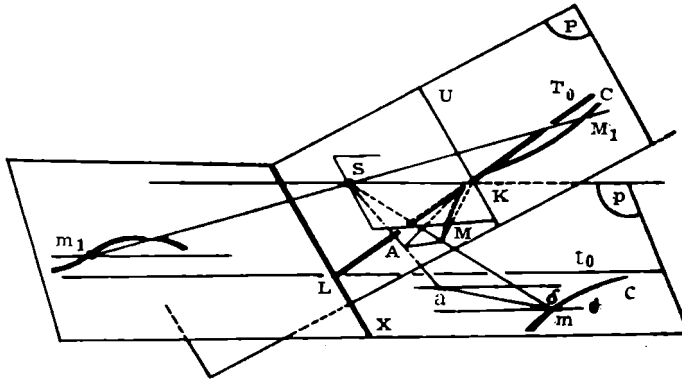


Figura a fost făcută în cazul general în care tangenta T_0 în K este distinctă de U, curba C, rămînînd — în vecinătatea lui K — de aceeaşi parte a lui T_0. Atunci cele două arce ale lui c sînt de o parte şi de alta a asimptotei.

Se va examina, ca exerciţiu, cazurile în care punctul K este un punct de inflexiune al lui C, sau este un punct de întoarcere.

Dacă tangenta în K la C este dreapta U, tangenta în c este dreapta de la infinit; spunem că c admite o ramură parabolică (pentru că aşa se întîmplă la parabolă).

IV. Noţiuni de geometrie infinitezimală a curbelor plane. Tangentă. Curbură

Pentru a da studiului local al unei curbe un caracter intrinsec, nu ne putem mulţumi cu a defini curba ca fiind graficul unei funcţii $f(x)$. Definim o curbă ca fiind mulţimea punctelor M extremităţi ale vectorilor **OM** care depind continuu de un parametru t. Dacă t măsoară timpul, curba se numeşte *traiectoria* punctului M. În cele ce urmează, vom face studiul în cadrul geometriei metrice. Vom vedea fără dificultate cît anume din el este valabil în geometria afină.

În raport cu o bază ortonormală fixă și cu originea O, avem

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

x și y fiind funcții de t.

Este util, de asemenea, să introducem un vector unitar $\mathbf{u}$ pe suportul lui OM. Introducem

$$\begin{cases} (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \theta \pmod{2\pi} \\ \mathbf{OM} = r\mathbf{u} \end{cases}$$

θ și r sînt *coordonatele polare* ale lui M, funcții de t — ca și coordonatele carteziene x și y.

a) Tangentă. Viteză.

Unei valori t_0 a lui t îi corespunde un punct M_0 în vecinătatea căruia studiem curba. Pentru a simplifica scrierea, omitem indicii 0, calculul fiind aplicabil în toate punctele în care limitele introduse există.

Derivata în raport cu t a vectorului $\mathbf{OM}$ este, prin definiție, limita vectorului

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta(\mathbf{OM}) = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M_0M} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\mathbf{u} + r\frac{1}{\Delta t}\Delta\mathbf{u}.$$

Să analizăm cine este limita $\Delta t/\Delta t$. Prin definiție,

$$\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j},$$

prin urmare, $\Delta\mathbf{u}/\Delta t$ are o limită

$$\mathbf{u}' = \theta'_t\,[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}] = \theta'_t\,\mathbf{w}$$

unde $\mathbf{w}$ este vectorul unitar definit de $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = +\pi/2 \pmod{2\pi}$.

În final, derivata vectorului $\mathbf{OM}$ în raport cu t este un vector pe care îl vom nota cu $\mathbf{V}$ — pentru că, dacă t este timpul, el este prin definiție *vectorul viteză* al mișcării — și care este dat de

$$(\mathbf{OM})' = \mathbf{V} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} = r'\mathbf{u} + r\theta'\mathbf{w}. \qquad (1)$$

Conform definiției sale și celei a tangentei în punctul M_0, suportul lui $\mathbf{V}$ este tangenta în M_0 la curbă. Să presupunem că a fost

ales un sens pozitiv pe curbă, ceea ce precizează un vector unitar **T** pe tangentă, și să notăm

$$\begin{cases} (\mathbf{i},\ \mathbf{T}) = \varphi \pmod{2\pi} \\ x' = v\ \cos\ \varphi,\ y' = v\ \sin\ \varphi; \end{cases}$$

v va fi măsura algebrică a lui **V** pe tangenta orientată. Vom avea

$$\mathbf{T} = \cos\ \varphi\ \mathbf{i} + \sin\ \varphi\ \mathbf{j}, \tag{2}$$

și

$$\mathbf{V} = v\mathbf{T}. \tag{3}$$

Aplicații:

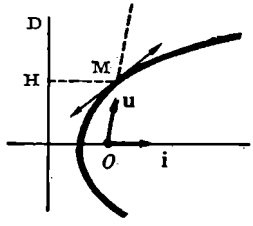
CIRCUMFERINȚA. r este constant; notăm $r = R$

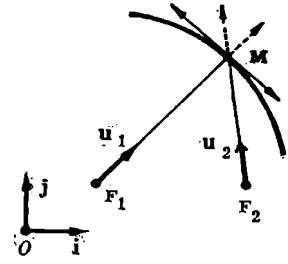
$$\mathbf{OM} = R\mathbf{u},\ \ \mathbf{T} = \mathbf{w},\ \ \mathbf{v} = R\varphi'\mathbf{T},$$

fiindcă în acest caz avem $\varphi = \theta + \pi/2$.

PARABOLA. Este locul punctelor echidistante de un punct O și de o dreaptă. Să atribuim acestei drepte ecuația $x = d < 0$; definiția se traduce prin $r = x - d$, deci $r' = x'$.

Relația (1) arată atunci că proiecțiile ortogonale ale lui **V** pe **i** și pe **u** sînt egale: aceasta înseamnă că *tangenta este paralelă cu bisectoarea unghiului* (**i**, **u**).





ELIPSA. Curba este definită plecînd de la două puncte fixe (focarele ei) F_1 și F_2, ca loc al punctelor M a căror sumă a distanțelor la aceste puncte este constantă, egală cu $2a > F_1F_2$.

Scriem

$$\mathbf{F_1M} = r_1\mathbf{u}_1,\ \mathbf{F_2M} = r_2\mathbf{u}_2,\ r_1 + r_2 = 2a.$$

Derivăm

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OF}_1 + \mathbf{F}_1\mathbf{M} = \mathbf{OF}_2 + \mathbf{F}_2\mathbf{M},$$

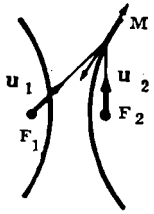
și obținem

$$\mathbf{V} = r_1' \mathbf{u}_1 + r_1 \theta_1' \mathbf{w}_1 = r_2' \mathbf{u}_2 + r_2 \theta_2' \mathbf{w}_2 \quad \text{cu} \quad r_1' = -r_2'$$

prin urmare, proiecțiile ortogonale ale lui $\mathbf{V}$ pe $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ sînt egale în valori absolute, dar de semne contrare: aceasta înseamnă că *tangenta este bisectoarea exterioară a lui* $(\mathbf{F}_1\mathbf{M}, \mathbf{F}_2\mathbf{M})$.

HIPERBOLA. Aceeași analiză, dar relația de definiție este

$$|r_1 - r_2| = 2a > F_1F_2.$$



Avem deci $r_1' = r_2'$ și *tangenta este bisectoarea interioară a lui* $(\mathbf{F}_1\mathbf{M}, \mathbf{F}_2\mathbf{M})$.

REMARCĂ. Dacă se face o schimbare de parametru $t = h(\lambda)$, toate derivatele — ale funcțiilor numerice și ale vectorilor — se înmulțesc cu $h'(\lambda)$, dar vectorii unitari și unghiurile, firește, se păstrează. În cinematică, timpul se impune în mod firesc ca parametru în raport cu care se derivează: el este variabila independentă, dar în geometrie, putem alege: deseori este practic să se ia ca parametru unghiul θ, sau unghiul φ; dar și mai interesant este să se ia un parametru care asigură $|\mathbf{V}| = 1$, adică $x'^2 + y'^2 = 1$, sau un parametru care asigură

$$\text{limita lui } \frac{1}{\Delta\lambda} M_0M = 1.$$

Acest parametru are dimensiunea unei lungimi: el se numește *abscisă curbilinie* a lui M pe curba orientată, și se notează cu s. Relația de definiție

$$\text{limita lui } (M_0M/\Delta s) = 1,$$

adică

$$\text{limita raportului } \left(\frac{\text{coarda } M_0M}{\text{arcul } M_0M}\right) = 1$$

este perfect compatibilă cu ceea ce se cere de la lungimea unui arc.

b) Curbura

Curbura corespunde unei variații a unghiului $\varphi = (\mathbf{i}, \mathbf{T})$ care dirijează pe $\mathbf{T}$; să derivăm deci vectorul $\mathbf{T}$; relația (2) dă

$$\mathbf{T}' = \varphi' \ (-\sin \varphi \ \mathbf{i} + \cos \varphi \ \mathbf{j}) = \varphi' \cdot \mathbf{N}, \qquad (4)$$

unde $\mathbf{N}$ este un vector perpendicular pe $\mathbf{T}$, deci *normal pe curbă.* El este unitar și definit prin $(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = +\pi/2 \pmod{2\pi}$.

Dacă t este timpul, derivata vectorului $\mathbf{V}$ se numește *accelerația* mișcării punctului, și se obișnuiește că ea să fie notată cu $\mathbf{\Gamma}$. Din (3), folosind (4), obținem

$$\mathbf{\Gamma} = v'\mathbf{T} + v\varphi'\mathbf{N}. \qquad (5)$$

Componenta tangențială a accelerației are ca măsură algebrică, pe tangenta orientată, derivata în raport cu timpul a măsurii algebrice a vitezei.

Dar cum se interpretează *componenta normală* $v\varphi'$? În cazul circumferinței, am găsit

$$\mathbf{V} = R\varphi'\mathbf{T} \text{ prin urmare } v = R\varphi' \text{ de unde } v\varphi' = v^2/R.$$

Prin analogie, să introducem pentru o curbă oarecare

$$R = \frac{v}{\varphi'}.$$

R are dimensiunea unei lungimi; el are și un semn; deoarece avem

$$R^2 = \frac{v^2}{\varphi'^2} = \frac{x'^2 + y'^2}{\varphi'^2},$$

R este invariant la o schimbare de parametru $t = h(\lambda)$. Mai mult, R este invariant la o schimbare a reperului ortonormal, căci

$$\begin{cases} x = a + X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y = b + X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases} \text{ implică } x'^2 + y'^2 = X'^2 + Y'^2,$$

iar φ, care crește cu unghiul constant α, are derivata invariantă.

Prin urmare, R este realmente o lungime înzestrată cu un semn și atașată intrinsec curbei în fiecare punct. Ea se numește *raza de curbură a curbei.* Atunci accelerația este dată de

$$\mathbf{\Gamma} = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} = v'\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}. \qquad (5')$$

Schimbînd convenţia făcută asupra sensului vectorului unitar normal **N**, am putea face în aşa fel încît să obţinem totdeauna R pozitiv; pentru aceasta, el trebuie făcut să depindă de curba la care se referă, şi nu de sensul pozitiv definit de bază.

Amintim că, dacă variabila este s, avem $v = 1$; aceasta înseamnă că $R = \frac{1}{\varphi'_s}$. Inversa $\frac{1}{R} = \varphi'_s$ se numeşte *curbură*; ea indică viteza cu care tangenta se roteşte în funcţie de arc.

LEGĂTURA CU TEORIA CONTACTULUI. Să luăm din nou, ca în § II, 4, abscisa x ca parametru. Formulele devin

$$\begin{cases} x'_t = 1 = v\cos\varphi \\ y'_t = y' = v\sin\varphi \end{cases}, \quad R = \frac{v}{\varphi'}, \quad y'' = \varphi'_x(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = \varphi'_x(1 + y'^2),$$

de unde

$$|R| = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

derivatele fiind luate în raport cu x.

Prin urmare, două grafice, $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ care, pentru $x = x_0$, trec prin acelaşi punct cu aceeaşi tangentă [$f(x_0) = g(x_0)$ şi $f'(x_0) = g'(x_0)$] şi astfel încît avem, în plus, $f''(x_0) = g''(x_0)$, au şi aceeaşi rază de curbură. Altfel spus, două curbe care au un contact de ordin cel puţin 2, au aceeaşi rază de curbură — în sensul studiului de faţă. În particular, cercul osculator este tocmai cercul de rază R, tangent, de partea care asigură contactul convenabil.

REMARCĂ. În cazul unei curbe strîmbe, studiul cinematic ar fi complet analog, dar, pentru a dirija vectorul unitar tangent **T**, nu mai este suficient un singur unghi. Trebuie introduse cele 3 cosinusuri directoare ale unghiurilor făcute de **T** cu axele de coordonate. Derivările pînă la ordinul doi introduc *curbura*, pînă la ordinul trei — *torsiunea* — inversa unei lungimi care caracterizează faptul că curba nu este plană. În mecanica clasică, derivatele utile sînt numai cele pînă la ordinul doi.

CAPITOLUL 5

APLICAȚIILE TEOREMELOR GENERALE

I. Funcții algebrice

Pentru a înţelege pe deplin cele precedente, cititorul a trebuit să construiască tabelele de variaţie şi graficele a numeroase exemple simple. Ne mai rămîne să consemnăm cîteva generalităţi referitoare la funcţiile de tipurile clasice.

1. Funcția polinom

$$\forall x, \searrow\!\!\_\_\nearrow P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Funcţia este definită, continuă şi derivabilă, oricare ar fi x. Graficul poate fi desenat în întregime fără a ridica creionul de pe hîrtie: este o curbă *unicursală*. Spunem că o curbă loc al unui punct M este unicursală dacă vectorul **OM** depinde *rațional* de un parametru t, astfel încît M descrie curba în întregime şi într-un mod continuu cînd t descrie un interval mărginit sau nu al mulţimii numerelor reale. În cazul dat, parametrul este pur şi simplu x.

Derivatele succesive sînt de grade descrescătoare; nu există decît $n + 1$ derivate care nu sînt identic nule. Termenii lor constanţi se formează foarte simplu cu ajutorul coeficienţilor succesivi ai lui $P(x)$ ordonat după puterile crescătoare; or, termenul constant este valoarea polinomului pentru $x = 0$. Obţinem astfel o formă interesantă de scriere a polinomului:

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1}P'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}P''(0) + \ldots + \frac{x^k}{1\cdot 2\cdot \ldots k}P^{(k)}(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot \ldots n}P^{(n)}(0)$$

sau, făcînd schimbarea de variabilă $X = x - x_0$ şi aplicînd formula de mai sus polinomului în X,

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1} P'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{1 \cdot 2 \cdot \ldots k} P^{(k)}(x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots n} P^{(n)}(x_0).$$

Această formulă se numeşte *formula lui Taylor pentru polinom*. Generalizarea ei pentru alte funcţii este esenţială pentru teoria contactului, fiindcă ea face să intervină valorile într-un punct x_0 ale derivatelor succesive. Noi însă nu vom dezvolta această teorie, pe care lucrarea de faţă nu-şi propune decît s-o pregătească.

Studiul polinomului cînd x tinde către infinit se face cu ajutorul teoremei următoare:

Teoremă. *Raportul dintre un polinom şi termenul de gradul cel mai mare al acestuia tinde către 1 cînd x tinde către infinit.*

Într-adevăr, scriem

$$\frac{P(x)}{a_0 x^n} = 1 + \frac{1}{x}\left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}\right].$$

Paranteza rămîne mărginită, ea se înmulţeşte cu $\frac{1}{x}$ care tinde către 0, prin urmare membrul al doilea tinde către 1.

Or, cînd x tinde către infinit, comportarea monomului $z = ax^p$ este cea indicată în tabelul următor:

		$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
p par...	$a > 0$	$z \to +\infty$	$z \to +\infty$
	$a < 0$	$z \to -\infty$	$z \to -\infty$
p impar...	$a > 0$	$z \to +\infty$	$z \to -\infty$
	$a < 0$	$z \to -\infty$	$z \to +\infty$

Conform teoremei enunţate, $P(x)$ se comportă ca termenul său de grad cel mai înalt care, pentru acest motiv, se numeşte *termenul principal* al polinomului: $P(x)$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$ după cum termenul său principal tinde către $+\infty$ sau $-\infty$.

REMARCĂ. Relația *„raportul limitelor tinde către 1 cînd x tinde către infinit"* este o relație de echivalență între funcții, pe baza teoremelor despre limite:

Reflexivitate:

$$\frac{f(x)}{f(x)} \to 1.$$

Simetrie:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \to 1\right] \Longrightarrow \left[\frac{g(x)}{f(x)} \to 1\right].$$

Tranzitivitate:

$$\left\{\left[\frac{f(x)}{g(x)} \to 1\right] \text{ și } \left[\frac{g(x)}{h(x)} \to 1\right]\right\} \Longrightarrow \left[\frac{f(x)}{h(x)} \to 1\right].$$

Putem deci nota această relație $f(x) \sim g(x)$.

Pe de altă parte, cînd am studiat curbele asimptote, am întîlnit o altă relație de echivalență: *„diferența tinde către 0 cînd x tinde către infinit"*;

Reflexivitate:

$$f(x) - f(x) \to 0.$$

Simetrie:

$$[f(x) - g(x)] \to 0 \Longrightarrow [g(x) - f(x)] \to 0.$$

Tranzitivitate:

$$\{[f(x) - g(x)] \to 0 \text{ și } [g(x) - h(x)] \to 0\} \Longrightarrow [f(x) - h(x) \to 0].$$

Dar aceste două relații de echivalență sînt distincte și ele nu trebuie confundate. Deoarece

$$\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - 1,$$

relația a doua o implică pe prima dacă $g(x)$ nu tinde către 0 (și, în particular, dacă $g(x)$ tinde către infinit), dar prima relație nu o implică pe a doua decît dacă $g(x)$ rămîne mărginită. Ar fi deci o greșeală gravă — cînd se caută o limită — să se înlocuiască, în toate împrejurările, o funcție cu o alta, „echivalentă" cu ea în sensul primei relații.

Cele de mai sus se aplică fără modificare cînd se studiază limite pentru x tinzînd nu către infinit, ci către o valoare x_0.

2. Fracții raționale

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 x^n + \ldots + a_n}{b_0 x^p + \ldots + b_p}.$$

a) Zerourile numitorului (adică valorile lui x care anulează acest numitor) — dacă există — sînt singurele valori pentru care fracția nu este definită. În toate celelalte puncte ea este continuă, derivabilă.

Vom presupune, în cele ce urmează, că zerourile lui $D(x)$ nu sînt și zeroruri ale lui $N(x)$, fiindcă dacă α ar fi un zero comun, am simplifica fracția împărțind cei doi termeni cu o putere convenabilă a lui $(x - \alpha)$. Am spus că definiția funcției trebuie atunci completată atribuindu-i pentru $x = \alpha$ valoarea (eventual nulă, sau infinită) pe care o indică fracția simplificată și care se numește „valoarea adevărată" a funcției date, în acel punct. Odată simplificarea făcută, fiecare zero al numitorului — pe care îl numim *pol* al funcției — este, pe grafic, abscisa unei asimptote paralele cu Oy. Schimbarea de semn a numitorului dacă rădăcina este de ordin impar, sau păstrarea semnului dacă rădăcina este de ordin par, determină poziția curbei față de asimptota ei.

b) Studiul funcției raționale pentru x tinzînd către infinit se face cu ajutorul unei teoreme:

Teoremă. *Cînd x tinde către infinit, fracția rațională are aceeași limită ca raportul termenilor principali — al numărătorului și al numitorului.*

Aceasta este o consecință imediată a teoremei referitoare la polinoame fiindcă scriem

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 x^n}{b_0 x^p} \cdot \frac{N(x)}{a_0 x^n} : \frac{D(x)}{b_0 x^p}$$

de unde — concluziile: cînd x tinde către infinit,

$n > p$	$f(x) \to \infty$
$n < p$	$f(x) \to 0$
$n = p$	$f(x) \to a_0/b_0$

c) Direcția asimptotică a graficului are drept coeficient director limita lui $f(x)/x$ cînd x tinde către infinit. Această limită coincide cu cea a lui a_0x^n/b_0x^{p+1}, de unde concluziile:

$n > p + 1$ Direcție asimptotică: Oy. Ramură parabolică.

$n < p + 1$ Direcție asimptotică: Ox.

$$\begin{cases} n = p & f(x) \to a_0/b_0. \quad \text{Asimptotă: } y = a_0/b_0 \\ n < p & f(x) \to 0. \quad \text{Asimptotă: } Ox \end{cases}$$

$n = p + 1$ Direcție asimptotică de coeficient director $\frac{a_0}{b_0}$.

Asimptota există; ea este dată de împărțirea lui $N(x)$ la $D(x)$, al cărei cît este de gradul întîi:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0}{b_0}x + k + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad d(R) < d(D).$$

Asimptota este dreapta de ecuație

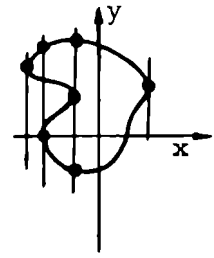
$$y = \frac{a_0}{b_0}x + k.$$

În cazul mai general $n > p + 1$, împărțirea dă o curbă asimptotă, grafic al unui polinom $y = Q(x)$ definit prin

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad d(R) < d(D).$$

3. Funcția implicită

a) O curbă algebrică este, în geometrie analitică, o curbă de ecuație întreagă $F(x, y) = 0$, unde F este un polinom. O asemenea



curbă nu este, în general, graficul unei funcții $y = f(x)$, ci este o *reuniune* de arce care sînt grafice: delimitarea graficelor se face discutînd numărul de rădăcini ale ecuației $F(x_0, y) = 0$ în funcție de valoarea lui x_0 și separînd, folosind continuitatea,

rădăcinile care trebuie urmărite. Problema care apare în felul acesta este cea a *funcțiilor implicite*: în general, nu știm să explicităm prin formule $y = f(x)$ funcțiile pe care le indică graficul.

Invers, fie o funcție explicită $y = f(x)$ algebrică, adică o funcție în care nu intervin decît operațiile: adunare, înmulțire, împărțire, extragere de radicali. Se demonstrează că graficul ei poate fi considerat drept o parte a unei curbe algebrice $F(x, y) = 0$.

De exemplu

$$y = x + \sqrt{x - 1} \text{ conduce la } \begin{cases} (y - x)^2 - (x - 1) = 0 \\ y - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pentru a forma $F(x, y)$, se înmulțește diferența $y - f(x)$ cu expresiile iraționale conjugate, pentru a face să dispară radicalii; se elimină, de asemenea, numitorii egalînd expresia cu 0.

Pe de o parte, aceasta permite — în cazurile simple — să se recunoască natura curbei, de exemplu cerc, parabolă etc., — de unde — o trasare corectă a graficului cerut. Dar ceea ce interesează mai ales este gradul lui $F(x, y)$, care indică numărul maxim de puncte de intersecție ale curbei cu o dreaptă oarecare $y = ux + v$. Acest grad se numește *gradul curbei algebrice*. El îngrădește posibilitatea curbei de a avea multe sinuozități; o curbă de grad mic nu poate avea decît o formă simplă, informație prețioasă pentru trasarea graficului.

Se demonstrează (Cartea a IV-a, Partea a III-a) că curbele de gradul doi nu pot fi decît de trei specii: elipsă (sau circumferință), parabolă, hiperbolă, ale căror forme sînt cunoscute. Din ele se deduce forma graficului funcțiilor $y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Tot astfel, curbele $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ sînt cubice. Cînd numitorul are două rădăcini, plasarea celor două asimptote paralele cu Oy și a asimptotei paralele cu Ox, precum și stabilirea poziției curbei în raport cu asimptotele sînt suficiente pentru a contura corect forma curbei. De notat că asimptota paralelă cu Ox, fiind tangentă la infinit, taie din nou curba într-un punct și numai în unul singur.

b) Evident, această noțiune de grad nu se aplică funcțiilor trigonometrice, sau funcțiilor transcendente cum este, de pildă, $y = x \sin x$. Și tocmai aceste funcții sînt cele care oferă numeroase exemple care arată necesitatea demonstrațiilor delicate în legătură cu limitele. Iată cîteva exemple clasice referitoare la vecinătatea unui punct luat ca origine a coordonatelor:

Exerciții. Să se construiască graficele funcțiilor

$y = \sin \frac{1}{x}$. Nu are limită cînd x tinde către 0.

$y = x \sin \frac{1}{x}$. În $x = 0$, îi atribuim „valoarea adevărată" care este 0. Funcția este atunci continuă în 0, dar nu are derivată în origine.

$y = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Făcută continuă, derivata ei în 0 este, prin definiție, limita lui y/x care este 0, dar funcția derivată $y' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ nu este continuă în 0.

$y = x^3 \sin \frac{1}{x}$. Dificultatea dispare pentru y'; ea nu subzistă decît pentru y'' și pentru derivatele de ordin superior.

4. Funcția liniară de mai multe variabile

Nu ne-am ocupat decît de funcții numerice de o variabilă. O funcție de două variabile va fi notată $(x_1, x_2) \xrightarrow{f} y$ sau $y = f(x_1, x_2)$. Dacă perechea (x_1, x_2) este reprezentată în spațiul punctual cu două dimensiuni de bază $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ și dacă y este luat paralel cu cel de al treilea vector al unei baze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a spațiului cu trei dimensiuni, graficul funcției este o suprafață. O putem studia prin secțiuni cu cilindri de bază dată

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \end{cases}$$

fiindcă y este atunci funcție de variabila t

$$y = f[\varphi_1(t), \ \varphi_2(t)].$$

Tot astfel, o funcție de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are un grafic într-un spațiu cu $n + 1$ dimensiuni.

Funcțiile fundamentale sînt *funcțiile liniare*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Să considerăm pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ drept componentele unui vector $\mathbf{V}$ în spaţiul R^n cu n dimensiuni; y apare atunci ca fiind o funcţie numerică de acest vector, fie ea $y = f(\mathbf{V})$. Cînd acest vector este supus la cele două operaţii care caracterizează structura de spaţiu vectorial, funcţia se transformă conform legilor

$$f(k \cdot \mathbf{V}) = k \cdot f(\mathbf{V}) \text{ şi } f(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = f(\mathbf{V}_1) + f(\mathbf{V}_2).$$

STUDIU ÎNTR-UN DOMENIU CONVEX. Să urmărim variaţia lui y cînd $\mathbf{V} = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$, adică de-a lungul unei drepte din R^n. Domeniul de definiţie se numeşte *convex* dacă corespunde mulţimii vectorilor $\mathbf{V}$ care verifică $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, interval definit pentru fiecare pereche $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Interiorul domeniului este atunci definit de $t_0 < t < t_1$, iar frontiera este mulţimea dată de $t = t_0$ şi $t = t_1$. Pe segmentul de dreapta, y este o funcţie afină de t, $y = at + b$; ea este deci monotonă de la t_0 la t_1. Rezultă de aici că *funcţia nu poate avea un extremum* (un maxim sau un minim) *în interiorul unui domeniu convex. În cazul unui domeniu convex poliedral* (poligonal, dacă $n = 2$) *cu un număr finit de vîrfuri, valorile extreme sînt atinse fiecare în cîte un vîrf.*

REMARCĂ. Această teoremă este valabilă pentru o funcţie afină

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + k$$

care, printr-o schimbare a originei, se reduce la o funcţie liniară.

Dacă componentele $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ale unui vector $\mathbf{U}$ al spaţiului cu p dimensiuni sînt funcţii liniare de $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ este *funcţie vectorială liniară* de $\mathbf{V}$. Prin opoziţie, spunem că $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sînt *funcţii scalare liniare* de $\mathbf{V}$.

Funcţii multiliniare. Fie, într-un spaţiu cu n dimensiuni, doi vectori variabili $\mathbf{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\mathbf{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Funcţia scalară

$$f(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \ldots + a_nx_ny_n$$

se numeşte funcţie biliniară. Ea este liniară separat în $\mathbf{V}$ şi în $\mathbf{W}$. Definim în mod analog funcţii multiliniare, scalare sau vectoriale.

Cînd se studiază spaţiile vectoriale, se introduc funcţii multiliniare numite *determinanţi*, pe care noi le-am notat δ şi Δ.

În geometrie, exemplele fundamentale sînt, în spaţiul metric cu 3 dimensiuni, produsul scalar şi produsul vectorial a doi vectori (Cartea I, cap.5).

În fizică se introduc cîmpuri de vectori, domenii în care fiecare punct are atașat un vector, și se consideră funcții scalare și vectoriale de mai multe variabile, ele însele scalare sau vectoriale.

II. Aplicarea studiului funcțiilor la rezolvarea ecuațiilor

Pentru a studia o ecuație $f(x) = 0$, adică pentru a determina numărul de rădăcini, a le izola și a obține o metodă de calcul aproximativ, este indicat să se folosească particularitățile graficului funcției $y = f(x)$. Semnalăm numai cîteva observații esențiale.

Într-un interval (a, b) în care funcția este continuă și derivabilă, două rădăcini ale ecuației, adică două zerouri ale funcției, sînt separate prin cel puțin un zero al derivatei (teorema lui Rolle).

Conform teoremei valorilor intermediare, dacă x_1 și x_2 dau două valori de semne contrare pentru $f(x)$, ele sînt separate prin cel puțin un zero al lui $f(x)$, iar dacă funcția este monotonă în (x_1, x_2) zeroul intermediar este unic.

În fine, dacă $f(x)$ este un polinom sau o funcție rațională al cărui numărător are gradul n, ecuația nu poate avea mai mult de n rădăcini.

Trebuie remarcat că atunci cînd socotim numărul de rădăcini exclusiv pe baza informațiilor despre convexitatea graficului, nu putem ține seama de ordinul rădăcinilor multiple. Aceste informații trebuie completate cu rezultatele pe care le dă teoria contactului: dacă pentru rădăcina considerată a, nu numai $f(a) = 0$, ci și $f'(a) = 0$, graficul este tangent la Ox: contactul este cel puțin 1; rădăcina este cel puțin dublă. Dacă, în plus, $f''(a) = 0$, contactul este cel puțin 2, rădăcina este cel puțin triplă etc. În fine, așa cum am spus, unei direcții asimptotice Oy îi corespunde — în cazul unei ecuații algebrice — o rădăcină infinită, iar o asimptotă paralelă cu Ox indică (cel puțin) două rădăcini infinite.

EXEMPLU: Să se demonstreze că derivata de ordin n a lui $y = 1/(x^2 + 1)$ are n rădăcini.

Se verifică, printr-un raționament prin recurență, că această derivată este de forma

$$y^{(n)} = \frac{P_n}{(x^2 + 1)^{n+1}},$$

unde P_n este un polinom de grad n, iar concluzia se obţine din aproape în aproape din tabelul

x	$-\infty$			$+\infty$
y	0			0
y'	0	0		0
y''	0	0	0	0
..	.....			

Deşi la numărarea zerourilor fiecărei funcţii, enunţul referitor la grad nu ţine seama de zerourile care sînt la infinit (punctul de vedere al algebrei polinoamelor), pentru demonstrarea limitelor nule cînd x tinde către infinit, noi ţinem seama şi de ele.

EXEMPLU DE DISCUŢIE A EXISTENŢEI RĂDĂCINILOR:

Ecuaţia $x^3 + px + q = 0$.

Considerăm funcţia

$$y = x^3 + px + q, \text{ de unde } y' = 3x^2 + p.$$

Tabelul de variaţie ne permite să schiţăm graficul:

1) $p \geqslant 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

o rădăcină

2) $p \leqslant 0$

x	$-\infty$		$-x_0$		$+x_0$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$$x_0 = \sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad M = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q, \quad m = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$$

$$M \cdot m = \frac{4p^3}{27} + q^2.$$

Concluziile (care cuprind ambele cazuri) sînt deci:

$4p^3 + 27q^2 > 0$ O rădăcină.

$4p^3 + 27q^2 < 0$ Trei rădăcini.

$4p^3 + 27q^2 = 0$ Două rădăcini, dintre care una dublă.

Am reușit deci să regăsim toate rădăcinile prevăzute de metodele din Cartea a II-a, cap.2 § III.

Vom folosi aceste concluzii cînd vom introduce numerele complexe (cap.6).

METODA CURBELOR AUXILIARE. Fie că trebuie discutată ecuația transcendentă $2x + 1 - 3x \sin x = 0$. Construim grafic, raportate la aceleași axe, graficele funcțiilor

$$u = \sin x \quad \text{și} \quad z = \frac{2x + 1}{3x}.$$

Punctele lor comune vor avea ca abscise rădăcinile cerute. (Uneori trebuie precizate cu multă grijă arcele de curbe a căror dispunere relativă nu este evidentă). Curbele considerate în acest exemplu ar putea fi folosite pentru a studia variațiile funcției

$$y = x^2 + x + 3(x \cos x - \sin x)$$

a cărei derivată este tocmai primul membru al ecuației propuse.

CALCULUL APROXIMATIV AL RĂDĂCINILOR. Să presupunem rădăcină izolată într-un interval (x_1, x_2) și să presupunem $f(x_1)$ și $f(x_2)$ de semne contrare. Obținem o valoare aproximativă destul de bună a rădăcinii înlocuind arcul M_1M_2 prin coarda M_1M_2; calculul abscisei punctului în care aceasta taie $x'x$ este imediat (metoda de interpolare). Fie x_3 valoarea găsită. Calculul lui $f(x_3)$ indică dacă x_3 îl înlocuiește pe x_1 sau pe x_2, după care se ia totul de la început cu intervalul nou obținut.

În general, această metodă este folosită în combinație cu metoda lui Newton care constă în a înlocui arcul de curbă cu tangenta în una din extremitățile lui: cunoscînd sensul concavității curbei, putem prevedea care este tangenta adecvată.

Semnalăm, în fine, pentru interesul pe care-l prezintă acest tip de procedee pentru calculul în cazul calculatoarelor, principiul unei *metode de iterație*:

Fie că trebuie rezolvată prin aproximaţii ecuaţia

$$x^3 + 5x - 4 = 0.$$

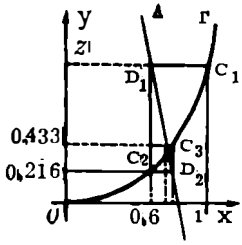
Să urmărim procedeul pe figura formată din curba Γ şi dreapta Δ, graficele respective ale funcţiilor $y = x^3$ şi $z = -5x + 4$.

x	1		0,6		0,757		0,713		0,727		0,723
z				0,216		0,433		0,362		0,384	

$$a \simeq 0{,}725$$

Pornim, de exemplu, de la valoarea $x = 1$. Ea dă pe curbă un punct C_1, ordonatei căruia îi corespunde pe dreaptă un punct D_1, abscisei căruia îi corespunde pe curbă un punct C_2 etc. Şirul de puncte se apropie de punctul de intersecţie a cărui abscisă a o căutăm.

Interesul pe care această metodă îl prezintă pentru calculul cu o maşină constă în aceea că este suficient să se regleze maşina o dată pentru totdeauna (în cazul dat, trebuie calculat cubul unui număr, şi trebuie calculată expresia $x_i = 0{,}8 - 0{,}2\,z_i$).



Maşina arată ea singură dacă şirul valorilor x_i calculate converge rapid. Metoda prezintă însă interes considerabil şi din punct de vedere teoretic, cu condiţia să se demonstreze în prealabil convergenţa către rădăcina căutată.

În fine, pe lîngă folosirea calculatoarelor, semnalăm şi folosirea tabelelor numerice şi a familiilor de curbe trasate o dată pentru totdeauna (abace) — pentru rezolvarea problemelor numerice.

CAPITOLUL 6

PRIMITIVELE

În Cartea I, cap. 6, teoria măsurii ne-a condus la teoria primitivelor care permit introducerea anumitor arii. Vom relua acum acest studiu concentrîndu-ne atenţia nu asupra domeniilor şi a măsurii acestora, ci asupra primitivelor ca funcţii numerice.

I. Primitiva generală a unei funcţii

1) O funcţie $F(x)$ se numeşte *primitiva* unei funcţii $f(x)$ într-un interval dacă $f(x)$ este funcţia derivată a lui $F(x)$.

Teoremă. *Dacă funcţiile $F(x)$ şi $G(x)$ sînt două primitive ale unei aceleiaşi funcţii $f(x)$ într-un interval, diferenţa $G(x) - F(x)$ este constantă.* Într-adevăr, această diferenţă are derivata nulă în orice punct al intervalului, şi noi am demonstrat, ca o consecinţă a teoremei creşterilor finite, că de aici rezultă constanţa acestei diferenţe (Cartea I, cap. 4).

Deoarece, şi invers, $F(x)$ şi $F(x) + C$ au aceeaşi funcţie derivată, oricare ar fi constanta C, conchidem că dacă o funcţie $f(x)$ admite *o primitivă particulară* $F(x)$, familia primitivelor ei este constituită din funcţiile $G(x) = F(x) + C$. Numim această mulţime *primitiva generală a lui* $f(x)$.

$$\mathfrak{P}f(x) = F(x) + C.$$

C este *constanta arbitrară*; fiecare din valorile ei determină o primitivă particulară.

2. **Calculul primitivei generale,** dacă ea există.

a) Tabelul funcţiilor derivate ale funcţiilor uzuale dă primitivele funcţiilor simple; astfel:

$f(x) = x^n$, n întreg pozitiv	$\mathfrak{P}f(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$f(x) = 1/x^n$, n întreg pozitiv $\neq 1$	$\mathfrak{P}f(x) = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{x^{n-1}} + C$
$f(x) = x^{p/q}$, $(x > 0)$, $p/q \neq -1$	$\mathfrak{P}f(x) = \frac{1}{p/q+1} x^{p/q+1} + C$

Primul rînd al acestui tabel este deci valabil pentru orice număr raţional $n \neq -1$.

Dintre funcţiile de acest tip, numai $f(x) = 1/x$ nu are primitiva dată de aceste formule. Să nu conchidem însă că această primitivă nu există; într-adevăr, examinînd rezultatele de mai jos:

$f(x) = \sin x$	$\mathfrak{P}f(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$\mathfrak{P}f(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Arc sin $x + C$ şi Arc cos $x + D$
$f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	arc tg $x + C$

Vedem că dacă n-am fi cunoscut funcţiile trigonometrice inverse, am fi ignorat existenţa primitivelor funcţiilor algebrice

$$1/\sqrt{1-x^2} \quad \text{şi} \quad 1/(1+x^2).$$

Vom arăta mai departe că $1/x$ are o primitivă generală.

b) Dacă o funcţie nu figurează în tabel, încercăm să-i aplicăm una din teoremele următoare care rezultă din proprietăţile derivatei:

1. **Teoremă.** *Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, $kF(x)+C$ este primitiva generală a lui $kf(x)$.*

2. **Teoremă.** *Primitiva generală a sumei unui număr oarecare dat* (finit) *de funcţii este suma primitivelor generale ale funcţiilor date.*

Ne vom strădui deci să punem funcţia a cărei primitivă o căutăm sub forma unei sume de funcţii simple; în particular, dacă este vorba de o fracţie raţională, există un capitol important din algebră consacrat unei astfel de descompuneri: el completează cele spuse de noi în legătură cu împărţirea polinoamelor.

Teorema schimbării de variabilă. Este, dintr-un punct de vedere invers, teorema derivării unei funcţii compuse.

Căutăm $F(x)$ astfel încît $F'(x)=f(x)$. Dacă considerăm pe x drept o funcţie de o variabilă auxiliară u, vom folosi sistemul:

$$\begin{cases} x = g(u), \text{ funcţie dată, derivabilă: } x'_u = g'(u) \\ F'_u = F'_x \cdot x'_u \end{cases}$$

EXEMPLU. Să regăsim primitiva generală a lui $f(x)=1/\sqrt{1-x^2}$. Vom introduce u, $-\pi/2 < u < \pi/2$, prin $x = \sin u$.

Atunci

$$F'_u = \frac{1}{\cos u} \cdot \cos u = 1,$$

deci

$$F = u + C = \operatorname{Arc\,sin}\ x + C$$

Cu titlu de exerciţiu, să procedăm în acelaşi mod pentru funcţia

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Aceeași schimbare de variabilă dă

$$F'_u = \cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

a cărei primitivă o cunoaștem

$$F = \frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\sin 2u) + C = \frac{1}{2}(\text{Arc sin } x + x\sqrt{1 - x^2}) + C.$$

Trebuie știut cum să se dirijeze schimbările de variabilă imaginabile, de unde — un întreg studiu de mare interes practic, pe care însă noi nu-l vom dezvolta.

4. **Folosirea formulei de derivare a unui produs**

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Deducem de aici

$$uv = \mathfrak{P}(u'v) + \mathfrak{P}(uv') + C.$$

Dacă una din primitivele conținute în această formulă este cunoscută, cealaltă se deduce imediat.

EXEMPLU. Fie

$$f(x) = x \text{ arc tg } x$$

Vom avea

$$f(x) = u'v$$

dacă luăm

$$u = x^2/2, \quad v = \text{arc tg } x.$$

Să vedem deci dacă știm să găsim primitiva lui

$$uv' = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right].$$

Recunoaștem ușor

$$\mathfrak{P}uv' = \frac{1}{2}(x - \text{arc tg } x) + C.$$

Primitiva căutată este deci

$$uv - \mathfrak{P}uv' = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ arc tg } x - \frac{1}{2}x + C.$$

Observaţiile de mai sus par sărace şi fragmentare; dar dacă ştim să le utilizăm cu abilitate, ele constituie instrumente suficiente pentru o investigare elementară a primitivelor.

II. Interpretarea geometrică a primitivelor

Fie dată o funcţie $x \searrow f \nearrow y = f(x)$ presupusă definită şi continuă pe $[a, b]$. Graficul ei este un arc AB. Am demonstrat (Cartea I, cap. 4) că aria $aAMm$ ale cărei frontiere sînt axa x, curba şi cele două segmente aA şi mM de abscise a şi x *există*, şi că această arie $\mathcal{A}(x)$ este o primitivă a funcţiei f.

Vom relua partea de la sfîrşitul studiului, admiţînd aici că aria există — cu proprietăţile pe care i le-am enunţat.

Teoremă fundamentală. *Funcţia $\mathcal{A}(x)$ este o primitivă particulară a lui $f(x)$.*

Intuitiv, unei creşteri $x - x_0 = \Delta x$ îi corespunde o creştere $\Delta\mathcal{A}$, arie a unui dreptunghi mixtiliniu care este aproape egal cu $f(x_0) \cdot \Delta x$, aşa că $\Delta\mathcal{A}/\Delta x$ este aproape egal cu $f(x_0)$.

Trebuie să formulăm matematic această idee: În intervalul $(x_0, x_0 + \Delta x)$ funcţia continuă este cuprinsă între două margini M şi m care tind ambele către $f(x_0)$ cînd Δx tinde către 0.

a) Să presupunem mai întîi $f(x)$ *pozitiv* în (a, b). După definiţia ariei,

$$m \cdot |\Delta x| < |\Delta\mathcal{A}| < M \cdot |\Delta x|, \text{ deci } m < \left|\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x}\right| < M.$$

Dar $\Delta\mathcal{A}$ are semnul lui Δx, prin urmare

$$m < \frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta x} < M.$$

Cînd Δx tinde către 0, m şi M tind către $f(x_0)$ — datorită continuităţii funcţiei, prin urmare $\Delta\mathcal{A}/\Delta x$ are o limită care este $f(x_0)$. Prin urmare, $\mathcal{A}(x)$ este *o* primitivă a lui $f(x)$. Pentru a preciza *care*, este suficient să remarcăm că aria este nulă pentru $x = a$. Prin urmare, dacă cunoaştem o primitivă $F(x)$ a lui $f(x)$, aria $aAMm$ are valoarea

$$\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a).$$

Să notăm că $\mathcal{A}(x)$ nu depinde de acea dintre primitive pe care am notat-o $F(x)$; această diferență se notează

$$\mathcal{A}(x) = \mathfrak{L}_a^x f(x).$$

Astfel, în particular, aria $aAMb$ va fi

$$\mathcal{A}(b) = \mathfrak{L}_a^b f(x) = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Cînd a și b sînt date, acesta este *un număr*, și nu o funcție.

Dacă îl facem acum pe b să varieze, aria devine o funcție

$$X \searrow\!\!\!\nearrow \mathfrak{L}_a^X f(x) = F(X) - F(a)$$

a cărei derivată este $f(X)$. Dacă, din contra, facem să varieze a, aria devine funcția $X \searrow\!\!\!\nearrow \mathfrak{L}_X^b f(x) = F(b) - F(X)$, a cărei derivată este $-f(X)$.

EXEMPLU (formula lui Arhimede). Aria cuprinsă între o parabolă și o coardă AB perpendiculară pe axa parabolei.

Să calculăm mai întîi aria cuprinsă între parabola de ecuație $y = x^2/2p$, axa x și dreptele $x = a$, $x = b$; avem aici

$$b = -a > 0, \quad f(a) = f(b) = b^2/2p = h$$

$$F(x) = \frac{1}{6p} x^3,$$

$$F(b) - F(a) = 2F(b) = \frac{1}{3p} b^2 = \frac{1}{3} (2b) \left(\frac{1}{2p} b^2\right) = \frac{1}{3} (2b)h.$$

Aria cerută este deci 2/3 din aria dreptunghiului $aABb$.

b) Dacă $f(x)$ este negativ în interval, pentru a calcula aria trebuie să considerăm valorile absolute: a lui $f(x)$, a lui M și a lui m. Dar noi știm că schimbarea semnului lui $f(x)$ schimbă semnul lui $F(x)$. Prin urmare, pentru a generaliza formula scrisă, sîntem conduși să considerăm o arie afectată de un semn: semnul + pentru intervalele în care graficul este deasupra lui $x'x$, semnul — dacă graficul este dedesubt.

Formula (1) se aplică atunci fără a ține seama de semnul lui $f(x)$, dar ea dă o sumă în care ariile intervin cu + sau cu —, după semnul lui $f(x)$. Pentru a obține o sumă de arii pozitive, trebuie să calculăm succesiv ariile corespunzătoare intervalelor în care $f(x)$ păstrează un același semn, ceea ce impune calcularea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$.

c) ARIA UNUI DOMENIU CARE NU ESTE MĂRGINIT. Dacă x tinde către infinit și dacă $f(x)$ tinde atunci către 0, se poate în-

tîmpla ca $\mathcal{A}(x)$ să tindă către o limită finită: prin definiţie, această limită va fi numită aria domeniului nemărginit cuprins între aA, curbă şi axa x.

EXEMPLU:

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ F(x) = -\frac{1}{x}.$$

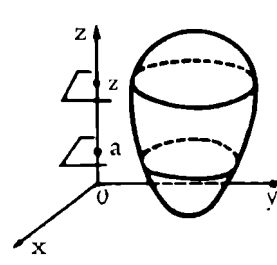
Într-un interval în care x este pozitiv, $\mathfrak{A}_a^x = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$, care tinde către $\frac{1}{a}$ cînd x tinde către $+\infty$.

Un studiu analog elucidează cazul în care $f(x) \to \infty$ cînd $x \to b$.

CALCULUL VOLUMELOR. Admiţînd existenţa volumelor, aşa cum am admis-o pe cea a ariilor plane, considerăm secţiunile plane de cotă z şi de arie $\mathcal{A}(z)$.

Dacă volumul v al plăcii cuprinse între secţiunile s_0 şi s_1 de cote z_0 şi $z_0 + \Delta z$ este minorat şi majorat de $m \cdot |\Delta z|$ şi $M \cdot |\Delta z|$, unde m şi M tind către $\mathcal{A}(z_0)$ cînd Δz tinde către 0, metoda indicată în cazul ariilor se aplică, şi volumul cuprins între $z = a$ şi $z = b$ este $\mathfrak{A}_a^b \mathcal{A}(z)$.

Pentru a determina pe m şi M, proiectăm cele două secţiuni s_0 şi s_1 pe un plan şi luăm



m = aria $(s_0 \cap s_1)$ şi $M = (s_0 \cup s_1)$.

Dacă aceste arii există şi au ca limită pe $\mathcal{A}(z_0)$ cînd Δz tinde către zero, metoda se aplică.

CAZURI PARTICULARE:

Con: 1) În cazul unui con cu baza triunghiulară, proiecţia făcută paralel cu una din muchii determină două prisme oblice cu proprietăţile dorite:

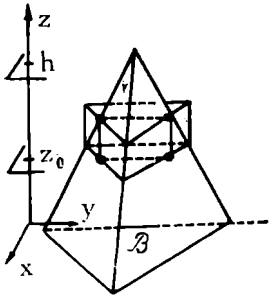
$$\left(\frac{h - z_0}{h}\right)^2 \mathfrak{B}\,\Delta z < v < \left(\frac{h - (z_0 + \Delta z)}{h}\right)^2 \mathfrak{B}\Delta z.$$

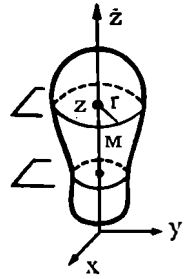
Conchidem:

$$\mathcal{V} = \mathfrak{T}_a^b\left[\frac{\mathcal{B}}{h^2}(h - z_0)^2\right] = \frac{\mathcal{B}}{3h^2}[(h - a)^3 - (h - b)^3].$$

Pentru $a = 0$, $b = h$, $\mathcal{V} = \frac{h}{3}\mathcal{B}$.

2) În cazul unui con oarecare, triangulația care permite să se





definească $\mathcal{A}(z)$ printr-un studiu de limită, permite de asemenea să se definească $\mathcal{A}(z)$ cu ajutorul unor reuniuni de conuri cu baza triunghiulară.

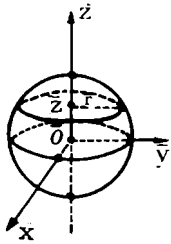
Volume de revoluție. Dacă curba meridiană care generează suprafața este definită de $z \xrightarrow{f} r = f(z)$, secțiunea s are aria $\mathcal{A}(z) = \pi r^2$.

Presupunînd curba f continuă, ea admite în $[x_0, x_0 + \Delta x]$ un minim r_1 și un maxim r_2, și vom lua $m = \pi r_1^2$ și $M = \pi r_2^2$ care tind către $\mathcal{A}(z_0)$.

Prin urmare, volumul căutat este $\pi \mathfrak{T}_a^b[r(x)]^2$.

EXEMPLU. Sfera $r = \sqrt{R^2 - z^2}$. Volumul segmentului sferic este

$$\pi(b - a)\left[R^2 - \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)\right].$$



Cel al sferei se obţine făcînd $a = -R$, $b = +R$, prin urmare

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

III. Funcţia logaritmică şi funcţia exponenţială

1) **Funcţia definită ca primitivă.** Fie dată o funcţie $x \searrow \underline{\quad f \quad} \nearrow y = f(x)$ definită şi continuă pe un interval $[\alpha, \beta]$. Putem oare studia o funcţie $F(x)$ ştiind doar că este o primitivă a lui f?

Să alegem în intervalul $[\alpha, \beta]$ o valoare origine a şi fie x elementul generic al acestui interval. Fie $\mathcal{A}(x)$ aria $aAMm$. Ştim că există o constantă C astfel încît

$$F(x) = \mathcal{A}(x) + C.$$

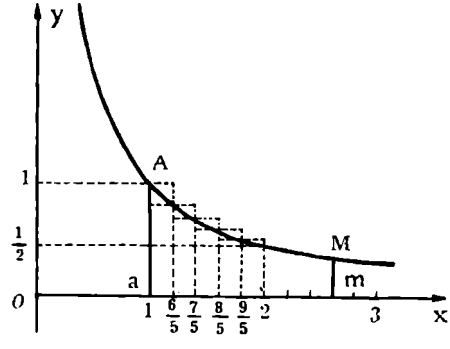
Pentru ca funcţia F să fie definită, trebuie să cunoaştem pe C, de exemplu prin condiţia $F(a) = C$. Aceasta înseamnă a da o „valoare iniţială" a lui F.

Derivata lui F fiind cunoscută — ea este, prin definiţie, funcţia f — cunoaştem creşterea sau descreşterea lui F; valori aproximative pentru F putem obţine evaluînd aproximativ aria $\mathcal{A}(x_0)$ pentru diferite valori ale lui x_0, cu ajutorul unor reuniuni de dreptunghiuri sau de trapeze; singurele care prezintă dificultăţi sînt problemele de limită referitoare la domenii infinite.

Vom face acest studiu pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) **Primitive ale funcţiei** $x \searrow \underline{\quad f \quad} \nearrow y = \frac{1}{x}$.

Funcţia este definită şi continuă în orice interval care nu conţine pe 0; s-o studiem în $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$. Să luăm ca origine a



ariilor segmentul aA de abscisă 1 și să numim $L(x)$ aria $aAMm$. Din felul cum am ales originea,

$$\begin{cases} \text{lui } x > 1 \text{ îi corespunde } y = L(x) > 0. \\ \text{lui } x < 1 \text{ îi corespunde } y = L(x) < 0. \end{cases}$$

Știm că $L(x)$ este funcție crescătoare; să calculăm cîteva valori folosind dreptunghiuri, de exemplu

x	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{14}{5}$	3
y	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{3}$

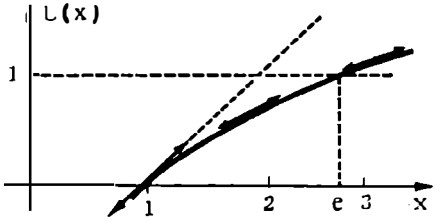
$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right) < L(2) < \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)$$

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{15}\right) < L(3) < \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right).$$

Tabelele ne dau valorile aproximative

$$0{,}6457 < L(2) < 0{,}746$$

$$1{,}034 < L(3) < 1{,}169.$$



Aceasta ne permite să schițăm curba cu ajutorul *elementelor de contact* (mulțime de puncte și de tangente în aceste puncte).

Studiu teoretic. Curba grafic a lui $y = \frac{1}{x}$ este invariantă la produsul următoarelor două afinități:

$$\mathcal{A}_1\begin{cases} x_0 \searrow\!\!\nearrow x_1 = kx_0 \\ y_0 \searrow\!\!\nearrow y_0 \end{cases}, \qquad \mathcal{A}_2\begin{cases} x_1 \searrow\!\!\nearrow x_1 \\ y_0 \searrow\!\!\nearrow y_1 = \frac{1}{k}\, y_0 \end{cases}$$

Să transformăm nu numai curba, ci și domeniile ale căror arii le calculăm: ariile sînt invariante la produsul celor două afinități (înmulțire, apoi împărțire la k).

Astfel:

$$\text{aria } (aAM_0m_0) = \text{aria } (kKM_1m_1),$$

adică

$$L(x_0) = L(kx_0) - L(k);$$

altfel spus:

$$L(kx_0) = L(k) + L(x_0).$$

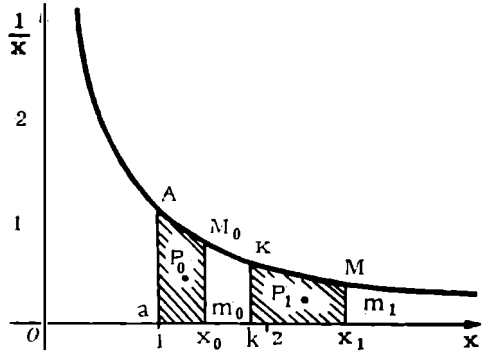
Aceste formule sînt valabile pentru orice valori pozitive ale lui k și x_0, chiar mai mici decît 1. (Este bine să se facă figurile corespunzătoare.)

Să schimbăm notațiile

$$L(x_1 \cdot x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

care conține condiția $L(1) = 0$.

Recunoaștem imediat că, cel puțin pentru valorile raționale $x \in Q^+$, $x \mapsto L(x)$ este o *funcție logaritmică*. Baza e este numărul definit prin $L(b) = 1$. Calculele făcute mai sus arată că e este ceva mai mic decît 3. Un calcul mai precis dă e $\simeq 2{,}71828$. Studii teoretice permit să se demonstreze că acest număr nu numai că este irațional, dar este și transcendent (Hermite, 1872) (Cartea I, cap.2, § 4).



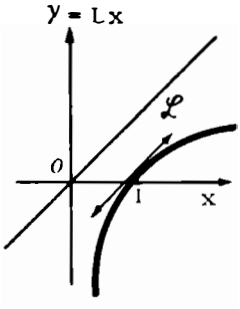
Deoarece funcția $L(x)$ este derivabilă, ea este continuă, și concluzionăm

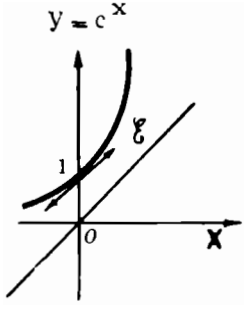
$$\forall x \in R^+, \quad L(x) = \log_e x.$$

$L(x)$ se mai scrie și Lx, și se citește *logaritm neperian de x* (după numele lui Neper, matematician scoțian, 1620). Funcția este bijectivă. Ea admite o funcție reciprocă notată

$$X \searrow\!\!\_\_\nearrow Y = e^X,$$

și numită *funcție exponențială*. În felul acesta, proprietățile se scriu sub două aspecte





$x \searrow\!\!\underline{f}\nearrow y = Lx$	$y = X \searrow\!\!\underline{g}\nearrow Y = e^X = x$
$L1 = 0$	$e^0 = 1$
$Le = 1$	$e^1 = e$
$L(x_1 \cdot x_2) = Lx_1 + Lx_2$	$e^{X_1} \cdot e^{X_2} = e^{X_1 + X_2}$
$L\left(\frac{1}{x}\right) = -Lx$	$1/e^X = e^{-X}$
$f'_x = \frac{1}{x}$	$g'_X = \frac{1}{f'_x} = x = e^X$
Prin urmare $(Lx)' = \frac{1}{x}$	Funcția exponențială este propria sa derivată $(e^X)' = e^X$

Altfel spus $\lim_{x \to x_0} \frac{Lx - Lx_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$	$\lim_{X \to X_0} \frac{e^X - e^{X_0}}{X - X_0} = e^{X_0}$
în particular $\lim_{x \to 1} \frac{Lx}{x - 1} = 1$	$\lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$
sau, sub altă formă $\lim_{h \to 0} \frac{L(1 + h)}{h} = 1$	$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$
şi $\lim_{t \to \infty} tL \left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1$	$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

Studiul celor două curbe la infinit. Fie deci $x \in R^+$.

a) $Lx < x$ este o consecinţă a formulei creşterilor finite: pentru $x > 1$, $Lx - L1 = \frac{x - 1}{\xi}$, $1 < \xi < x$; prin urmare $Lx < x - 1$.

b) *Lx tinde către infinit cînd x tinde către infinit.*

Într-adevăr, ştim să descompunem aria cuprinsă între hiperbola $y = 1/x$ şi axa x, începînd cu $x = 1$, în trapeze mixtilinii de arii egale, prin segmente de abscise $k > 1$, k^2, k^3, ...

În felul acesta $x > k^n \Longrightarrow Lx > nLk$, care tinde către infinit.

Pe baza simetriei curbei $\mathfrak{L}$ în raport cu bisectoarea lui (x, y), obţinem enunţul echivalent:

e^x tinde către infinit cînd x tinde către infinit.

c) *Direcţia asimptotică.*

Pentru a studia raportul $\frac{Lx}{x}$, folosim un artificiu:

Notăm $x = u^2 > 0$; atunci $Lx = 2Lu$ şi

$$\frac{Lx}{x} = 2\left(\frac{Lu}{u}\right)\cdot\frac{1}{u} < \frac{2}{u},$$

care tinde către zero.

Prin urmare

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{Lx}{x}\right) = 0}$$

Direcţia asimptotică: Ox. Nu există asimptotă.

Să traducem rezultatul pentru funcţia exponenţială:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0} \quad \text{, adică} \quad \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) = 0}$$

d) Mai general, să notăm $x = u^{\alpha+1}$, $u > 0$, $\alpha > 0$:

$$\frac{(Lx)^\alpha}{x} = (\alpha+1)\left(\frac{Lu}{u}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{u} < \frac{\alpha+1}{u},$$

care tinde către 0.

În felul acesta:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(Lx)^\alpha}{x}\right] = 0}$$

Să notăm, în această formulă, $x = u^\beta$, $\beta > 0$:

$$\frac{Lx}{x} = \beta\frac{Lu}{u^\beta}.$$

Prin urmare (schimbînd notaţiile):

$$\forall\alpha > 0, \quad \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{Lx}{x^\alpha}\right) = 0}$$

Tot astfel, introducînd $x = 1/v^\gamma$, $\gamma > 0$:

$$\frac{Lx}{x} = -\gamma \frac{Lv}{1/v^\gamma} = -\gamma v^\gamma Lv.$$

Prin urmare, $\forall \alpha > 0$, $x > 0$,

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} (x^\alpha Lx) = 0}$$

Aceste trei aspecte ale unei aceleiaşi formule sînt utile, prima — dacă α, pozitiv, este mare, ceea ce „favorizează" numărătorul infinit, celelalte două — dacă α este mic, ceea ce „defavorizează" termenul în x care tinde către 0. Putem spune intuitiv că termenul-putere x^α, chiar cu un exponent (pozitiv) mic, predomină faţă de Lx care tinde către infinit.

Traducere pentru funcţia exponenţială

$$\forall \alpha > 0, \quad \boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^\alpha}{e^x} \right) = 0},$$

chiar pentru α mare;

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{e^{\alpha x}} \right) = 0} \quad , \quad \boxed{\lim_{x \to \infty} (e^{\alpha x}\, x) = 0},$$

chiar pentru α mic.

Concluzie cu privire la primitiva generală a lui $\frac{1}{x}$.

$$\text{În }]0, +\infty[, \quad \mathcal{Q}\left(\frac{1}{x}\right) = Lx + C = L(kx),\ k > 0,$$

$$\text{În }]-\infty, 0[, \quad \mathcal{Q}\left(\frac{1}{x}\right) = L(-x) + D = L(hx),\ h < 0.$$

Conchidem:

$$x \in R - \{0\},\ \mathcal{Q}\left(\frac{1}{x}\right) = L\,|x| + C = L(kx),\ k \text{ de acelaşi semn cu } x.$$

EXERCIŢII

1) $(xLx)' = Lx + 1$, prin urmare $\mathcal{Q}(Lx) = xLx - x + C$.

Să se calculeze, în mod analog, $\mathcal{Q}(x^pLx)$, pornind de la comparaţia cu $(x^kLx)'$.

Să se caute, printr-o metodă analoagă, $\mathcal{Q}[x^p(Lx)^2]$ şi, de asemenea; $\mathcal{Q}(xe^x)$, $\mathcal{Q}(x^2e^x$.

2) Care este derivata lui $L(Lx)$? Dar cea a lui $L[L(Lx)]$? Ce primitivă putem deduce de aici?

IV. Noţiuni de ecuaţii diferenţiale

I. Exemple introductive. Am definit primitiva generală a a unei funcţii $f(x)$ definite pe X ca fiind mulţimea funcţiilor $F(x)$ care verifică

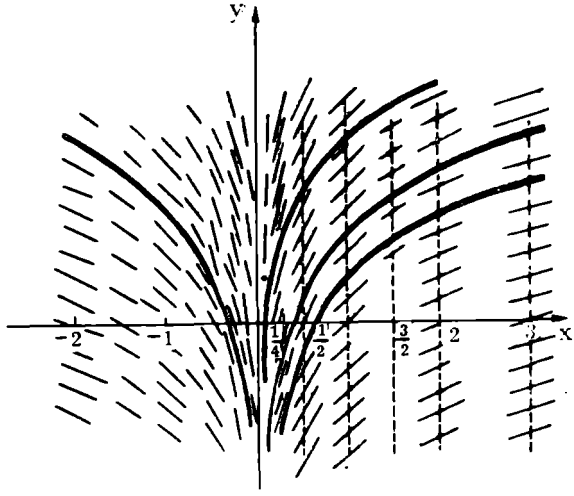
$$\forall x \in X,\ F'(x) = f(x),$$

ceea ce se scrie $y' = f(x)$, subînţelegînd că funcţiile căutate sînt scrise sub forma $y = F'(x)$. Această condiţie impusă derivatei funcţiei căutate se numeşte o *ecuaţie diferenţială*.

Din punct de vedere grafic, ea exprimă că, în fiecare punct (x_0, y_0) al planului care verifică $x_0 \in X$, se cunoaşte tangenta la grafic: ea are coeficientul director $f(x_0)$. Prin urmare, putem construi oricît de multe elemente ale *cîmpului elementelor de contact* (ansamblu format dintr-un punct şi din tangenta în acel punct). Apar atunci curbe care sînt aproximativ graficele funcţiilor căutate, aşa cum spectrul magnetic format din firişoarele de pilitură de fier vizualizează liniile de cîmp.

Deoarece $f(x_0)$ nu depinde de y_0, tangentele sînt paralele între ele de-a lungul întregii drepte $x = x_0$ paralele cu yy', aşa că dacă o curbă $\mathcal{C}$ satisface ecuaţia — aşadar: dacă este grafic al lui $F(x)$ — atunci toate curbele care se deduc din ea printr-o translaţie oarecare paralelă cu yy' satisfac şi ele condiţia: ele sînt grafice ale lui $F(x) + C$, unde C este o constantă oarecare.

Ştim că funcţiile care satisfac condiţia formează mulţimea $y \searrow\!\!\!\_\_\_\nearrow \mathfrak{P}f(x)$, primitiva generală a lui $f(x)$.



EXEMPLU. Figura este făcută pentru funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Funcţiile soluţie sînt $y = L|x| + C$.

Ca exerciţiu, se vor face figurile corespunzătoare altor funcţii, de pildă, pentru:

$y' = k$, care are ca integrală generală $y = kx + C$ (mulţime de drepte paralele),

$y' = x$ dă $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (familie de parabole),

$y' = e^x$ dă $y = e^x + C$,

$y' = ku'_x + hv'_x$ dă $y = ku(x) + hv(x) + C$.

Astfel, $y' = k \sin x + h \cos x$ dă $y = -k \cos x + h \sin x + C$ (x în radiani).

II. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Mai general, o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi este o relaţie între variabila x, funcţia y şi derivata acesteia y'. Ea se scrie $\varphi(x, y, y') = 0$ sau, în cazurile cele mai simple

$$y' = g(x, y).$$

Cazul studiat mai sus este cel în care y nu figurează în g. În fiecare punct (x_0, y_0) al regiunii în care este definită $g(x, y)$, coeficientul director al tangentei este $g(x_0, y_0)$. Prin urmare, ecuaţia dă, şi de data aceasta, un cîmp de elemente de contact. Prin urmare, ca şi în cazul anterior, figura dă o idee despre mulţimea graficelor funcţiilor care constituie integrala generală.

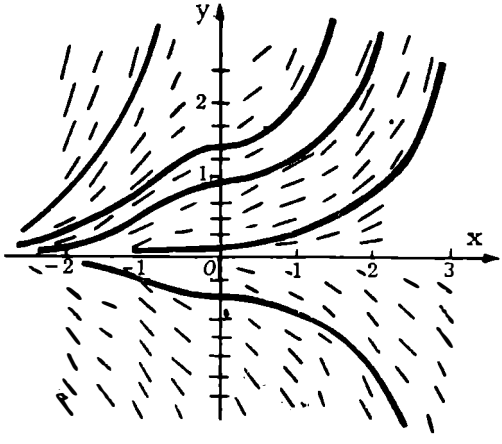
Pentru a demonstra existenţa curbelor este însă nevoie de un studiu foarte elaborat.

EXEMPLU: $y' = \frac{1}{4} x^2 y^3$.

Acest exemplu, destul de complicat, permite o serie de remarci: deoarece cîmpul este simetric în raport cu $x'x$, se vede imediat că dacă o curbă $\mathcal{C}$ satisface condiţia, atunci şi simetrica ei în raport cu $x'x$ o satisface. Se vede, de asemenea, uşor că punctele în care curbele taie $y'y$ sînt puncte de inflexiune. Aceasta ne sugerează să calculăm derivata a doua:

$$y'' = \frac{1}{4}(2xy^3 + 3x^2y^2y'), \text{ prin urmare } y'' = \frac{1}{16} xy^3 (8 + 3x^3y^2).$$

Pe lîngă punctul de inflexiune dat de $x = 0$, sesizăm şi alte asemenea puncte, corespunzătoare unor abscise negative.



Cît privește funcția $x \searrow\!\!\nearrow y = 0$, ea este, evident, o integrală.

Dar putem oare scrie *ecuația curbelor integrale*, cu alte cuvinte, putem oare *integra* ecuația? Da — dacă ne vine ideea să scriem

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{4}x^2.$$

Cunoaștem primitiva generală a fiecăruia din cei doi membri. De unde — integrala generală

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{12}x^3 + C.$$

Prin urmare: $x \overset{F_1}{\searrow\!\!\nearrow} y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{a^3 - x^3}}$ și $x \overset{F_2}{\searrow\!\!\nearrow} y = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{a^3 - x^3}}$.

Aceste formule ne relevă existența, pentru fiecare curbă, a asimptotei de ecuație $x = a$. Cititorul va verifica fără dificultate că, pentru $a < 0$, există un punct de inflexiune de abscisă negativă.

În general însă, nu știm să integrăm o ecuație diferențială. Metoda folosită mai sus este aplicabilă dacă ecuația este de forma

$$y'_x \varphi'_y(y) = g'(x),$$

fiindcă integrala generală este atunci $\varphi(y) = g(x) + C$ care dă funcțiile căutate sub formă implicită.

EXEMPLU SIMPLU: $y' = ky$, adică $\frac{y'}{y} = k$, de unde $L|y| = kx + C$, prin urmare $y = \pm e^{k(x-\alpha)}$ sau, sub o altă formă, $y = De^{kx}$.

Constanta de integrare α arată că curbele de integrale se deduc unele din altele prin translații paralele cu $x'x$. Sub cealaltă formă, constanta de integrare D arată că curbele derivă unele din altele prin afinități de axă $x'x$.

Semnalăm *integrala singulară* $x \searrow\!\!\nearrow y = 0$.

III. Ecuații diferențiale de ordin n. O ecuație diferențială de ordin n este o relație între $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, cu derivata de ordin n figurînd efectiv în relație.

Primul caz. Ecuația $y^{(n)} = f(x)$. Pentru a integra o asemenea ecuație, este suficient să se ia de n ori primitiva.

EXEMPLU. $y^{(4)} = \sin x$ (x în radiani). Relaţia este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} & y''' = -\cos x + C_1 \\ \Longleftrightarrow\ & y'' = -\sin x + C_1 x + C_2 \\ \Longleftrightarrow\ & y' = \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\ \Longleftrightarrow\ & y = \sin x + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

Observăm, pe acest exemplu, că apar 4 constante de integrare. Se poate demonstra că la fel se întîmplă şi în cazul general: o ecuaţie diferenţială de ordin n are o integrală generală care depinde de n constante de integrare arbitrare.

EXEMPLU IMPORTANT: $\boxed{y'' = ky}$.

Sesizăm uşor cazurile particulare:

$k = 1$ $\boxed{y'' = y}$. O soluţie este evidentă: $y = e^x$, dar remarcăm fără dificultate că şi $y = e^{-x}$ este soluţie, şi de aici deducem soluţia care depinde de 2 constante de integrare

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Se demonstrează că aceasta este integrala generală, că orice integrală se deduce din ea alegînd convenabil pe C_1 şi C_2.

$k = -1$ $\boxed{y'' = -y}$. Observăm direct soluţiile $y = \sin x$ şi $y = \cos x$, de unde — soluţia care depinde de 2 constante arbitrare:

$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, sau, sub altă formă, $y = D \sin (x - \alpha)$

Se demonstrează, şi în acest caz, că aceasta este integrala generală.

Rezolvarea în cazul general cere cunoaşterea semnului lui k.

$k = \omega^2$ $\boxed{y'' = \omega^2 y}$ integrala $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

$k = -\omega^2$ $\boxed{y'' = -\omega^2 y}$ integrala $y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$

sau încă $y = D \sin(\omega x - \alpha)$

Admitem, fără demonstrație, că alte soluții nu mai există.

IMPORTANȚA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE.

Din punctul de vedere al *geometriei*, ecuațiile diferențiale de ordinul întîi apar cînd se caută o curbă definită printr-o condiție care face să intervină tangenta în punctul generic.

EXEMPLU: *Să se determine curbele ale căror normale trec printr-un punct fix O.* $\forall M$, $OM \perp Mt$.

Condiția se exprimă prin $y' \cdot \frac{y}{x} = -1$, prin urmare:

$$y'y = -x \iff \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C,$$

adică $x^2 + y^2 = D$: mulțimea cercurilor de centru O.

În *mecanică*, formula fundamentală a dinamicii este formula lui Newton $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\Gamma}$, unde $\mathbf{F}$ este forța care acționează asupra punctului mobil M, iar $\boldsymbol{\Gamma}$ este accelerația lui M, adică derivata a doua în raport cu timpul a vectorului $\mathbf{OM}$. Prin urmare, o lege de forță se exprimă printr-o ecuație diferențială vectorială de ordinul doi.

În unele cazuri, o asemenea ecuație poate fi studiată direct. De exemplu:

$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{A}}$ unde $\mathbf{A}$ este un vector fix, dă:

$\mathbf{OM}'' = \mathbf{A}$, de unde $\mathbf{OM}' = t\mathbf{A} + \mathbf{B}$

și $\mathbf{OM} = \frac{1}{2} t^2\mathbf{A} + t\mathbf{B} + \mathbf{C}$

Notînd $\mathbf{C} = \mathbf{OM}_0$, obținem $\mathbf{MM}_0 = \frac{1}{2} t^2\mathbf{A} + t\mathbf{B}$,

așadar, *mișcare parabolică* în planul M_0, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Ecuația se poate rezolva însă și proiectînd egalitatea vectorială pe niște axe alese convenabil, pentru a reduce totul la un sistem de ecuații diferențiale numerice.

De pildă, $\boxed{\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{OM}}$, *forță atractivă proporțională cu distanța pînă la centrul O*, va da, după proiecția pe orice axă:

$$x'' = -\omega^2 x,$$

a cărei integrală generală a fost dată mai sus:

$$x = D \sin(\omega t - \alpha),$$

fiindcă x'' este derivata a doua a lui x în raport cu timpul t.

În spațiu, mișcarea va fi deci de tipul

$$\mathbf{OM} \begin{cases} x = D_1 \sin(\omega t - \alpha) \\ y = D_2 \sin(\omega t - \beta) \\ z = D_3 \sin(\omega t - \gamma) \end{cases}$$

care este determinat dacă sînt specificate condiții care permit să se calculeze cele 6 constante de integrare: de exemplu, sînt date poziția și viteza la momentul $t = 0$. Acestea sînt *condițiile inițiale*.

Se verifică ușor că există un vector fix $\mathbf{U}$ astfel încît $\mathbf{U} \times \mathbf{OM} = 0$, $\forall t$.

Aceasta înseamnă că M rămîne într-un plan fix, perpendicular pe $\mathbf{U}$. Traiectoria plană respectivă este o elipsă.

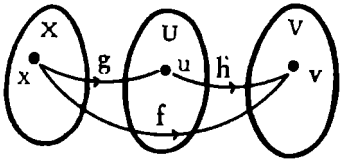
Legea atracției universale se exprimă însă prin

$$\boxed{F = -\frac{m\omega^2}{OM^3} \cdot \mathbf{OM}}$$

fiindcă forța este invers proporțională cu pătratul distanței OM. Cele cîteva observații cu care ne-am mulțumit nu sînt însă suficiente pentru acest studiu.

V. Notația diferențială

Fiind date diferite mulțimi $X, U, V, \ldots$ legate între ele printr-o familie de funcții așa cum este indicat pe schema ală-



turată, să alegem x_0 şi Δx aparţinînd lui X, de unde rezultă u_0 şi Δu în U, v_0 şi Δv în V etc.

Funcţiile g şi h sînt presupuse derivabile, deci şi f este derivabilă.

Să introducem

$$\Delta u = g'(x_0)\ \Delta x + \alpha(x_0,\ \Delta x)\ \Delta x,$$
$$\Delta v = h'(u_0)\ \Delta u + \beta(u_0,\ \Delta u)\ \Delta u.$$

Pe baza formulei fundamentale

$$g'(x_0)\ h'(u_0) = f'(x_0)$$

obţinem, eliminînd pe Δu:

$$\Delta v = f'(x_0)\ \Delta x + \{h'(u_0)\ \alpha(x_0, \Delta x) + \beta(u_0, \Delta u)\ [g'(x_0) + \alpha(x_0, \Delta x)]\}\ \Delta x = f'(x_0)\ \Delta x + \gamma(x_0, \Delta x)\cdot\Delta x.$$

Pe baza definiţiei derivatei unei funcţii, cînd Δx tinde către 0 — şi deci, şi Δu tinde către 0 — $\alpha(x_0,\ \Delta x)$, $\beta(u_0,\ \Delta u)$ şi $\gamma(x_0, \Delta x)$ tind către zero.

De remarcat că din formule rezultă că $h'(u_0)\cdot\Delta u \neq f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Introducerea diferenţialelor. Introducem nişte mulţimi „tangente" X_t, U_t, V_t, asociate mulţimilor X, U, V, ale căror elemente $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ sînt legate, pentru fiecare valoare x, prin

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}u &= g'(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v &= h'(u)\mathrm{d}u\end{aligned}\right\},\ \text{de unde}\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x.$$

Prin aceasta nu sînt definite decît rapoartele

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x),\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = h'(u),\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'(x),$$

dar dacă convenim ca, în una din mulţimi, de exemplu în X, să luăm diferenţiala egală cu creşterea în punctul ales, obţinem

$$\left\{\begin{aligned}\Delta x &= \mathrm{d}x,\\ \Delta u &= \mathrm{d}u + \alpha(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x,\\ \Delta v &= \mathrm{d}v + \gamma(x_0,\Delta x)\cdot\Delta x,\end{aligned}\right.$$

unde α şi γ tind către zero cînd Δx tinde către zero.

În acest caz du şi dv sînt *părţile principale* ale lui Δu şi Δv:

$$\frac{\Delta u - du}{\Delta x} \longrightarrow 0, \qquad \frac{\Delta v - dv}{\Delta x} \longrightarrow 0.$$

Dar interesul notaţiei diferenţiale constă, dimpotrivă, în aceea că nu necesită alegerea unei „variabile independente", adică a unei mulţimi care joacă un rol special, mulţimea în care am luat $\Delta x = dx$. Pentru a-şi manifesta întreaga ei utilitate, notaţia diferenţială introduce cu drepturi egale $\frac{dx}{du}$, $\frac{du}{dv}$ şi $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{du}$. Aceasta înseamnă că funcţiile trebuie presupuse bijective, ceea ce necesită, în general, o partiţie a mulţimilor de definiţie.

Diferenţialele şi corpul funcţiilor.

1) *Diferenţierea respectă structura de spaţiu vectorial*:

Fie $x \xrightarrow{f_1} u$ şi $x \xrightarrow{f_2} v$.

Dacă α şi β sînt nişte constante, formula

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)' = \alpha f_1' + \beta f_2'$$

dă

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv.$$

2) *Diferenţierea şi structura de corp*:

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2' \quad \text{şi} \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

dau

$$d(u \cdot v) = v\, du + u\, dv$$

şi

$$d\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-du}{u^2}.$$

Aplicaţie la studiul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi.

În loc de $F(x, y, y') = 0,$

scriem $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$

și căutăm relația între x și y fără a cere să se obțină explicit $y = f(x)$ sau $x = g(y)$.

EXEMPLUL 1.

$$3x^3y^2y' + 2x^3 + 1 = 0.$$

Scriem

$$3y^2\,dy = -\left(2 + \frac{1}{x^3}\right)dx.$$

Putem introduce o mulțime U prin

$$\begin{cases} du = 3y^2dy = \varphi'(y)\,dy \\ du = -\left(2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \psi'(y)dy \end{cases}$$

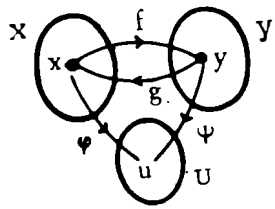
prin urmare

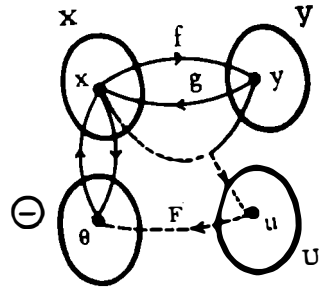
$$\begin{cases} y \searrow^{\varphi} \nearrow u = y^3 + C_1 \\ x \searrow_{\psi} \nearrow u = -2x + \frac{1}{2x^2} + C_2. \end{cases}$$

Prin urmare, f și g sînt date implicit de

$$y^3 + \frac{1}{2x^2} - 5x = C.$$

(Ex.1)





(Ex.2)

EXEMPLUL 2.

$$xy' - y = 2x^2\sqrt{1 - x^2}, \quad X = [-1, +1]$$

Scriem

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = 2\sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Introducem θ prin $x = \sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; prin urmare $\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ şi $\sqrt{1 - x^2} = \cos\theta$; introducem de asemenea u prin $u = \frac{y}{x}$, deci $\mathrm{d}u = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}$.

Ecuaţia devine atunci

$$\mathrm{d}u = 2\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta, \text{ adică } \mathrm{d}u = (1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

care dă

$$u = \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + C.$$

Putem da răspunsul sub forma

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow u = \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + C & \\ \theta & & \searrow y = ux \\ & \searrow x = \sin\theta & \end{array}$$

sau sub forma explicită,

$$y = x\,[\mathrm{Arc}\ \sin x + x\sqrt{1 - x^2} + C].$$

Toate acestea ne arată supleţea utilizării diferenţialelor.

CAPITOLUL 7

NUMERELE COMPLEXE

Cînd am introdus numerele reale — prin extensii succesive, plecînd de la întregii naturali — n-am avut nevoie de vreo justificare: se ştia cît de necesare sînt aceste noţiuni familiare. Am ajuns la o mulţime *completă* care ne-a permis să demonstrăm teoremele referitoare la funcţiile continue şi, în particular, teorema valorilor intermediare: există deci o concordanţă — în ceea ce priveşte existenţa rădăcinilor unei ecuaţii — între ceea ce arată graficul şi ceea ce ne furnizează mulţimea numerelor.

De ce să introducem atunci noi numere, şi cu ce preţ? La a doua întrebare, răspundem imediat: pierzînd relaţia de ordine: vom fi deci foarte departe de familiarul număr-măsură. În ceea ce priveşte prima întrebare, o introducere istorică arată cum s-a impus noua noţiune. Cîteva aplicaţii geometrice nu vor da (din păcate) decît o slabă idee despre importanţa numerelor complexe în matematică. Într-adevăr, aplicaţiile lor primordiale sînt cele din analiză. Vom putea totuşi schiţa teorema fundamentală a algebrei care, ea singură, şi tot ar fi suficientă pentru a justifica elaborarea teoriei.

I. Introducere istorică

Să comparăm rezultatele obţinute, prin analiză şi prin algebră, pentru ecuaţiile de gradul doi şi trei.

Fie ecuaţia

$$x^2 + px + q = 0.$$

Discutăm existența rădăcinilor trasînd graficul funcției

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$f'(x) = 2x + p, \quad f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\Delta.$$

Prin urmare

$\Delta > 0$: două rădăcini;

$\Delta < 0$: nici o rădăcină;

$\Delta = 0$: o rădăcină (dublă).

Pe de altă parte, știm să rezolvăm ecuația și obținem rădăcinile — cînd ele există — iar cînd ecuația nu are rădăcini, metoda nu dă nimic. Prin urmare, studiul ecuației poate fi considerat satisfăcător.

Fie acum ecuația de gradul trei

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

(Studiul ecuației $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se reduce la cel al ecuației (1) făcînd schimbarea de origine $X = x + \frac{b}{3a}$.)

Discuția existenței rădăcinilor a fost făcută cu ajutorul funcției

$$f(x) = ax^3 + px + q.$$

Amintim concluziile:

$\Delta = \frac{4p^3}{27} + q^2 < 0$: trei rădăcini;

$\Delta > 0$: o rădăcină;

$\Delta = 0$: două rădăcini, dintre care una dublă.

Pe de altă parte, să revedem rezolvarea ecuației așa cum o prezentăm în zilele noastre (Cartea a II-a, cap.2, § III), rezolvare care însă a fost obținută pentru prima dată de Tartaglia și de Cardan sub un aspect geometric, înainte de adoptarea notațiilor algebrice literale, la începutul secolului al XVI-lea.

Introducem două necunoscute scriind $x = u + v$ și rezervîndu-ne dreptul de a impune necunoscutelor o condiție convenabil aleasă

în aşa fel încît să simplifice sistemul. Deoarece ecuaţia în u şi v se scrie

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

alegem

$$3uv + p = 0.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} x = u + v & (2) \\ uv = -\frac{p}{3} & (3) \\ u^3 + v^3 = -q, & (4) \end{cases}$$

adică

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x = u + v & (2) \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} & (3') \\ u^3 + v^3 = -q & (4) \end{cases}$$

sau, sub o formă echivalentă,

$$(\mathrm{II}) \left[(5) \begin{cases} U = u^3 \\ V = v^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + v & (2) \\ UV = -\frac{p^3}{27} & (3'') \\ U + V = -q & (4'') \end{cases} \right.$$

U şi V sînt deci rădăcini ale rezolvantei

$$X^3 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \qquad (6)$$

Regăsim expresia

$$\Delta = \frac{4p^3}{27} + q^2$$

şi discuţia

$$\Delta > 0, \begin{cases} U = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ V = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \end{cases} \quad \begin{cases} u = \sqrt[3]{U} \\ v = \sqrt[3]{V} \end{cases} \quad x = u + v$$

O soluţie.

$\Delta < 0$ Nici o soluţie.

De ce acest eşec, cînd ştim din rezultatele din analiză că există trei rădăcini? Din relaţiile (2) şi (3) se vede că prin această metodă nu pot fi găsite decît rădăcini care satisfac $x^2 > -4p/3$; or, calculul lui $f(-2\sqrt{-p/3})$ şi al lui $f(+2\sqrt{-p/3})$ arată că tocmai în cazul cînd există trei rădăcini, ele sînt cuprinse între $-2\sqrt{-p/3}$ şi $+2\sqrt{-p/3}$.

În loc de a abandona metoda care a dat tot ce se putea aştepta de la ea, Bombelli, în 1572, merge mai departe şi depăşeşte dificultatea. El admite că calculul poate fi făcut chiar şi atunci cînd Δ este negativ.

Deoarece ceea ce ne interesează este $x = u + v$, să introducem

$$\begin{cases} u = \alpha + \beta \\ v = \alpha - \beta \end{cases} \text{ de unde } \begin{cases} U = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2) + (3\alpha^2\beta + \beta^3) \\ V = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2) - (3\alpha^2\beta + \beta^3). \end{cases}$$

Ştim că

$$\begin{cases} U + V = -q = 2(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2) \\ U - V = \sqrt{\Delta} = 2(3\alpha^2 + \beta^2)\beta \end{cases}$$

Dacă Δ este negativ, să introducem

$$\Delta = -\delta^2, \quad \sqrt{\Delta} = \delta\sqrt{-1}$$

şi de asemenea

$$\beta = \gamma\sqrt{-1}.$$

Firește, $\sqrt{-1}$ nu există, numerele scrise sînt doar „imaginare". Dar pînă la urmă totul se aranjează, fiindcă $\sqrt{-1}$ dispare. Obţinem

$$x = 2\alpha, \quad \begin{cases} -q = 2(\alpha^3 - 3\alpha\gamma^2) \\ \delta = 2(3\alpha^2 - \gamma^2)\gamma \end{cases}, \quad \text{deci} \quad \frac{\alpha^3 - 3\alpha\gamma^2}{3\alpha^2\gamma - \gamma^2} = -\frac{q}{\delta}.$$

Recunoaştem ecuaţia care dă $\operatorname{tg}\varphi$ în funcţie de $\operatorname{tg}(\varphi/3)$, aşa că, notînd $\operatorname{tg}\varphi = -q/\delta$, vom avea

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3},$$

de unde

$$-q = 2\alpha^3\left(1 - 3\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{3}\right)$$

care dă pe α, apoi pe x. Şi avem într-adevăr trei valori pentru x, fiindcă $\operatorname{tg}(\varphi/3)$ are trei valori pentru o valoare a lui $\operatorname{tg}\varphi$.

Această metodă permite calcule aproximative la fel de bine ca o formulă care conţine radicali, dar am părăsit algebra pentru a trece în trigonometrie. Pe această cale, aşa cum am văzut, putem obţine o metodă mai practică căutînd rădăcinile sub forma $x = \rho \cos\theta$ şi folosind formula care dă $\cos 3\theta$ în funcţie de $\cos\theta$. Dar nu în aceasta constă problema: ceea ce este important este succesul unei metode care introduce pe parcursul calculului simbolul imaginar în aşa fel încît el să dispară în cele din urmă.

Dacă am acceptat în felul acesta rădăcinile „imaginare" ale unei ecuaţii de gradul doi, sîntem obligaţi să atribuim 3 rădăcini ecuaţiei $z^3 - 1 = 0$, fiindcă $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$: aceste rădăcini sînt $+1$ şi

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2};$$

să numim j' şi j'' aceste două rădăcini imaginare.

Prin urmare, $z^3 = a$ va avea trei rădăcini, $z_0, j'z_0, j''z_0$.

Dar atunci ecuaţiile (5) dau trei valori pentru u şi trei valori pentru v. Aceasta înseamnă, aşadar, 9 valori pentru x? Nu, fiindcă (3) şi (3′) nu mai sînt echivalente şi valorile u şi v trebuie alese în aşa fel încît să avem totdeauna

$$uv = -p/3$$

şi niciodată $uv = -pj'/3$ sau $uv = -pj''/3$.

Pe scurt, totul pare complet coerent şi se pune problema de a sistematiza şi de a codifica folosirea acestui simbol $\sqrt{-1}$, care se notează cu litera i. Deoarece încă Cardan şi elevul său Ferrari ştiau să reducă rezolvarea unei ecuaţii de gradul 4 la rezolvarea celei de gradul 3, înţelegem că adăugarea acestui singur simbol i, care pare special introdus pentru ecuaţia de gradul 2, asigură existenţa a trei rădăcini pentru ecuaţia de gradul trei şi a patru rădăcini pentru ecuaţia de gradul 4. Din acest moment a apărut ca fiind posibil, sau probabil, ca introducerea acestui singur simbol i să asigure existenţa a n rădăcini — reale sau imaginare, simple sau multiple — pentru orice ecuaţie de gradul n. Acest rezultat, demonstrat mai apoi de CAUCHY cu ajutorul analizei, era considerat cert de către d'ALEMBERT (1717—1783), matematicianul care a scris celebra frază: „Mergeţi cu îndrăzneală înainte şi credinţa va veni să vă dea încredere." În Franţa, această teo-

remă — teorema fundamentală a algebrei — este deseori numită „teorema lui d'Alembert".

Pe la anul 1800, a fost satisfăcută şi acea dorinţă de a avea o reprezentare concretă, care părea liniştitoare: WESSEL, apoi ARGAND, au interpretat numerele imaginare ca reprezentînd transformări geometrice în plan.

Astăzi matematicianul a devenit mai conştient de libertatea lui de creaţie. Fără a neglija modelele geometrice, ne propunem acum să creem, în mod abstract, mulţimea numerelor complexe prin extensia mulţimii numerelor reale.

II. Corpul numerelor complexe

1. Adăugăm mulţimii R a numerelor reale (pe care le notăm cu litere cum sînt a, a', b, x, y) un element notat i, mulţimea nou constituită fiind dotată cu structura pe care o introduc operaţiile următoare:

O înmulţire a lui i cu un număr real, operaţie notată bi sau ib.

O adunare $a + bi$ (sau $a + ib$).

Relaţia de echivalenţă

$$a + bi = a' + b'i \text{ înseamnă } \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Elementul $a + bi$ se numeşte un *număr complex*.

Dacă $b = 1$, $a + 1i$ se scrie $a + i$.

2. În mulţimea numerelor complexe definim

a) O ADUNARE

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

Există deci comutativitate. Există un element neutru $0 + 0i$.

b) O ÎNMULŢIRE CU UN NUMĂR REAL

$$m(a + bi) = ma + mbi.$$

Aceste două operaţii înzestrează mulţimea numerelor complexe cu o structură de spaţiu vectorial: putem deci asocia acestei mulţimi modele geometrice:

a) MODELUL VECTORIAL. Vom nota $(\mathbf{u}, \mathbf{i})$ o bază a spaţiului vectorial şi asociem numărului complex $a + bi$ vectorul $a\mathbf{u} + b\mathbf{i}$. Cele două mulţimi sînt izomorfe.

b) MODELUL PUNCTUAL. Fiind ales un reper: punctul O şi baza $(\mathbf{u},\mathbf{i})$, asociem numărului complex $a + bi$ punctul A — numit *afixul* numărului complex — definit prin

$$\mathbf{OA} = a\mathbf{u} + b\mathbf{i}.$$

3. Introducem **o înmulţire**: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$.

Mai general, impunem comutativitatea şi distributivitatea în raport cu adunarea prin formula de definiţie

$$(a + bi)(a' + b'\mathbf{i}) = (aa' - bb') + (ab' + ba')\mathbf{i}.$$

Elementul neutru este $1 + 0\mathbf{i}$.

În modelul vectorial, operaţia este deci definită de tabla înmulţirii vectorilor bazei, conform tabelului

	u	**i**
u	**u**	**i**
i	**i**	$-\mathbf{u}$

de unde rezultă, prin înmulţirea cu un număr real, distributivitatea şi comutativitatea:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{i})(a'\mathbf{u} + b'\mathbf{i}) = (aa' - bb')\mathbf{u} + (ab' + ba')\mathbf{i}.$$

O interpretare geometrică remarcabilă se obţine *dacă baza este ortonormală* — ceea ce se presupune totdeauna cînd se reprezintă numerele complexe. Într-adevăr, expresiile scrise ne sugerează să asociem perechii a, b, perechea formată din numărul $r \geqslant 0$ şi unghiul θ definit pînă la un 2π prin

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta,$$

aşadar

$$z = a + bi = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta);$$

r nu este nul decît pentru $0 + 0\mathbf{i}$.

În modelul punctual,

$$OM = r \quad \text{şi} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{OM}) = \theta, \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

Scriem $r = |z|$. El este *modulul* numărului complex z. Unghiul θ, (mod 2π) este *argumentul* lui z și se notează arg z.

Formula înmulțirii dă atunci:

$$\begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \end{cases}, \quad zz' = rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

Modulul produsului este produsul modulelor; argumentul produsului este suma argumentelor.

Așadar, structurii multiplicative a numerelor complexe îi corespunde o structură aditivă în mulțimea argumentelor; aceasta justifică o notație exponențială. Un studiu mai complet conduce la introducerea notațiilor

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \text{ prin urmare } z = re^{i\theta}.$$

Cu această notație, $e^{i0} = e^0 = 1$, $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

De remarcat egalitatea curioasă $e^{i\pi} = -1$ care leagă între ele două numere transcendente e și π.

În interpretarea vectorială, înmulțirea cu

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

transformă un vector printr-o rotație de unghi θ și o omotetie de raport r. În felul acesta, afixul A al numărului complex dat suferă o transformare prin similitudine de centru O, de unghi θ și de raport r.

În particular $0 + i = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2$. Prin urmare, *înmulțirea cu* $0 + i$ *transformă un vector în imaginea lui prin rotația de unghi* $\pi/2$.

Pentru a interpreta comutativitatea produsului, să considerăm simultan afixul A al numărului $a + ib$ dat și afixul M al înmulțitorului $x + iy$. Fie U afixul lui $1 + 0i$ și P afixul produsului: triunghiurile UOA și MOP sînt asemenea, și tot asemenea sînt și triunghiurile UOM și AOP.

Expresia $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ se numește *forma trigonometrică a numărului complex*. Ea se dovedește totdeauna utilă cînd este vorba de produse. În particular, ea arată că orice număr complex diferit de elementul neutru al adunării $0 + i0$ admite un invers $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Într-adevăr,

$$zz' = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$$

este echivalentă cu

$$rr' = 1,\ \theta + \theta' = 0 \pmod{2\pi},$$

care admite o soluţie

$$r' = 1/r,\ \theta' = -\theta \pmod{2\pi}$$

cu excepţia cazului $r = 0$.

Aceasta înseamnă că *mulţimea numerelor complexe este un corp.*

CALCULUL CÎTULUI SUB FORMA CARTEZIANĂ. Să rezolvăm în raport cu a' şi b' condiţia

$$(a + ib)(a' + ib') = 1 + 0i,$$

adică

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + ba' = 0. \end{cases}$$

Obţinem

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{-b} = \frac{1}{a^2 + b^2},$$

prin urmare

$$a' + b'i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Scriem deci

$$\frac{1 + 0i}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Să comparăm această formulă cu formula iraţionalelor care introduce o rădăcină pătrată:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{c}} = \frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2c}.$$

şi regăsim realmente că i joacă rolul lui $\sqrt{-1}$. Dar *interzicem în mod categoric folosirea semnului radical* (rădăcină pătrată) *aplicat vreunui alt număr care nu este un număr real pozitiv.* Un radical de un indice oarecare (2 sau 3 sau n) nu va fi niciodată aplicat unui număr negativ, şi cu atît mai puţin, unui număr complex; el reprezintă totdeauna un număr pozitiv sau nul.

În fine, constatăm că pentru toate operațiile introduse, există izomorfism între numerele reale și submulțimea formată din numerele complexe $a + 0i$, adică din numerele complexe care au ca argument $0 \pmod{2\pi}$ sau $\pi \pmod{2\pi}$, primele corespunzînd numerelor reale pozitive, celelalte numerelor reale negative. Convenim de aceea să confundăm formele de scriere: $x + 0i$ va fi scris, de acum înainte, sub forma x. Vom conveni, de asemenea, să scriem yi în loc de $0 + yi$; acestea sînt numere complexe de argument $\pi/2 \pmod{2\pi}$ sau $-\pi/2 \pmod{2\pi}$, după cum y este pozitiv sau negativ; ele se numesc numere *pur imaginare*. În cazul unui număr complex oarecare $a + ib$, a se numește partea reală, iar ib *partea imaginară*.

Numerele complexe $a + bi$ și $a - bi$ se numesc *numere complexe conjugate* (așa cum $a + b\sqrt{c}$ și $a - b\sqrt{c}$ sînt numere iraționale conjugate). Suma și produsul a două numere complexe conjugate sînt numere reale (cu abuzul de limbaj pe care tocmai l-am admis):

$$(a + ib) + (a - ib) = 2a + 0i = 2a,$$

$$(a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2.$$

Dacă notăm $z = a + ib$, conjugatul lui se notează $\bar{z} = a - ib$.

Afixele a două numere conjugate sînt simetrice în raport cu axa O, **u**, numită *axa reală*, care este luată ca axă a absciselor $x'x$; afixele sumei și al produsului lor sînt situate pe această axă. *Axa numerelor pur imaginare* este axa $y'y$ în modelul punctual. Planul astfel reperat se numește *plan complex*.

4. Puterea a n — a și rădăcina a n — a în corpul numerelor complexe.

a) PUTERI. Fie n un întreg pozitiv. Puterea a n — a a unui număr complex se calculează ușor sub forma trigonometrică:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta), \quad z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

(*Formula lui Moivre.*)

În cazul $r = 1$, afixele M_n ale puterilor succesive sînt situate pe cercul de centru 0 și de rază 1. Ele sînt, în acest caz, vîrfurile unei linii frînte regulate de unghi la centru θ. Acest șir de puncte conține

un număr finit de elemente numai dacă există un întreg p și un întreg n astfel încît

$$n\theta = 2p\pi, \text{ adică } \theta = \frac{2p}{n}\pi$$

care exprimă că raportul unghiurilor măsurate de θ și de π este un număr rațional. Spunem că θ și π sînt *comensurabile între ele*. În acest caz, șirul punctelor este periodic și formează vîrfurile unui poligon regulat, iar *numărul puterilor distincte ale lui z este limitat*, egal cu n (firește, dacă fracția p/n este ireductibilă).

Dacă modulul r nu este egal cu 1, șirul puterilor este totdeauna infinit, fiindcă șirul puterilor modulului este infinit, crescător sau descrescător după cum r este mai mare sau mai mic decît 1.

b) RĂDĂCINA a n—a. Invers, rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

sînt date de expresia

$$u = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Toate valorile lui u se obțin dînd întregului k valori astfel încît noile argumente să fie distincte (mod 2π). Prin urmare, pentru k pot fi alese n valori. În general, pentru k se iau valorile

$$0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

sau — un alt procedeu — , în funcție de paritatea lui n, pentru

$n = 2m$: $-(m-1), -(m-2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (m-1), m$

pentru

$n = 2m+1$: $-m, -(m-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (m-1), m$.

Există deci totdeauna n rădăcini de ordinul n distincte.

c) ECUAȚIA BINOMĂ. Cele de mai sus dau soluția ecuației numite *ecuația binomă*

$$z^n = c.$$

1) *Dacă c este real, pozitiv*, una din rădăcini este totdeauna reală; ea se notează $\sqrt[n]{c}$, deoarece argumentul lui c este nul (mod 2π). Celelalte rădăcini sînt de forma

$$\sqrt[n]{c}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right);\quad k=1,2,\ldots,(n-1).$$

Dacă n este par, există şi o a doua rădăcină reală: cea care corespunde lui $k=n/2$; valoarea ei este $-\sqrt[n]{c}$.

2) *Dacă c este real, negativ*, argumentul lui este π (mod 2π). Printre rădăcinile

$$\sqrt[n]{-c}\left(\cos\frac{(1+2k)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{(1+2k)\pi}{n}\right),$$

una este reală, dacă n este impar: $n=2m+1$, şi anume cea care corespunde lui $k=m$, (mod n). Această rădăcină este $-\sqrt[n]{-c}$.

Dacă n este par, nici o rădăcină nu este reală.

3) *Dacă c este complex*, nu poate exista o rădăcină de ordinul n reală, fapt care este cu totul evident, fiindcă orice putere întreagă a unui număr real este reală.

CAZURI PARTICULARE FUNDAMENTALE:

$$z^2=1\Longrightarrow z'=+1 \text{ şi } z''=-1$$

$$z^2=-1\Longrightarrow z'=+\mathrm{i} \text{ şi } z''=-\mathrm{i}$$

$$z^2=\mathrm{i}\Longrightarrow z'=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \text{ şi } z''=-z'$$

$$z^3=-1\Longrightarrow z'=1,\ z''=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \text{ şi}$$

$$z'''=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$$

Deoarece $z''z'''=1$, rezultă imediat că dacă numim j una din aceste rădăcini cubice imaginare ale lui 1, cealaltă este j^2.

$$z^3=-1\Longrightarrow z'=-1,\quad z''=-j,\quad z'''=-j^2.$$

III. Funcţii numerice de o variabilă complexă

Este vorba de o aplicaţie $z \searrow\!\!\nearrow Z$ a mulţimii numerelor complexe pe ea însăşi. Dacă considerăm afixele numerelor z şi ale imaginilor lor Z în acelaşi plan complex, *o funcţie numerică de o variabilă complexă are ca model o corespondenţă punctuală în plan.*

EXEMPLE:

$Z = z + a$: translaţie

$Z = az$: similitudine de centru O; omotetie dacă a este real, rotaţie dacă modulul lui a este 1.

$Z = \frac{1}{z}$: produsul unei inversiuni (pol O, putere 1) şi al unei simetrii în raport cu $x'x$.

$Z = \frac{az + b}{a'z + b'}$. Ca în cazul numerelor reale, scriem

$Z = \frac{a}{a'} + \frac{h}{z + b'/a'}$: produsul transformărilor precedente.

De notat că toate aceste transformări păstrează unghiurile (ca valoare şi semn). Vom înţelege imediat de ce.

A) Topologie în planul complex

Un număr complex z este într-o vecinătate de ordin α a lui z_0 (unde α este un număr real pozitiv) dacă avem

$$|z - z_0| < \alpha,$$

adică dacă

$$M_0M < \alpha,$$

unde M_0 şi M sînt afixele lui z şi z_0.

Deoarece modulul $|z - z_0|$ este reprezentat în geometrie metrică de o distanţă, el verifică inegalitatea triunghiului

$$|z_1 - z_0| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0|.$$

În acord cu aceasta, vom spune că o funcţie $Z = f(z)$ admite o limită L cînd z tinde către z_0, dacă $|Z - L|$ tinde către 0 cînd $|z - z_0)|$ tinde către 0. Iar derivata unei funcţii $Z = f(z)$ în z_0 este limita — dacă aceasta există — a raportului $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

cînd $|z - z_0|$ tinde către 0. Dar ce interpretare se poate da acestor definiţii care se impun în mod firesc?

Pentru a simplifica expunerea şi a preciza ideile, să luăm un exemplu: fie funcţia

$$Z = z^2$$

în vecinătatea lui

$$z_0 = 2 + \mathrm{i}, \quad Z_0 = (2 + \mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i}.$$

Să numim m_0, M_0, m, M, afixele numerelor z_0, Z_0, $z = x + \mathrm{i}y$ şi

$$Z = X + \mathrm{i}Y = (x + \mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i}.$$

Formăm diferenţa

$$Z - Z_0 = z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$$

de unde rezultă

$$\frac{Z - Z_0}{z - z_0} = z + z_0.$$

Să remarcăm că $|z - z_0| \longrightarrow 0$, adică $m_0m \longrightarrow 0$, implică

$$|z| \longrightarrow |z_0| \quad \text{şi} \quad \arg z \longrightarrow \arg z_0, \pmod{2\pi}.$$

Sub o formă mai generală

$$\lim |z| = |\lim z| \quad \text{şi} \quad \lim(\arg z) = \arg(\lim z), \pmod{2\pi}.$$

Rezultă imediat că, atunci cînd z tinde către z_0, $Z - Z_0$ tinde către 0 (continuitatea funcţiei) şi că $\frac{Z - Z_0}{z - z_0}$ are o limită care este $2z_0$. Prin urmare, funcţia admite în punctul z_0 o derivată $Z_0' = 2z_0$.

INTERPRETARE. Fie o curbă γ, loc geometric al lui m, care trece prin m_0. Imaginea ei prin aplicaţia $z \searrow\!\!\nearrow Z$, adică $m \searrow\!\!\nearrow M$ este o curbă Γ care trece prin M_0. Să presupunem că γ admite în m_0 o tangentă t.

Notînd în continuare cu $\mathbf{u}$ vectorul unitar care orientează pe $x'x$, avem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{m_0m}) = \arg(z - z_0) \quad \text{şi} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{M_0M}) = \arg(Z - Z_0),$$

prin urmare,

$$(\mathbf{m_0m},\ \mathbf{M_0M}) = \arg(Z - Z_0) - \arg(z - z_0) = \arg\left(\frac{Z - Z_0}{z - z_0}\right).$$

Ipoteza existenței tangentei t implică că suportul lui M_0M are o poziție limită T, tangenta la Γ în M_0, astfel încît $(t,\ T) = \arg Z'_0$, (mod π), (sau mod 2π, dacă orientăm tangentele în sensuri omoloage).

În exemplul considerat, $(t,T) = \arg\ (2z_0) = \arg\ z_0$ care, în punctul ales este

$$\text{arc tg}\ (1/2) = \varphi_0.$$

Prin urmare, oricare ar fi curba γ dată, curbele γ și Γ au în m_0 și M_0 tangente care fac între ele un același unghi $(t,\ T) = \varphi_0$. Rezultă de aici imediat că dacă considerăm două curbe γ_1 și γ_2 care se taie în m_0 sub un unghi dat, imaginile lor Γ_1 și Γ_2 se vor tăia sub același unghi orientat (mod π, sau chiar mod 2π, dacă considerăm sensuri de parcurgere omoloage). Aceasta înseamnă că *transformarea* $m \searrow\!\!\nearrow M$, *imagine a lui* $z \searrow\!\!\nearrow Z$, *conservă unghiurile.*

De exemplu, în cazul funcției alese, să transformăm prin $Z = z^2 = (x + iy)^2$ următoarele două drepte perpendiculare

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \text{ arbitrar} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x \text{ arbitrar} \\ y = 1 \end{cases}$$

Obținem

$$\Gamma_1 \begin{cases} X = 4 - y^2 \\ Y = 4y \end{cases} : \text{ Parabola } X = 4 - \frac{Y^2}{16},$$

și

$$\Gamma_2 \begin{cases} X = x^2 - 1 \\ Y = 2x \end{cases} : \text{ Parabola } X = \frac{Y^2}{4} - 1.$$

Coeficienții unghiulari luați în raport cu axa Y sînt dați de derivatele X'_y. În punctul despre care este vorba găsim

$$-\ Y/8 = -\ 1/2 \quad \text{și} \quad +\ Y/2 = +\ 2.$$

Tangentele sînt într-adevăr, rectangulare; parabolele se taie sub unghi drept, ca și dreptele date.

În felul acesta, *conservarea unghiurilor este legată de existența derivatei funcției.*

B) Variația argumentului de-a lungul unei curbe închise. Teorema fundamentală a algebrei (Teorema lui d'Alembert).

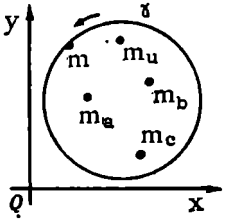
1) În cele ce urmează, considerăm curbe γ închise, fără punct dublu, obținute prin deformarea unui cerc sau a unui oval și parcurse o dată, în sens direct, de afixul m al lui z. În aceste condiții, imaginea M descrie o curbă *închisă* fiindcă, în aplicația $z \searrow\!\!\nearrow Z$ care definește funcția f, un număr z are o imagine determinată Z. Deoarece un același număr Z poate fi imaginea a mai multor numere z, curba închisă Γ poate avea puncte multiple; se poate întîmpla chiar ca toate punctele ei să fie multiple! De exemplu, să considerăm din nou funcția $Z = z^2$. Dacă γ este cercul de centru 0 și de rază 2, parcurs — așa cum am spus — o singură dată în sens direct, Γ va fi cercul de centru 0 și de rază 4 parcurs de două ori în sens direct, fiindcă

$$\arg Z = 2 \arg z;$$

dacă, de exemplu, $\arg z$ crește de la 0 la 2π, $\arg Z$ crește de la 0 la 4π.

2) Mai general, fie polinomul

$$Z = a_0(z - a)^p(z - b)^q \ldots (z - u)^t$$

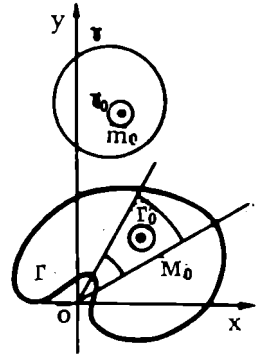


de grad $p + q + \ldots + t = n$, ale cărui rădăcini sînt, toate, evidente. Să luăm drept curbă γ *o curbă închisă* (de exemplu un cerc) *care înconjură afixele tuturor rădăcinilor* $a, b, \ldots, u$. Pe baza egalității

$$\arg Z = \arg a_0 + p \arg(z - a) + q \arg(z - b) + \ldots + t \arg(z - u),$$

deoarece fiecare din vectorii $\mathbf{M_aM}$, $\mathbf{M_bM}$, ..., $\mathbf{M_uM}$ se rotește cu 2π în sens direct, cînd punctul M va reveni la punctul lui de plecare, argumentul lui Z va fi crescut cu $(p + q + \ldots + t) \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi$, dacă îl urmărim prin continuitate.

3) $Z = f(z)$ fiind un polinom oarecare, fie acum — din contra — o valoare z_0 *care nu este un zero al polinomului* și γ_0 o curbă foarte vecină cu m_0. Punctul M_0 nu este în 0 și punctul M descrie o curbă Γ_0 foarte vecină cu M_0. Continuitatea funcției f ne permite să afirmăm că putem găsi o vecinătate a lui m_0, $v(m_0)$, suficient de mică pentru ca $\gamma \subset v(m_0)$ să implice, de exemplu



$$\frac{1}{2}|Z_0| < |Z| < 2|Z_0|$$

și

$$|\arg Z - \arg Z_0| < \alpha < \pi.$$

Atunci, cînd m descrie γ, M descrie Γ în așa fel încît, după revenirea la punctul de plecare, se regăsește argumentul inițial — dacă-l urmărim prin continuitate: variația argumentului este nulă.

Acum, pornind de la γ_0, să deformăm curba γ; curba Γ se deformează și ea. Variația argumentului lui Z care este la început nulă pentru Γ_0, nu va putea deveni nenulă, — de exemplu, egală cu 2π sau cu -2π — decît dacă Γ trece prin origine, adică dacă γ întîlnește un punct afix al unui zero al funcției f.

Prin urmare: *Variația argumentului lui Z nu poate fi nenulă după revenirea la punctul inițial decît dacă funcția f(z) are cel puțin un zero.*

(Trebuie să recunoaștem însă că raționamentul ar avea nevoie să fie precizat: noi facem aici apel la continuitatea familiei de curbe γ și a familei de curbe-imagine Γ, noțiune care a rămas pentru noi intuitivă.)

4) Acceptînd acest rezultat, este acum foarte simplu de demonstrat teorema fundamentală: *orice polinom are cel puțin un zero-*

Este suficient să verificăm că putem lua o curbă astfel încît Z să sufere o variaţie a argumentului. Într-adevăr,

$$Z = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

se scrie

$$Z = z^n \left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right] = z^n Q(z),$$

prin urmare

$$\arg Z = n \arg z + \arg Q(z).$$

Dacă γ este un cerc, de exemplu cercul de centru 0 şi de rază R suficient de mare, $Q(z)$ rămîne — în modul şi argument — oricît de vecin vrem de a_0; prin urmare, detaliind ca la punctul 3), vedem că argumentul lui $Q(z)$ nu suferă nici o variaţie. Prin urmare, argumentul lui Z creşte cu $n \cdot 2\pi$, ceea ce demonstrează *existenţa a cel puţin unui zero*.

5) Este inutil să precizăm mai mult, pe cale directă, acest rezultat, arătînd că există exact n rădăcini, ceea ce ar însemna reciproca rezultatului demonstrat la puncul 2). Într-adevăr, *întreaga teorie algebrică a polinoamelor elaborată presupunînd coeficienţii reali rămîne valabilă cînd coeficienţii aparţin corpului numerelor complexe*.

În particular, dacă un polinom admite un zero a_1, el este divizibil cu $(z - a_1)$. Fie deci a_1 un zero al polinomului, zero a cărui existenţă este afirmată de punctul 4); există atunci un cît de gradul $(n - 1)$, fie el P_1, astfel încît

$$f(z) = (z - a_1) P_1(z).$$

Dar $P_1(z)$, fiind un polinom, admite un zero a_2(care, bineînţeles, poate fi şi egal cu a_1), de unde — existenţa unui polinom P_2 de grad $n - 2$ astfel încît

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) P_2(z) \text{ etc.}$$

În cele din urmă, obţinem drept cît o constantă; prin urmare $f(z)$ admite n rădăcini şi polinomul se reprezintă sub forma

$$f(z) = a_0 (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n).$$

Aceasta este **teorema fundamentală a algebrei**: *Orice polinom de grad n admite n rădăcini, distincte sau socotite cu gradul lor de multiplicitate, reale sau complexe*.

Trebuie notat că raţionamentele 3) sînt valabile nu numai pentru polinoame, ci şi pentru multe alte funcţii: tot ce se cere este să fie satisfăcute condiţiile de continuitate necesare.

Evident, această teoremă de existență nu furnizează nici o formulă pentru a exprima efectiv rădăcinile cu ajutorul coeficienților polinomului.

IV. Scurtă trecere în revistă a aplicațiilor numerelor complexe

Pe lîngă interesul lor teoretic și introducerea lor în analiză, numerele complexe constituie un instrument indispensabil în algebră chiar și atunci cînd dorim să obținem rezultate reale, precum și în geometrie — pentru a unifica teorii în aparență distincte; în afară de aceasta, introducerea lor este comodă în calitate de intermediare pentru rezolvarea anumitor probleme de geometrie.

1) **În algebra polinoamelor cu coeficienți reali,** teorema esențială este următoarea: *Dacă un polinom cu coeficienți reali admite un zero complex, el admite ca zero și conjugatul acelui număr.*

Într-adevăr, dacă

$$P(z) = P(x + iy) = X(x,\ y) + iY(x,y)$$

are coeficienții reali, atunci

$$P(x - iy) = X(x,\ y) - iY(x,\ y),$$

prin urmare

$$P(z_0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X(x_0,\ y_0) = 0 \\ Y(x_0,\ y_0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow P(\bar{z}_0) = 0,$$

dacă notăm cu $\bar{z}_0$ numărul complex conjugat cu z_0. Polinomul este atunci divizibil cu

$$(z - z_0)\,(z - \bar{z}_0) = (z - x_0)^2 + y_0^2.$$

Prin urmare, *orice polinom $P(x)$ cu coeficienți reali este factorizabil (decompozabil) într-un produs: o constantă înmulțită cu factori $(x - a)^\alpha$ corespunzători zerourilor reale și cu factori $(x^2 + px + q)^\mu$ corespunzători zerourilor complex conjugate.*

EXEMPLU:

$$z^4 + 1 = 0 \text{ are rădăcinile } \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i),$$

prin urmare

$$x^4 + 1 \equiv (x^2 + x\sqrt{2} + 1)\,(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Numerele complexe n-au servit aici decît drept intermediari pentru a obține niște rezultate reale.

2) **În trigonometrie,** formula lui Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

dă, după dezvoltare și separarea părților reală și imaginară:

$$n = 2 \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{cases}$$

$$n = 4 \begin{cases} \cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\ \sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta \end{cases}$$

Și așa mai departe. În formulele pentru multiplicarea arcelor apar coeficienții C_n^p ai binomului.

3) **În geometria metrică plană,** un vector este reprezentabil printr-un număr complex. Se poate întîmpla ca operațiile care trebuie efectuate asupra acestui vector să aibă o interpretare în cadrul calculului cu numere complexe. Tot astfel, în electricitate, după ce am reprezentat o funcție sinusoidală printr-un vector (reprezentarea Fresnel), metoda introducerii numerelor complexe permite să se trateze problemele de curenți alternativi prin formule analoage celor pentru curenții continui.

Am văzut deja că funcția $Z = \dfrac{az + b}{a'z + b'}$ exprimă transformări simple care păstrează unghiurile. Trebuie notat că simetria în raport cu axa luată ca axă reală corespunde aplicației

$$z = x + iy \leftrightarrow z = x - iy.$$

Această trecere la numărul complex conjugat schimbă sensul unghiurilor; ea nu se înscrie deci printre funcțiile cărora li se aplică rezultatele de la (III, 3).

EXEMPLU DE APLICAȚIE GEOMETRICĂ. O condiție necesară și suficientă ca 4 puncte A, B, C, D să fie pe un cerc este

$$(AC, AD) = (BC, BD), \pmod{\pi} \qquad (1)$$

Teorema lui Chasles nu putea face să intervină celelalte două laturi AB şi CD ale dreptunghiului; din ea nu puteam deduce direct

$$(AB, AC) = (DB, DC), \quad (\text{mod } \pi) \tag{2}$$

în ciuda echivalenţei acestor două condiţii.

O interpretare cu ajutorul numerelor complexe ne dă uşor acest rezultat. Să numim a, b, c, d numerele ale căror afixe sînt punctele date. Inscriptibilitatea se scrie

$$\arg \frac{d-a}{c-a} = \arg \frac{d-b}{c-b}, \quad (\text{mod } \pi) \tag{1}$$

sau, introducînd un biraport (Cartea a IV-a, Partea I, cap.2):

$$\arg \left[\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} \right] = 0, \quad (\text{mod } \pi) \tag{1'}$$

ceea ce este echivalent cu a spune că

$$\lambda = \frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} \quad \text{este real.} \tag{I}$$

Vom schimba ordinea în care sînt luate cele 4 numere care formează biraportul cu ajutorul identităţii

$$(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b) = (c-a)(d-b) \tag{$\mathcal{I}$}$$

Deducem atunci că

$$\frac{b-a}{c-a} : \frac{d-b}{d-c} = 1 - \lambda \text{ este real,}$$

ceea ce demonstrează (2).

Să notăm cazul interesant în care unul din aceste birapoarte are valoarea -1, celelalte avînd valorile 2 sau $1/2$; patrulaterul corespunzător se numeşte atunci *armonic*; el merită să fie studiat ca exerciţiu.

Pentru a deduce din egalităţile precedente o relaţie în modul, să precizăm că patrulaterul numit $ABCD$ este convex. Atunci egalităţile, aşa cum au fost ele scrise, sînt exacte mod 2π. Or, egalitatea

$$\arg (d-a)(c-b) = \arg (c-a)(d-b), \quad (\text{mod } 2\pi)$$

exprimă că vectorii reprezentaţi prin numerele complexe

$$(d - a)(c - b) \quad \text{şi} \quad (c - a)(d - b)$$

sînt paraleli de acelaşi sens, şi la fel pentru $(b - a)(d - c)$. Identitatea (J) dă, deci, în module

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DB \quad (\textit{formula lui Ptolemeu})$$

Pe baza inegalităţii triunghiului, dacă patrulaterul convex nu este inscriptibil, avem

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot DB.$$

4) **În geometria analitică,** cu două sau cu trei dimensiuni, sîntem conduşi să acceptăm pentru coordonate valori complexe. Punctele corespunzătoare sînt atunci *puncte imaginare*: de exemplu, în plan, un cerc şi o dreaptă de ecuaţii

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{şi} \quad y = mx + p$$

se vor tăia — dacă nu sînt tangente — în două puncte care vor fi reale sau imaginare după cum ecuaţia pentru abscisele intersecţiilor

$$(1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2 - R^2 = 0$$

are rădăcini reale sau complexe.

Sîntem conduşi, de asemenea, să introducem *curbe imaginare*, în particular, cercuri cu centru real dar cu raza pur imaginară: atunci, de exemplu, orice fascicul de cercuri are două puncte de bază *şi* două puncte limită.

Păstrăm definiţia distanţei între două puncte: În plan, $OM^2 = x^2 + y^2$, însă două puncte distincte pot fi la o distanţă nulă, de exemplu punctul de coordonate $x = a$, $y = ia$ este la o distanţă nulă faţă de origine fiindcă $x^2 + y^2 = 0$.

Asemenea rezultate cu aspect oarecum paradoxal arată că trebuie oarecare precauţie în utilizarea acestei metode datorate în principal lui Poncelet. Însă teoria curbelor algebrice nu se poate lipsi de ea.

CARTEA A PATRA

GEOMETRIILE

O geometrie studiază o mulțime de elemente numite puncte și anumite submulțimi ale acesteia: drepte, plane, în general — figuri. Între diversele elemente se introduc operații; ele permit să se definească aplicații ale unei submulțimi pe o alta (de exemplu, transformări punctuale). Aceasta înseamnă că geometria apare ca fiind un *model al unei algebre* căreia trebuie să i se adauge *o topologie* care introduce noțiunea de continuitate. Așadar, dacă considerăm știința despre spațiu drept o știință algebrizată, n-o facem numai pentru că geometria poate fi redusă la calcul numeric (la geometrie analitică).

Totuși, după ce au fost adunate la un loc proprietățile anumitor figuri fundamentale și cele ale anumitor aplicații ale spațiului pe el însuși, devine posibil să se facă raționamente sintetice sprijinite pe intuiția spațiului *fizic*, și să se revină la atitudinea mintală proprie geometriei tradiționale a lui Euclid. De altfel, exact aceleași raționamente, dar folosite plecînd de la alte fundamente axiomatice, conduc la construirea unor geometrii distincte; în cele ce urmează, noi le vom introduce numai pe cele care sînt foarte apropiate de geometria euclidiană.

Raționamentele de tipul numit „geometric" pot fi caracterizate în modul următor: obiectul unui studiu geometric este o situație prea cuprinzătoare pentru a putea să i se expliciteze toate proprietățile care constituie ipotezele. În fiecare moment, trebuie alese acele proprietăți care oferă combinații despre care se știe deja din

experiență că conduc la concluzii cunoscute și utile. În locul simbolismului unui sistem de ecuații care trebuie transformate, se folosesc scheme mai mult sau mai puțin complexe în care fiecare inferență presupune numeroase operații algebrice făcute o dată pentru totdeauna, în cadrul teoriei. Fiecare din aceste inferențe se numește *o teoremă*; ea este, într-un anumit fel, un bloc de piatră cioplit dinainte, gata să servească la construirea unui edificiu. Dar ceea ce interesează realmente sînt asamblajele acestor blocuri: geometria folosește teoreme pentru a studia *probleme geometrice*. Din acestea se extrag teoreme mai complexe decît primele, care conduc la noi probleme; în felul acesta geometria se îmbogățește la infinit și se desfășoară într-o știință autonomă a cărei frumusețe este bine cunoscută.

REMARCĂ. Figurile desenate efectiv nu sînt indispensabile decît pentru anumite cazuri particulare care trebuie observate cu ochii. Noi însă, cel mai adesea, nu vom studia decît submulțimi foarte generale înzestrate cu structuri simple, ceea ce explică absența desenelor. Foarte adesea însă cititorul va fi totuși interesat să schițeze unele figuri, pentru a urmări mai ușor notațiile.

PARTEA I

GEOMETRIE AFINĂ ŞI GEOMETRIE PROIECTIVĂ

CAPITOLUL 1

GEOMETRIE AFINĂ

Am introdus, în cap. 3 al Cărţii I, pe de o parte — spaţiul vectorial cu un număr oarecare de dimensiuni, pe de altă parte — imaginea lui punctuală (pe care o numim acum „spaţiu") care este determinată cînd se dă punctul origine O şi baza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ a spaţiului vectorial. În geometria plană, *reperul* va fi notat de exemplu O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. În geometria în spaţiu (subînţeles cu trei dimensiuni), reperul va fi O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

În geometria afină nu introducem pe spaţiul vectorial decît cele două operaţii care îi caracterizează structura: adunarea şi înmulţirea cu un număr pe care îl presupunem totdeauna real (geometrie afină reală).

§ 1. FIGURILE FUNDAMENTALE

I. Geometrie plană (două dimensiuni)

Reperul O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ este presupus dat. Am văzut că un vector $\mathbf{U}$ al spaţiului vectorial este dat în mod unic de

$$\mathbf{U} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

iar un punct M este dat de

$$\mathbf{OM} = \mathbf{U}.$$

A) **Spațiul vectorial** este orientat: perechea $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ definită prin

$$\mathbf{U} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{V} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v}$$

este o bază dacă $\delta = xy' - yx'$ este nenul, iar semnul lui δ arată dacă baza $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ are sensul pozitiv (aceeași orientare ca baza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$) sau sensul negativ.

$\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ și $\{\mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ sînt de sensuri contrare,

$\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ și $\{-\mathbf{U}, -\mathbf{V}\}$ sînt de același sens,

$\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ și $\{-\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$, la fel ca și $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ și $\{\mathbf{U}, -\mathbf{V}\}$, sînt de sensuri contrare.

B) **Dreapta.** Amintim că, fiind dat un punct A și un vector $\mathbf{U}$, o dreaptă este definită ca mulțimea punctelor M care verifică

$$\mathbf{AM} = m\mathbf{U},$$

unde m parcurge mulțimea $\mathcal{R}$ a numerelor reale.

$\mathbf{U}$ se numește *vectorul director* al dreptei.

Din definiție rezultă că orice dreaptă este global invariantă la:

orice translație de vector $a\mathbf{U}$, oricare ar fi numărul a:

$$\forall m,\ m \searrow\!\!\!\!\nearrow m + a;$$

orice omotetie al cărei centru este unul din punctele ei:

$$\forall m,\ m \searrow\!\!\!\!\nearrow k(m - a);$$

orice inversiune al cărei pol este unul din punctele ei:

$$\forall m,\ m \searrow\!\!\!\!\nearrow \frac{k}{m - a};$$

mai general, orice transformare omografică pe $\mathcal{R}$:

$$\forall m,\ m \searrow\!\!\!\!\nearrow \frac{km + h}{k'm + h'}.$$

Teoremă. *Orice dreaptă împarte planul în două regiuni.*

Să adăugăm vectorului director $\mathbf{U}$ al dreptei un alt vector $\mathbf{V}$ neparalel cu el. Planul este mulțimea punctelor M definite de $\mathbf{AM} = x\mathbf{U} + y\mathbf{V}$. Spunem că două puncte M_1 și M_2 nesituate pe dreaptă sînt *într-o aceeași regiune* dacă y_1 și y_2 *sînt de același semn*. Aceasta este o relație de echivalență și se verifică imediat că împărțirea în regiuni astfel definită nu depinde nici de punctul

A de pe dreaptă, nici de vectorul director $\mathbf{U}$ al dreptei. S-a obținut în felul acesta *o partiție* a planului în două regiuni fără puncte comune și în dreapta însăși, așadar o partiție în trei submulțimi.

Convexitatea fiecărei regiuni. *Trebuie demonstrat că, dacă două puncte sînt în aceeași regiune, segmentul care le unește este inclus în acea regiune.* Într-adevăr, fie

$$\mathbf{AM}_1 = x_1\mathbf{U} + y_1\mathbf{V},\ \mathbf{AM}_2 = x_2\mathbf{U} + y_2\mathbf{V},$$

cu y_1 și y_2 de același semn.

Segmentul M_1M_2 este locul punctelor M astfel încît

$$\mathbf{M_1M} = m\mathbf{M_1M_2},\quad 0 \leqslant m \leqslant 1,$$

de unde

$$\mathbf{AM} = [(1 - m)x_1 + mx_2]\mathbf{U} + [(1 - m)y_1 + my_2]\mathbf{V}$$

și coeficientul lui $\mathbf{V}$ are într-adevăr semnul comun al lui y_1 și y_2.

Din contra, dacă M_1 și M_2 sînt în regiuni diferite, adică dacă y_1 și y_2 sînt de semne contrare, punctul M_0 care corespunde valorii m date de

$$(1 - m)y_1 + my_2 = 0,$$

adică lui $m_0 = y_1/(y_1 - y_2)$, este comun segmentului și dreptei. Fie, de exemplu, $y_2 < 0 < y_1$; cele două semidrepte care corespund respectiv la $m < m_0$ și la $m > m_0$ sînt în regiuni diferite.

Vedem astfel că orice dreaptă neparalelă cu dreapta dată conține cîte o semidreaptă în fiecare regiune.

Dreapta în geometrie analitică. Fie o bază oarecare $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a planului și originea O a reperului. Dreapta este locul punctelor $M(x, y)$ astfel încît, dacă x_0, y_0 sînt coordonatele lui A și dacă

$$\mathbf{U} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v},$$

avem

$$(x - x_0)\mathbf{u} + (y - y_0)\mathbf{v} = m(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}).$$

Ecuația dreptei se obține deci eliminînd pe m între

$$\begin{cases} x - x_0 = ma \\ y - y_0 = mb; \end{cases}$$

găsim

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Reciproc, orice ecuație $ux + vy + w = 0$ reprezintă o dreaptă dacă u și v nu sînt ambii nuli: într-adevăr, în acest caz putem lua $a = -u$, $b = v$, x_0 și y_0 fiind o pereche oarecare de numere care verifică $ux_0 + vy_0 + w = 0$.

C) **Figurile fundamentale.**

1) **Paralelogramul.** Intervertirea punctelor mediane

$$[\mathbf{AB} = \mathbf{CD}] \iff [\mathbf{AC} = \mathbf{BD}]$$

Centrul paralelogramului:

$$\begin{cases} \mathbf{AB} = \mathbf{CD} \\ \mathbf{AO} = \frac{1}{2}\,\mathbf{AD} \end{cases} \iff \left[\mathbf{BC} = \frac{1}{2}\,\mathbf{BC}\right].$$

2) **Figura lui Tales.** Dacă

$$\mathbf{OA'} = k\mathbf{OA}$$

și dacă B și B' sînt două alte puncte,

$$[\mathbf{OB'} = k\mathbf{OB}] \iff [\mathbf{A'B'} = k\mathbf{AB}].$$

D) **Aplicații**

1) **Figura afină a lui Désargues** (sau a *triunghiurilor omotetice*). Trei drepte a, b, c poartă respectiv perechile de puncte A, A'; B, B'; C, C' astfel încît AB, $A'B'$, precum și BC, $B'C'$ sînt paralele:

$$\exists k : \mathbf{A'B'} = k\mathbf{AB} \text{ și } \exists h : \mathbf{B'C'} = h\mathbf{CB}.$$

Să demonstrăm teorema:

$$[a, b, c \text{ concurente}] \iff [A'C' \text{ și } AC \text{ paralele}].$$

Într-adevăr, dacă a și b se intersectează în O, teorema lui Tales dă

$$\mathbf{OA'} = k\mathbf{OA}, \quad \mathbf{OB'} = k\mathbf{OB},$$

prin urmare

$$\mathbf{OC'} = h\mathbf{OC} + (k - h)\mathbf{OB}$$

și

$$\mathbf{A'C'} = h\mathbf{OC} + (k - h)\mathbf{OB} - k\mathbf{OA} = k\mathbf{AC} - (k - h)\mathbf{BC}.$$

Aceeași condiție $k = h$ exprimă deci coliniaritatea punctelor O, C, C' și paralelismul segmentelor $A'C'$ și AC.

Dacă dreptele a și b sînt paralele, figura paralelogramului înlocuiește figura lui Tales.

Demonstrația cere ca dreptele a, b, c să fie distincte, și la fel și dreptele AB și BC; în cazurile speciale cînd dreptele respective nu sînt distincte, teorema nu este adevărată.

2) **Figura afină a lui Pascal.** Două drepte δ și δ' poartă fiecare cîte trei puncte A, B, C și A', B', C'. Să demonstrăm teorema:

$$[AB' \parallel A'B \text{ și } BC' \parallel B'C] \Longrightarrow [AC' \parallel A'C]$$

(Semnul $\parallel$ indică paralelismul.)

Într-adevăr, fie O punctul comun al dreptelor, și $\mathbf{U}$ și $\mathbf{U}'$ vectorii lor directori. Coliniaritățile permit să se scrie:

$$\mathbf{OA} = a\mathbf{U}, \quad \mathbf{OB} = b\mathbf{U}, \quad \mathbf{OC} = c\mathbf{U}$$
$$\mathbf{OA}' = a'\mathbf{U}', \ \mathbf{OB}' = b'\mathbf{U}', \ \mathbf{OC}' = c'\mathbf{U}'.$$

Cele două ipoteze de paralelism se exprimă prin

$$aa' = bb' \text{ și } bb' = cc'.$$

Din ele rezultă

$$aa' = cc'$$

care exprimă concluzia.

(În capitolul 2 vom întîlni figurile *proiective* a lui Désargues și a lui Pascal.)

II. Geometrie în spațiul R^3 cu trei dimensiuni

Reperul este O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Am văzut că putem orienta bazele $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ cu ajutorul semnului unei expresii Δ formate cu ajutorul componentelor vectorilor bazei. În studiile noastre geometrice vom folosi o serie de consecințe verificabile prin calcul, în particular:

1) $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ își schimbă semnul dacă se permută doi vectori; astfel

$$\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}; \ \{\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U}\}, \ \{\mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{V}\}$$

sînt baze de același sens, care este contrar celui al bazelor

$$\{\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{V}\}; \ \{\mathbf{V}, \mathbf{U}, \mathbf{W}\}; \ \{\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}.$$

2) $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$; $\{-\mathbf{U}, -\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$; $\{-\mathbf{U}, \mathbf{V}, -\mathbf{W}\}$ și $\{\mathbf{U}, -\mathbf{V}, -\mathbf{W}\}$ sînt baze de același sens, care este contrar celui al bazelor

$$\{-\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}; \{\mathbf{U}, -\mathbf{V}, \mathbf{W}\}; \{\mathbf{U}, \mathbf{V}, -\mathbf{W}\} \text{ și } \{-\mathbf{U}, -\mathbf{V}, -\mathbf{W}\}.$$

3) Dacă $\mathbf{Z}$ este un vector dat în raport cu baza $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ prin

$$\mathbf{Z} = a\mathbf{U} + b\mathbf{V} + c\mathbf{W},$$

$\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{Z}\}$ *are același sens ca* $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ *dacă* c *este pozitiv.*

Spunem că trei vectori $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ sînt *coplanari* dacă există m și p astfel încît $\mathbf{W} = m\mathbf{U} + p\mathbf{V}$. Un *plan* este dat de A; $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$; el este mulțimea punctelor M astfel încît $\mathbf{AM}$ este coplanar cu $\mathbf{U}$ și $\mathbf{V}$.

Orice plan, loc al punctelor M care verifică $\mathbf{AM} = m\mathbf{U} + p\mathbf{V}$ cînd m și p parcurg mulțimea numerelor reale, împarte spațiul în două regiuni convexe pe care le deosebim cu ajutorul unui vector $\mathbf{W}$ care completează baza $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ a planului. Dacă o pereche $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ a unei baze $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ este coplanară cu $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$, această bază are același sens ca $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ *dacă* componenta lui $\mathbf{Z}$ după $\mathbf{W}$ este pozitivă; în acest caz spunem că „$\mathbf{Z}$ este de aceeași parte a planului ca $\mathbf{W}$".

Datorită acestor remarci, putem compara sensurile a două baze oarecare $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ și $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ folosind procedeul următor: introducem de exemplu un vector $\mathbf{K}$ coplanar cu $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ și $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$, și un vector $\mathbf{L}$ coplanar cu $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}\}$ și $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$. După aceea, comparăm din aproape în aproape sensurile bazelor $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$; $\{\mathbf{K}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\}$; $\{\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{W}\}$; $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}\}$ și $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$.

Figurile fundamentale sînt *paralelipipedul* și *figura lui Tales*, din care rezultă figura afină a lui Désargues în care planele ABC și $A'B'C'$ sînt paralele.

Teorema lui Tales în spațiul R^3

Șase puncte A, B, C *și* A', B', C' *fiind situate respectiv pe două drepte necoplanare,*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \iff [AA', BB', CC' \text{ coplanare}].$$

Într-adevăr, prin ipoteză,

$$\exists k, k' : \mathbf{AC} = k\mathbf{AB} \text{ și } \mathbf{A'C'} = k'\mathbf{A'B'},$$

de unde

$$\mathbf{AC} - \mathbf{A'C'} = k\mathbf{AB} - k'\mathbf{A'B'}$$
$$= k(\mathbf{AB} - \mathbf{A'B'}) + (k - k')\mathbf{A'B'},$$

adică

$$\mathbf{AA'} - \mathbf{CC'} = k(\mathbf{AA'} - \mathbf{BB'}) + (k - k')\mathbf{A'B'},$$

de unde

$$\mathbf{CC'} = (1 - k)\mathbf{AA'} + k\mathbf{BB'} - (k - k')\mathbf{A'B'}.$$

Or, $\mathbf{AA'}$, $\mathbf{BB'}$, $\mathbf{A'B'}$ formează o bază, prin urmare

$$[k = k'] \Longleftrightarrow [\exists \lambda, \mu : \mathbf{CC'} = \lambda\mathbf{AA'} + \mu\mathbf{BB'}],$$

ceea ce demonstrează teorema.

III. Teoria baricentrului

Vom generaliza acum (la cazul unui spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni) o serie de formule binecunoscute:

1) Fie o pereche de puncte A, B. Mijlocul lor G verifică

$$\mathbf{GA} + \mathbf{GB} = \mathbf{0}$$

şi, oricare ar fi punctul O,

$$\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = 2\mathbf{OG}.$$

Fiind date trei puncte A, B, C, putem determina un punct G astfel încît

$$\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = \mathbf{0}.$$

Într-adevăr, condiţia se scrie

$$\mathbf{AG} = \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = 2\mathbf{GA'}$$

dacă A' este mijlocul lui BC, deci

$$\mathbf{AG} = \frac{2}{3}\mathbf{AA'}.$$

Dar, deoarece egalitatea de plecare este simetrică în A, B, C, avem de asemenea

$$\mathbf{BG} = \frac{2}{3}\mathbf{BB'} \quad \text{şi} \quad \mathbf{CG} = \frac{2}{3}\mathbf{CC'}.$$

De aici — enunțul: *În orice triunghi, medianele sînt concurente într-un punct situat la două treimi de la vîrf pe fiecare din ele.*

Mai mult, dacă O este un punct oarecare al spațiului

$$\mathbf{AO} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = 3\mathbf{OG}, \ \forall O.$$

Vom generaliza acum aceste relații.

2) *Să considerăm punctul* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Există un punct* G *astfel încît*

$$\mathbf{GA}_1 + \mathbf{GA}_2 + \ldots + \mathbf{GA}_n = \mathbf{0},$$

și, oricare ar fi punctul O,

$$\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_2 + \ldots + \mathbf{OA}_n = n\mathbf{OG},$$

Demonstrație prin recurență: Fie g punctul astfel încît

$$\mathbf{gA}_1 + \mathbf{gA}_2 + \ldots + \mathbf{gA}_{n-1} = \mathbf{0},$$

punct despre care presupunem că este definit. Punctul G este atunci determinat, cu ajutorul teoremei lui Chasles, prin relația

$$\mathbf{A}_n\mathbf{G} = (n-1)\mathbf{Gg},$$

și

$$[\mathbf{OA}_1 + \ldots + \mathbf{OA}_{n-1} = (n-1)\mathbf{Og}] \Longrightarrow [\mathbf{OA}_1 + \ldots + \mathbf{OA}_{n-1} + \mathbf{OA}_n = n\mathbf{OG}]$$

(Vom da, în continuare, o demonstrație directă, pentru un enunț mai general.)

Punctul G pe care l-am definit mai sus se numește *baricentrul a* n *puncte afectate de coeficienți egali* (sau *centrul distanțelor medii* — după o terminologie care nu mai este folosită în prezent.)

3) **Teorema generală a baricentrului.** Convenție de scriere: Să notăm cu i un număr întreg care poate lua valorile $1, 2, \ldots, n$, și cu u_i un număr, sau un vector, care depinde de i. Vom nota simbolic cu Σu_i suma (algebrică sau geometrică) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Fie deci n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ afectate fiecare de un coeficient $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Vrem să demonstrăm că există un punct G astfel încît

$$\Sigma(m_i\mathbf{GA}_i) = \mathbf{0} \qquad (1)$$

cu condiția sa avem $\Sigma m_i \neq 0$, și că, oricare ar fi punctul O, acest punct G satisface

$$(\Sigma m_i)\,\mathbf{OG} = \Sigma(m_i\,\mathbf{OA}_i). \tag{2}$$

Pentru aceasta, vom demonstra că punctul G definit de (2) nu depinde de punctul O, ceea ce este suficient pentru scopul urmărit, fiindcă presupunînd punctul G determinat printr-o alegere particulară a lui O, vom plasa apoi pe O în G, și prin aceasta vom demonstra (1), fiindcă primul membru al egalității (2) va fi atunci nul.

Fie deci O și O' două puncte oarecare. În membrul al doilea al relației (2) care definește pe G pentru O dat, să înlocuim $\mathbf{OA}_i$ cu $\mathbf{OO'} + \mathbf{O'A}_i$. Acest al doilea membru devine

$$(\Sigma m_i)\mathbf{OO'} + \Sigma(m_i\mathbf{O'A}_i),$$

așa că același punct G satisface și

$$(\Sigma m_i)\mathbf{O'G} = \Sigma(m_i\mathbf{O'A}_i).$$

Q.E.D.

În cazul $\Sigma m_i = 0$, punctul G nu mai există, și demonstrația arată că $\mathbf{S} = \Sigma(m_i\mathbf{OA}_i)$ este un vector independent de O. Cînd există, punctul G se numește *baricentrul punctelor A_i afectate de coeficienții m_i*.

COMUTATIVITATE. Punctul G este, evident, independent de ordinea punctelor, cu condiția însă ca fiecare din ele să-și păstreze coeficientul.

ASOCIATIVITATE. Să repartizăm punctele în două clase lăsîndu-le neschimbați coeficienții. Fie g baricentrul primelor p puncte și g' baricentrul celor $n - p$ puncte rămase. Se vede imediat că G este baricentrul lui g afectat de coeficientul $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ și al lui g' afectat de coeficientul $m_{p+1} + \ldots + m_n$.

APLICAȚII. În statică — coeficienții fiind toți pozitivi și proporționali cu masa fiecărui punct — baricentrul se mai numește și *centrul de greutate* al sistemului de puncte. Cazul de imposibilitate nu poate deci surveni în astfel de probleme.

EXEMPLU DE APLICAȚIE GEOMETRICĂ: **Teorema lui Céva.** Condiția ca trei puncte A', B', C' situate respectiv pe laturile

BC, CA, AB ale unui triunghi să fie astfel încît AA', BB', CC' să treacă printr-un acelaşi punct.

Dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct G, putem atribui lui A, B, C nişte coeficienţi α, β, γ astfel încît G să fie baricentrul sistemului.

Într-adevăr, conform teoremei asociativităţii, dacă coeficienţii există, A' trebuie să fie baricentrul lui B şi C, şi, de asemenea, B' al lui A şi C. Ne asigurăm că punctul de intersecţie al lui AA' şi BB' este baricentrul sistemului scriind

$$\beta\overline{A'B} + \gamma\overline{A'C} = 0, \quad \gamma\overline{B'C} + \alpha\overline{B'A} = 0,$$

ceea ce determină coeficienţii α, β, γ pînă la o constantă prin rapoartele

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}.$$

Exprimăm că baricentrul se află şi pe CC' prin condiţia

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}.$$

Condiţia de compatibilitate este

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1.$$

Această relaţie necesară şi suficientă pentru ca AA', BB', CC' să fie concurente se numeşte *relaţia lui Céva*.

Studiu analog în R^3, pentru punctele de pe feţele şi muchiile unui tetraedru.

§ 2. TRANSFORMĂRILE PUNCTUALE AFINE

Am studiat (Cartea I, cap.4) generalităţile şi definiţiile esenţiale referitoare la transformările punctuale. Ne ocupăm aici de aplicaţiile spaţiului punctual pe el însuşi definibile cu ajutorul celor două operaţii care caracterizează spaţiul vectorial: adunarea şi înmulţirea cu un număr.

I. Transformarea afină generală

1. Definiție

Fiind date două repere în spațiul punctual, asociem fiecărui punct M definit în raport cu primul reper, punctul M' care are, față de reperul al doilea, coordonatele egale cu cele ale punctului M.

De exemplu, în spațiul cu trei dimensiuni, $\forall M$,

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}, \quad \mathbf{O'M'} = x\mathbf{u'} + y\mathbf{v'} + z\mathbf{w'}.$$

Rezultă imediat de aici că și *originile* O și O' *sînt asociate între ele, și la fel și vectorii corespondenți ai celor două baze.*

O corespondență punctuală afină este definită de o pereche de puncte asociate, O și O', și de transformarea spațiului vectorial pe el însuși

$$\mathbf{u} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{u'}, \quad \mathbf{v} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{v'}, \quad \mathbf{w} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{w'}$$

care se numește *transformare liniară.*

Din punct de vedere punctual, în spațiul cu n dimensiuni, o transformare afină este definită de $n + 1$ puncte $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$, și de imaginile lor, cu condiția ca sistemul de vectori $\mathbf{OA_1}, \mathbf{OA_2}, \ldots, \mathbf{OA_n}$ și imaginea lui să formeze două baze. Transformarea inversă *este* definită (corespondență biunivocă), așa cum rezultă din formulele pentru schimbarea sistemului de reper. Astfel, în plan, corespondența este definită de 3 perechi de puncte necoliniare, iar în spațiu, de 4 perechi de puncte necoplanare.

2. Produs de transformări afine

Pe baza definiției însăși, produsul unui număr oarecare de transformări afine este o transformare afină, cu condiția să se accepte transformarea identică, definită prin două repere confundate. Acesta este elementul neutru al produsului. Deoarece există comutativitate și o transformare inversă, conchidem că *mulțimea transformărilor afine ale unui spațiu punctual pe el însuși formează un grup.*

În consecință, transmutata unei transformări afine printr-o alta face și ea parte din grup.

3. Invarianți

Care proprietăți ale unei submulțimi F de puncte ale spațiului sînt păstrate de o transformare afină oarecare? Evident, cele care se exprimă exclusiv cu ajutorul coordonatelor punctelor: enumerăm

imediat *condiția de paralelism* a doi vectori, *echivalența* a doi vectori, și, mai general, *raportul a doi vectori coliniari*. În consecință condiția de coliniaritate este păstrată; *imaginea unei drepte este o dreaptă* și *imaginea unui segment* (orientat sau nu) *este un segment* (cu o orientare omoloagă). La fel pentru *un plan*, *un paralelogram* sau *un paralelipiped*, sau pentru o figură a lui Tales, a lui Désargues sau a lui Pascal. *Omologul baricentrului a n puncte afectate de coeficienți dați este baricentrul imaginilor afectate de aceiași coeficienți.*

RECIPROCĂ. *Orice transformare punctuală biunivocă a unui spațiu punctual pe el însuși care păstrează paralelismul și raportul vectorilor paraleli este o transformare afină.*

Să raționăm de exemplu în spațiul cu trei dimensiuni. Fie 4 puncte necoplanare O', A', B', C' în spațiul de sosire; antecedenții lor O, A, B, C nu sînt coplanari, fiindcă dacă OA ar intersecta pe BC în D, imaginea D' a acestui punct ar trebui să fie comună lui $O'A'$ și $B'C'$, ceea ce este exclus. OA nu poate fi nici paralelă cu BC. Aceste perechi de puncte definesc atunci o transformare afină. Or această transformare este tocmai transformarea dată, fiindcă ambele păstrează operația „determinarea baricentrului", și orice punct M poate fi definit ca baricentru al punctelor O, A, B, C afectate de coeficienți convenabili.

REMARCĂ. Enunțul fundamental pe care tocmai l-am dat cuprinde ipoteze mult supraabundente. Demonstrația nu folosește decît conservarea coliniarităților pe drepte care trec prin O, A, B, C, și cea a rapoartelor segmentelor purtate de asemenea drepte.

4) Punctul de vedere al geometriei analitice va fi tratat în § 3. El introduce matricele.

II. Transformări afine particulare

A) Translația

Originile O și O' sînt distincte, dar este păstrată baza spațiului vectorial.

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \qquad \text{dă } \mathbf{O'M'} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}$$

Prin urmare

$$\forall M, \quad \mathbf{OM} = \mathbf{O'M'} \tag{1}$$

ceea ce, prin intervertirea punctelor mediane este echivalent cu

$$\forall M, \quad \mathbf{MM'} = \mathbf{OO'} \tag{2}$$

Vectorul $\mathbf{OO'} = \mathbf{V}$ dat se numeşte *vectorul translaţiei*. Acest vector este suficient pentru a determina translaţia, pe baza teoremei:

Vectorul $\mathbf{V}$ *fiind dat, relaţia*

$$\forall M, \quad \mathbf{MM'} = \mathbf{V} \tag{3}$$

defineşte o translaţie, transformare punctuală afină care lasă invariantă baza spaţiului vectorial.

Într-adevăr, este suficient să aplicăm transformarea unui reper ales la întîmplare, după ce am remarcat în prealabil că (3) dă (1).

Teoremă. *Într-o translaţie, imaginea unui vector este un vector echipolent.*

Într-adevăr, (3) aplicată lui M şi P dă, prin intervertirea punctelor mediane

$$\forall M, \forall P, \quad \mathbf{MP} = \mathbf{M'P'}.$$

RECIPROCĂ. *Fiind date două perechi de puncte asociate* A, A' *şi* B, B' *care verifică* $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$, *corespondenţa definită prin*

$$\forall M, \; A'M' \parallel AM \quad \text{şi} \quad B'M' \parallel BM$$

este o translaţie.

Într-adevăr, ea dă, *pentru orice punct* M *nesituat pe dreapta* AB, o imagine care coincide cu imaginea lui M în translaţia de vector $\mathbf{AA'} = \mathbf{BB'}$. Pentru a putea conchide în cazul punctelor coliniare cu AB, este nevoie de o ipoteză suplimentară, şi anume fie de o condiţie de continuitate în vecinătatea acestei drepte, fie condiţia de conservare a rapoartelor punctelor coliniare pe AB şi pe $A'B'$.

Ipotezele din enunţ ar fi suficiente fără excepţie dacă s-ar referi nu la două puncte A şi B, ci la trei puncte A, B, C necoliniare.

Produs de translaţii. Considerăm transformarea identică drept o translaţie de vector nul. Atunci *translaţiile unui spaţiu punctual pe el însuşi formează un grup* faţă de înmulţire.

Produsul mai multor translaţii este o translaţie care are ca vector suma vectorilor translaţiilor componente; există deci *comutativitate*.

Să remarcăm că din grupul translaţiilor spaţiului cu trei dimensiuni putem extrage subgrupul translaţiilor de vectori paraleli cu un plan dat; un plan paralel cu acest plan este atunci global inva-

riant şi suferă o translaţie care se numeşte *restricţia la acel plan a translaţiei date*. Tot astfel putem considera subgrupul translaţiilor al căror vector are o direcţie dată, şi restricţia lui la o dreaptă de acea direcţie.

Din punctul de vedere al geometriei analitice, presupunînd că s-a ales o dată pentru totdeauna un reper, o translaţie este definită prin

$$M(x, y, z) \searrow\!\!\nearrow M'(x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c).$$

B) **Omotetia**

Transformarea afină numită omotetie este cea prin care vectorii bazei date $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *se înmulţesc cu un acelaşi număr real.* Astfel, în spaţiul cu trei dimensiuni,

$$O;\ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \searrow\!\!\nearrow O';\ \{\mathbf{u}' = k\mathbf{u},\ \mathbf{v}' = k\mathbf{v},\ \mathbf{w}' = k\mathbf{w}\},$$

altfel spus

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \text{ dă } \mathbf{O'M'} = k(x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}),$$

prin urmare

$$\forall M,\quad \mathbf{O'M'} = k\mathbf{OM}, \tag{1}$$

relaţie care defineşte o omotetie.

Numărul k, numit *raport de omotetie*, trebuie presupus diferit de 0. Dacă el are valoarea 1, transformarea este o translaţie. Prin urmare, *o translaţie este o omotetie de raport* 1.

Teoremă fundamentală. *O omotetie de raport diferit de* 1 *are un punct invariant.*

Într-adevăr, dacă O şi O' sînt distincte, există pe dreapta OO' un punct C definit prin

$$\mathbf{CO'} = k\mathbf{CO}, \tag{2}$$

adică

$$(1 - k)\mathbf{OC} = \mathbf{OO'}.$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\forall M,\quad \mathbf{CM'} = k\mathbf{CM} \tag{3}$$

care demonstrează invarianţa lui C.

Acest punct C se numeşte *centru de omotetie*. El este singurul punct invariant, aşa cum rezultă din (3), pentru că $k \neq 1$.

RECIPROC, *fiind daţi un punct invariant C şi un număr $k \neq 0$, transformarea definită de* (3) *este o omotetie.*

Este suficient să considerăm un reper care are pe C ca origine, baza fiind oarecare.

O omotetie este deci complet determinată de centrul şi de raportul ei. În egalitatea (1), O şi M sînt arbitrare, de unde enunţul:

Într-o omotetie, orice vector se înmulţeşte cu raportul de omotetie; direcţiile vectorilor sînt deci invariante şi, prin urmare, omoloaga unei drepte este o dreaptă, omologul unui segment este un segment; tot astfel, un paralelogram, sau un paralelipiped, îşi păstrează identitatea.

Remarcă cu privire la sensul vectorilor omologi: înmulţirea cu k păstrează sensul dacă k este pozitiv şi îl inversează dacă k este negativ. Vom reveni în 3) asupra acestei chestiuni.

ALTĂ RECIPROCĂ. *Fiind date două perechi de puncte asociate A, A' şi B, B' care verifică*

$$\mathbf{A'B'} = k\mathbf{AB},$$

corespondenţa definită prin

$$\forall \mathbf{M},\ \mathbf{A'M'} \parallel \mathbf{AM} \text{ şi } \mathbf{B'M'} \parallel \mathbf{BM}$$

este o omotetie.

Într-adevăr, să presupunem $k \neq 1$ şi să considerăm, ca mai sus, punctul C definit prin

$$\mathbf{CA'} = k\mathbf{CA}.$$

Omotetia de centru C, de raport k, dă, pentru orice punct M, aceeaşi imagine ca transformarea dată, cu excepţia poate a cazului în care M este pe dreapta AB. Ipotezele trebuie atunci completate, ca în cazul translaţiei.

1) **Produs de omotetii.** Conform definiţiei însăşi, un produs de omotetii este o omotetie (care poate fi o translaţie sau transformarea identică). În afară de aceasta, orice omotetie are o inversă: omotetia de acelaşi centru şi de raport invers, aşa cum rezultă din (3). Prin urmare, *mulţimea omotetiilor* (inclusiv translaţiile) *formează un grup* faţă de înmulţire. Grupul translaţiilor este un subgrup al acestuia.

Sub forma (1) este imediat faptul că raportul omotetiei produs este produsul rapoartelor omotetiilor componente. Rămîne însă să determinăm centrul omotetici produs, sau eventual vectorul translației produs. Dar chiar fără a face acest studiu, ne putem încredința imediat de *necomutativitatea produsului în cazul general*:

Să notăm $\mathcal{H}_1$ omotetia de centru C_1, de raport k_1, și analog pentru $\mathcal{H}_2$. Să comparăm imaginiile C' și C'' ale lui C_1 în următoarele două produse:

$$\text{în } \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 : \mathbf{C_2C'} = k_2\mathbf{C_2C_1}$$

$$\text{în } \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 : \mathbf{C_1C''} = k_1\mathbf{C_1C'}$$

prin urmare C' și C'' sînt distincte fiindcă $k_1 \neq 1$ ($\mathcal{H}_1$ nu este transformarea identică).

STUDIU DIRECT AL OMOTETIEI PRODUS DE DOUĂ OMOTETII

Fie $\mathcal{H}_1$ (centru C_1, raport k_1) și $\mathcal{H}_2$ (centru C_2, raport k_2). Schema produsului este

$$M \xrightarrow{\mathcal{H}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{H}_2} M_2 \qquad M \xrightarrow[\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2]{} M_2$$

Prin definiție,

$$\forall M,\ \mathbf{C_1M_1} = k_1\mathbf{C_1M} \quad \text{și} \quad \mathbf{C_2M_2} = k_2\mathbf{C_2}M_1.$$

Să eliminăm punctul intermediar M_1 cu ajutorul relației lui Chasles

$$\mathbf{C_2M_1} = \mathbf{C_1M_1} - \mathbf{C_1C_2}.$$

Rezultă

$$\forall M,\ \mathbf{C_2M_2} = k_2[k_1\mathbf{C_1M_1} - \mathbf{C_1C_2}]. \tag{1}$$

Punctul căutat C, dacă există, este deci definit de

$$\mathbf{C_2C} = k_2[k_1\mathbf{C_1C} - \mathbf{C_1C_2}], \tag{2}$$

adică

$$(1 - k_1k_2)\mathbf{C_1C} = (1 - k_2)\mathbf{C_1C_2} \tag{2'}$$

CAZUL GENERAL $k_1k_2 \neq 1$. Egalitatea (2') determină un punct C. Scăzînd membru cu membru (1) și (2) rezultă

$$\forall M,\ \mathbf{CM_2} = k_1k_2\mathbf{CM} \tag{3}$$

care definește omotetia de centru C și de raport k_1k_2.

CAZ PARTICULAR $k_1k_2 = 1$. Nu există puncte invariante, dar egalitatea (1) devine, cu $k_1 = 1/k_2$,

$$\forall M, \quad \mathbf{C_2M_2} = \mathbf{C_1M} - k_2\mathbf{C_1C_2}$$

pe care o scriem

$$\forall M, \quad \mathbf{MM_2} = (1 - k_2)\mathbf{C_1C_2}, \tag{4}$$

ceea ce definește translația de vector $\mathbf{V} = (1 - k_2)\mathbf{C_1C_2}$.

CONCLUZII

$k_1k_2 \neq 1$	$k_1k_2 = 1$
$F \xrightarrow{\mathcal{H}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{H}_2} F_2$, $\quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$	$F \xrightarrow{\mathcal{H}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{H}_2} F_2$, $\quad \mathcal{T} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$
$k = k_1k_2$	
$(1 - k_1k_2)\mathbf{C_1C} = (1 - k_2)\mathbf{C_1C_2}$	$\mathbf{V} = (1 - k_2)\mathbf{C_1C_2}$

Pe baza modului de formare a transformării inverse a unei omotetii sau a unei translații, aceeași schemă — în cazul $k_1k_2 = 1$ — ne dă produsul unei omotetii cu o translație, sau al unei translații cu o omotetie, sub forma $\mathcal{H}_1^{-1} \times \mathcal{T} = \mathcal{H}_2$ și $\mathcal{T} \times \mathcal{H}_2^{-1} = \mathcal{H}_1$.

Putem de asemenea enunța rezultatul: *două figuri transformate ale unei aceleiași figuri* (F_1) *prin două omotetii de rapoarte egale se deduc una din alta prin translație.*

REMARCA 1. Produsul a două omotetii nu este comutativ decît în cazul în care acestea au același centru.

REMARCA 2. Singurele drepte global invariante prin omotetie sînt cele care trec prin centru; pentru o translație, ele sînt cele paralele cu vectorul translației. Aceasta explică de ce am obținut C pe C_1C_2, sau $\mathbf{V}$ paralel cu C_1C_2.

2) **Punctul de vedere al geometriei analitice.** Reperul fiind ales o dată pentru totdeauna, o corespondență prin omotetie este definită prin

$$M(x, y, z) \longrightarrow M'(x' = kx + a, \quad y' = ky + b, \quad z' = kz + c).$$

Căutarea unui punct invariant se face schimbînd originea axelor de coordonate cu scopul de a face relațiile omogene (prin urmare, de a transforma relațiile afine în relații liniare).

Între $X = x - \alpha$ și $X' = x' - \alpha$ relația este

$$(X' + \alpha) = k(X + \alpha) + a,$$

care se reduce la $X' = kX$ pentru $\alpha = a/(1 - k)$.

Procedeu analog pentru determinarea lui β și γ. Problema este posibilă pentru $k \neq 1$.

APLICAȚIE. **Teorema lui Menelau.** Pe cele trei laturi ale unui triunghi ABC se află respectiv punctele A', B', C' definite prin

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \alpha, \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \beta, \quad \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \gamma;$$

se caută *condiția de coliniaritate* pentru A', B', C'.

Considerăm trei omotetii: $\mathcal{H}_1$ de centru A' și de raport α, $\mathcal{H}_2$ de centru B' și de raport β, și $\mathcal{H}_3$ de centru C' și de raport γ.

B, considerat drept punct al unei figuri F, dă prin $\mathcal{H}_1$ punctul C, care, prin $\mathcal{H}_2$ dă A care, la rîndul lui, prin $\mathcal{H}_3$ dă punctul B. Aceasta înseamnă că produsul acestor trei omotetii este o transformare a grupului care admite B ca punct dublu: este o omotetie de centru B și de raport $k = \alpha\beta\gamma$ —dacă acest produs nu este egal cu 1, sau este transformarea identică — dacă acest produs are valoarea 1.

a) Să presupunem A', B', C' coliniare: dacă produsul este o omotetie, centrul ei, așadar punctul B, se află pe această dreaptă $A'B'C'$: aceasta cere ca A' și C' să fie în B, caz neinteresant, exclus de altfel prin considerarea lui α finit. Prin urmare produsul este transformarea identică și $\alpha\beta\gamma = 1$.

De aici enunțul:

Dacă A', B', C' sînt coliniare, distincte de vîrfurile triunghiului, există egalitatea

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \qquad \text{(I)}$$

b) Reciproc, să presupunem această egalitate verificată, adică $\alpha\beta\gamma = 1$. Produsul celor trei omotetii este transformarea identică, prin urmare produsul primelor două este transformarea inversă celei de a treia. Aceasta înseamnă, în particular, că cele trei centre sînt coliniare. Prin urmare, (I) *atrage după sine coliniaritatea lui A', B' și C'.*

Relația (I) caracterizează așadar coliniaritatea punctelor A', B', C'; ea este *relația lui Menelau.*

Semnalăm că această relaţie se obţine mai direct caracterizînd coliniaritatea a trei puncte prin posibilitatea de a le proiecta pe o dreaptă într-un acelaşi punct, operaţie care conservă rapoartele α, β, γ, Analog — pentru a exprima că patru puncte de pe muchiile unui tetraedru sînt într-un acelaşi plan.

EXERCIŢIU. Din teorema lui Menelau să se deducă teorema lui Céva.

3) ORIENTAREA SPAŢIULUI ŞI SEMNUL RAPORTULUI DE OMOTETIE. Să remarcăm mai întîi că orice omotetie de raport negativ poate fi considerată drept produsul unei omotetii de acelaşi centru şi de raport pozitiv de aceeaşi valoare absolută, cu o omotetie de acelaşi centru şi de raport — 1. Această din urmă omotetie se numeşte *simetrie în raport cu un punct*, centrul de omotetie.

O omotetie de raport pozitiv (spunem, mai pe scurt, o omotetie pozitivă) păstrează orientarea bazelor, fiindcă vectorii îşi păstrează direcţia şi sensul. Va fi deci suficient să studiem dacă simetria în raport cu un punct păstrează sau nu orientarea.

a) Spaţiu cu o dimensiune. Vectorii omologi $\mathbf{v}$ şi $-\mathbf{v}$ sînt opuşi. Pe dreaptă, orientarea se schimbă.

b) Spaţiu cu 2 dimensiuni. Baza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ devine $\{-\mathbf{u}, -\mathbf{v}\}$. Ştim că aceste două baze sînt de acelaşi sens.

c) În spaţiul cu trei dimensiuni, din contra, orientarea se schimbă, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ devenind $\{-\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}\}$.

Prin urmare, *simetria în raport cu un punct, şi, la fel, orice omotetie negativă schimbă orientarea în spaţiul cu una sau cu trei dimensiuni, şi o conservă în spaţiul cu două dimensiuni.*

Dacă considerăm o omotetie în plan drept o restricţie la acel plan a unei omotetii extinse la tot spaţiul, vectorul $\mathbf{w}$ care completează baza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ şi imaginea sa $\mathbf{w}'$ sînt de o parte şi de alta a planului, ceea ce explică aspectul un pic insolit al enunţului precedent.

4) **Cîteva figuri omotetice una alteia**

a) FIGURĂ SITUATĂ ÎNTR-UN PLAN CARE NU TRECE PRIN CENTRUL DE OMOTETIE. Transformarea planului considerat se numeşte o *perspectivă a unui plan pe un plan paralel*. Figura imagine a lui (F) este secţiunea plană a mulţimii dreptelor care

unesc centrul (punctul de vedere) cu punctele lui F. Dacă (F) este o curbă, sau un poligon, (F') este secţiunea conului sau a unghiului poliedru astfel definit.

b) CONDIŢIA CA DOUĂ TRIUNGHIURI SĂ FIE OMOTETICE. Fie ABC şi PQR cele două mulţimi de cîte trei puncte. Pe baza reciprocelor studiate, este suficient să vedem dacă una din cele şase corespondenţe punctuale definite între aceste mulţimi verifică condiţiile dorite: două laturi respectiv paralele şi proporţionale [formula (1)], sau, la fel de bine, trei laturi paralele cu imaginile lor (a 2-a reciprocă). Dacă omotetia există, ea este unică.

c) CONDIŢIA CA DOUĂ PARALELOGRAME $ABCD$, $PQRS$ SĂ FIE OMOTETICE. Să presupunem că o corespondenţă între aceste figuri este o omotetie: aceasta înseamnă, de exemplu, că

$$\mathbf{PQ} = -\mathbf{RS} = k\mathbf{AB},\ \mathbf{PS} = k\mathbf{AD}.$$

Prin această omotetie, A şi B dau respectiv P şi Q. Ne convingem atunci fără dificultate că corespondenţa

$$\begin{cases} A \searrow \nearrow Q \\ B \searrow \nearrow P \end{cases}$$

nu este acceptabilă fiindcă

$$\mathbf{QP} = -k\mathbf{AB} \text{ şi } \mathbf{QR} = +k\mathbf{AD}.$$

Însă corespondenţa

$$\begin{cases} A \searrow \nearrow R \\ B \searrow \nearrow Q \end{cases}$$

determină o omotetie de raport $-k$ care convine, în timp ce

$$\begin{cases} A \searrow \nearrow Q \\ B \searrow \nearrow R \end{cases}$$

nu convine.

Prin urmare, *dacă două paralelograme sînt omotetice, ele sînt în două moduri şi numai în două.*

Cele două mulţimi $PQRS$ şi $RQPS$ omotetice cu $ABCD$ pentru cele două rapoarte de semne opuse sînt simetrice în raport cu un punct. Tocmai pentru că un paralelogram este global invariant la

simetria în raport cu punctul de intersecție al diagonalelor sale, trebuia să găsim un număr par de omotetii.

Mai general, dacă o figură este global invariantă la o omotetie, sau la o translație, orice figură care îi este omotetică, îi este omotetică în două moduri. Totuși, considerînd figura în chestiune, ne dăm seama că, dacă nu este vorba de simetria în raport cu un punct — *singura transformare reciprocă a grupului omotetiilor și translațiilor* — figura este global invariantă la o infinitate de omotetii sau translații; ea nu poate fi mărginită.

C) **Afinitățile**

1. **Afinități planare.** Să considerăm transformarea afină definită de reperele omoloage O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ și O'; $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ care sînt astfel încît O și O' sînt confundate, iar $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = k\mathbf{w}$, k număr real $\neq 0$.

Dacă $k = 1$, transformarea este transformarea identică. Vom presupune deci $k \neq 1$, și corespondența este definită prin

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \searrow \nearrow \mathbf{OM}' = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + kz\mathbf{w}. \qquad (\mathrm{I})$$

Punctele invariante sînt cele ale planului p de ecuație $z = 0$. Fiecărui punct M îi corespunde punctul invariant m definit prin

$$\mathbf{Om} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

care se numește *proiecția lui M pe planul p, paralelă cu* $\mathbf{w}$.

Avem în felul acesta

$$\mathbf{mM} = r\mathbf{w}, \quad \mathbf{mM}' = kz\mathbf{w},$$

prin urmare

$$\forall \mathbf{M}, \quad \mathbf{mM}' = k\mathbf{mM}.$$

RECIPROCĂ. Fiind dat un plan p, un vector $\mathbf{w}$ neparalel cu planul și un număr real nenul k, să considerăm transformarea punctuală care asociază fiecărui punct M de proiecție m pe p, paralelă cu $\mathbf{w}$, un punct M' definit prin condiția

$$\mathbf{mM}' = k\mathbf{mM}. \qquad (\mathrm{II})$$

Toate punctele lui p sînt invariante. Să luăm trei asemenea puncte care nu sînt coliniare O, A, B. Fie un punct C nesituat în planul p; imaginea lui este punctul C', definit de $\mathbf{cC}' = k\mathbf{cC}'$

Transformarea în cauză este transformarea afină definită de reperele **OA**, **OB**, **OC** şi **OA**, **OB**, **OC'**.

Numim această transformare *afinitate planară de plan p, de direcţie* **w** *şi de raport k*. Transformarea inversă este afinitatea de raport $1/k$.

Dacă $k = -1$, transformarea este *simetria în raport cu planul p, paralelă cu direcţia* **w**, singura afinitate planară reciprocă.

Proprietăţi. Pe lîngă proprietăţile generale ale transformărilor afine, obţinem aici cîteva particularităţi simple:

1) Dacă o dreaptă taie planul p, imaginea ei trece prin acest punct comun. Aceasta permite o *construcţie prin coliniarităţi* pornind de la două puncte şi de la imaginile lor, sau pornind de la un punct şi de la imaginea lui — dacă se folosesc paralelele la **w**. (Aplicaţie în geometria descriptivă.)

2) DIRECŢII INVARIANTE: pe baza celor precedente, acestea sînt direcţiile paralele cu **w** sau cu planul p.

O dreaptă paralelă cu **w** se conservă în ansamblul ei. O dreaptă paralelă cu p are o imagine care îi este paralelă.

REMARCĂ. Şirul consecvenţilor şi al antecedenţilor unui punct nesituat în p este acelaşi ca în omotetia de acelaşi raport k, al cărei centru este proiecţia punctului pe p, paralelă cu **w**. Altfel spus, *restricţia afinităţii planare la o dreaptă paralelă cu* **w** *este o omotetie*.

Restricţia afinităţii planare la un plan paralel cu **w**, care taie p după o dreaptă d, se numeşte *afinitate (plană) de bază d, paralelă cu* **w** *şi de raport k*. Dreapta d, deşi nu este în mod necesar orientată, este deseori numită „axă" de afinitate.

Produs de afinităţi planare. Singurul caz simplu este cel în care direcţiile invariante sînt aceleaşi în cele două transformări; presupunem deci mai întîi că *planele* p_1 *şi* p_2 *sînt paralele şi că direcţia* **w** *este comună*. Numim k_1 şi k_2 rapoartele de afinitate.

1) Dacă, pentru început, presupunem planele p_1 şi p_2 confundate, este imediat faptul că produsul este afinitatea planară de acelaşi plan şi de raport k_1k_2 (transformarea identică — dacă $k_1k_2 = 1$).

2) CAZUL GENERAL: p_1 ŞI p_2 SÎNT PLANE PARALELE DISTINCTE ŞI **w** ESTE COMUN. Dacă produsul este o afinitate planară, planul ei de bază p este paralel cu planele date (pe baza direcţiilor invariante) şi acest plan este determinat de un punct invariant. Să considerăm

deci un punct M oarecare, imaginea sa M_1 prin afinitate (p_1), apoi imaginea M_2 a lui M_1 prin (p_2). Aceste trei puncte sînt coliniare pe o paralelă la $\mathbf{w}$ care taie planele p_1 și p_2 în m_1 și m_2.

$$\mathbf{m_1M_1} = k_1\mathbf{m_1M},\ \mathbf{M_2m_2} = k_2\mathbf{m_2M_1}.$$

Noi știm să facem produsul celor două omotetii, restricție a transformărilor în cauză la dreapta m_1m_2. Să folosim deci rezultatele, fără a mai relua calculele:

CAZUL GENERAL: $k_1k_2 \neq 1$. Pe dreapta m_1m_2 există un punct m invariant, definit de

$$(1 - k_1k_2)\mathbf{m_1m} = (1 - k_2)\mathbf{m_1m_2}$$

și transformarea pe m_1m_2 este definită de

$$\forall M \in M_1M_2,\ \ \mathbf{mM_2} = k_1k_2\mathbf{mM}.$$

Dacă acum M variază în spațiu, $\mathbf{m_1m_2}$ rămîne echipolent cu un vector fix

$$\mathbf{W} = \alpha\mathbf{w},$$

și deci și

$$\mathbf{m_1m} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\alpha\mathbf{w}.$$

Locul punctelor m este prin urmare un plan p paralel cu p_1 și p_2. *Transformarea produs este afinitatea planară de plan de bază p, paralelă cu $\mathbf{w}$ și de raport k_1k_2.*

CAZUL PARTICULAR $k_1k_2 = 1$. Produsul nu mai este o afinitate planară fiindcă m nu există, dar în acest caz transformarea este definită de

$$\forall M,\ \mathbf{MM_2} = (1 - k_2)\mathbf{m_1m_2} = (1 - k_2)\ \alpha\ \mathbf{w},$$

care este *o translație*.

Reciproc, produsul unei afinități planare de direcție $\mathbf{w}$ și al unei translații paralele cu $\mathbf{w}$ este o afinitate planară.

În felul acesta, *afinitățile planare relative la plane de direcție dată și la o aceeași direcție $\mathbf{w}$ formează un grup dacă acceptăm să considerăm translațiile de direcție $\mathbf{w}$ drept o afinitate* (al cărei plan este aruncat la infinit).

Nu vom studia în cazul general produsul a două afinități planare: transformarea afină obținută nu este remarcabilă, în afară de cazul, pe care cititorul îl poate studia ca exercițiu, în care planul

de bază p este același, direcțiile $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2$ fiind diferite. (În cazul general $k_1k_2 \neq 1$, se poate folosi teorema lui Menelau pentru a arăta că produsul este o afinitate planară de același tip.)

2. Afinitate axială. Reperele care definesc transformarea afină sînt caracterizate prin O și O' confundate și prin

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u},\ \mathbf{v}' = k\mathbf{v},\ \mathbf{w}' = k\mathbf{w},$$

de unde corespondența punctuală

$$\forall M,\ \mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \searrow \nearrow \mathbf{OM}' = x\mathbf{u} + k(y\mathbf{v} + z\mathbf{w}).$$

Locul punctelor invariante este dreapta d dusă prin O și orientată de $\mathbf{u}$. Orice punct M are asociat un punct m de pe d definit prin $\mathbf{OM} = x\mathbf{u}$. Acesta este *proiecția lui M pe d* făcută paralel cu *planul* Π orientat de $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Transformarea este atunci definită prin

$$\forall M,\ \mathbf{mM}' = k\mathbf{mM}.$$

Ea este determinată de dreapta d, direcția planului Π și raportul k.

Aceasta înseamnă că *restricția transformării la un plan P paralel cu Π este o omotetie de raport k*, al cărei centru este piciorul lui d în planul P considerat.

Restricția la un plan Q care trece prin d este o afinitate plană. În felul acesta, o afinitate plană poate fi considerată la fel de bine o restricție a unei afinități planare, sau a unei afinități axiale în spațiul cu trei dimensiuni.

Dacă $k = -1$, afinitatea axială se numește *simetrie în raport cu d, paralelă cu Π*.

3. Afinitățile și orientarea spațiului. Afinitățile de raport pozitiv păstrează, evident, orientarea spațiului. Să presupunem deci k negativ.

SPAȚIU CU 3 DIMENSIUNI:

Afinitate planară: orientarea se schimbă.

Afinitate axială: orientarea este păstrată.

De altfel, o afinitate axială poate fi considerată drept un produs de două afinități planare de același raport.

SPAȚIU CU 2 DIMENSIUNI. Afinitatea de raport k negativ schimbă orientarea planului.

D) **Proiecția unui plan pe un altul, paralelă cu direcția unei drepte.**

Fie două plane p și p' definite prin reperele O; $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ și O'; $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$. O corespondență prin conservarea coordonatelor

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{O'M'} = x\mathbf{u}' + y\mathbf{v}'$$

va fi numită transformare afină între cele două plane. Ea este o tăietură a unei transformări în spațiul cu trei dimensiuni în care sînt scufundate cele două plane, fiindcă completînd bazele cu doi vectori arbitrari $\mathbf{w}$ și $\mathbf{w}'$, putem defini corespondența prin

$$\begin{cases} \mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \\ z = 0 \end{cases} \searrow\!\!\nearrow \begin{cases} \mathbf{O'M'} = x\mathbf{u}' + y\mathbf{v}' + z\mathbf{w}' \\ z = 0 \end{cases}$$

Numim proiecție a unui plan p pe un plan p', paralelă cu o direcție $\mathbf{w}$, corespondența între urmele M și M' în p și p' ale dreptelor paralele cu $\mathbf{w}$. Să demonstrăm că aceasta este o transformare afină.

Dacă p și p' sînt paralele, recunoaștem o translație. Să presupunem deci că p și p' au o dreaptă comună d; luăm ca reper o origine comună O care aparține lui d, și un vector $\mathbf{u} = \mathbf{OA}$ situat pe d, așa că O și A sînt invariante. După ce completăm reperul în p cu un vector $\mathbf{v} = \mathbf{OB}$ nesituat pe d, luăm ca $\mathbf{v}'$ vectorul $\mathbf{OB}'$, unde B' este imaginea lui B.

Notăm $\mathbf{BB}' = \mathbf{w}$ și atunci $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ și $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w}\}$ sînt două baze ale spațiului vectorial cu trei dimensiuni, iar corespondența este definită prin

$$\begin{cases} \mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \\ \mathbf{OM}' = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v}' \end{cases}, \qquad \mathbf{v}' - \mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad \mathbf{MM}' = \lambda\mathbf{w}$$

Dar din primele trei egalități deducem

$$\mathbf{MM}' = (x' - x)\mathbf{u} + (y' - y)\mathbf{v} + y'\mathbf{w}$$

Prin urmare, deoarece $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ este o bază, $\begin{cases} x = x' \\ y = y' = \lambda. \end{cases}$

Corespondența este într-adevăr afină și este definită prin

$$\begin{cases} \mathbf{OM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} \\ \mathbf{OM}' = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}' \end{cases}$$

RECIPROC, fie două plane p și p' care se taie în d. O corespondență afină între p și p' care lasă invariante două puncte (O și A) ale lui d este o proiecție, paralelă cu direcția BB', a dreptei care unește cele două puncte omoloage nesituate pe d.

CONSECINȚĂ. Dacă trei plane p, p_1, p_2 au o dreaptă d comună, produsul unei proiecții a lui p și p_1 și al unei proiecții a lui p_1 pe p_2 este o proiecție a lui p pe p_2.

REMARCĂ DE TERMINOLOGIE. Transformarea studiată se numea cîndva proiecție cilindrică; perspectiva era numită proiecție conică (v. cap.2).

§ 3. TRANSFORMĂRI LINIARE. NOȚIUNEA DE MATRICE

În spațiul punctual, am definit o *transformare afină* pornind de la o schimbare de repere pe care le vom numi acum

$$O\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \text{ și } O'\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}.$$

Ea este deci produsul translației $\overrightarrow{OO'}$ și al unei transformări care nu se referă decît la spațiul vectorial. Aceasta din urmă se numește *transformare liniară*. Ne propunem să studiem această transformare în spațiul cu trei dimensiuni.

Formulele care definesc $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ cu ajutorul bazei $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ formează un *sistem liniar* între vectori:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \end{cases} \tag{1}$$

Dacă $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ constituie o bază, definim o aplicație a spațiului vectorial pe el însuși atribuind fiecărui vector

$$\mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

imaginea $\mathbf{V}' = \mathfrak{T}(\mathbf{V}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}'$.

Dacă notăm $\mathbf{V}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, vechile și noile coordonate ale vectorului $\mathbf{V}'$ sînt legate prin sistemul de ecuații *omogene de gradul întîi*, numit *sistem liniar* între numere:

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + a_3z \\ y' = b_1x + b_2y + b_3z \\ z' = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases} \tag{2}$$

Transformarea $\mathfrak{T}$ astfel definită se numește *transformare liniară a spațiului vectorial pe el însuși.*

Vedem în particular că transformarea este definită de

$$\mathbf{i}' = \mathfrak{T}(\mathbf{i}),\ \mathbf{j}' = \mathfrak{T}(\mathbf{j}),\ \mathbf{k}' = \mathfrak{T}(\mathbf{k}).$$

Transformarea este caracterizată de un tablou pătrat al coeficienților care figurează în (1) și în (2), dar cu intervertirea liniilor și a coloanelor dacă transformăm nu vectori (1), ci coordonate (2). Spunem că între cele două aspecte ale transformării $\mathfrak{T}$ există *contravarianță*. Convenim să numim T tabloul coeficienților, așa cum se prezintă el în (1). Acest tablou se numește *matrice*, și scriem

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(Uneori paranteza mare este înlocuită cu bare duble verticale.) Semnul $=$ corespunde convenției de a numi *matrice egale* matricele care sînt formate din aceleași elemente plasate în aceleași poziții.

Matricea (2) a coeficienților se numește *transpusa* celei precedente. Dacă o numim M, vom scrie

$$M = \mathrm{tr}T$$

(În loc de $\mathrm{tr}A$ se folosește uneori notația A^T sau ${}^TA$.

RECIPROC, un tablou pătrat de 9 numere nu reprezintă totdeauna o transformare liniară $\mathfrak{T}$ așa cum am definit-o, fiindcă noi cerem aici ca $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ să formeze o bază. Aceasta se traduce prin faptul că (1), ca și (2), pot fi rezolvate în raport cu cele trei elemente din membrul al doilea:

$$\begin{cases} \mathbf{i} = A_1\mathbf{i}' + B_1\mathbf{j}' + C_1\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} = A_2\mathbf{i}' + B_2\mathbf{j}' + C_2\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} = A_3\mathbf{i}' + B_3\mathbf{j}' + C_3\mathbf{k}' \end{cases} \tag{1'}$$

$$\begin{cases} x = A_1x' + A_2y' + A_3z' \\ y = B_1x' + B_2y' + B_3z' \\ z = C_1x' + C_2y' + C_3z' \end{cases} \tag{2'}$$

Am văzut deja că aceasta cere să fie satisfăcută condiția

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3 \neq 0.$$

Matricele transpuse una alteia, care sînt formate din cei 9 coeficienţi nou obţinuţi, corespund transformării inverse a lui $\mathfrak{T}$. Ele se numesc *matricele inverse* ale precedentelor şi se notează T^{-1} şi M^{-1}.

Convenim să numim, mai general, *matrice* orice tablou dreptunghiular de numere. Cele de care ne ocupăm acum sînt considerate *matrice regulate*, iar transformările $\mathfrak{T}$ sînt numite *operatori regulaţi*: în acest caz există matrice inverse şi operatori inverşi.

Să remarcăm că dacă T este regulată atunci şi transpusa ei, precum şi inversele ambelor, sînt regulate. Ele sînt matrice pătrate de acelaşi *ordin*, ordinul fiind numărul de elemente din fiecare linie sau coloană.

În felul acesta, fiecărui operator regulat $\mathfrak{T}$ i-am asociat o matrice, dar aceasta depinde de baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ aleasă pentru a repera spaţiul liniar pe care operează $\mathfrak{T}$, în timp ce transformarea ca atare are o semnificaţie intrinsecă. Se impune deci să definim, în mulţimea matricelor regulate, o relaţie de echivalenţă: spunem că două matrice sînt *asemenea* dacă ele reprezintă acelaşi operator regulat în spaţiul raportat la două baze diferite.

EXEMPLU: Fie transformarea $\mathfrak{T}$ definită prin

$$\text{(afinitate paralelă cu } \mathbf{k}) \quad \begin{cases} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \\ \mathbf{j}' = \mathbf{j} \\ \mathbf{k}' = m\mathbf{k} \end{cases}$$

prin urmare

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Să luăm de exemplu noua bază

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{i} \\ \mathbf{v} = \mathbf{j} \\ \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \end{cases} \quad \text{de unde} \quad \begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{w}' = (1 - m)\mathbf{u} + m\mathbf{w} \end{cases}$$

Noua matrice este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 - m & 0 & m \end{pmatrix};$$

ea reprezintă aceeaşi afinitate, dar de direcţie neparalelă cu vreunul din vectorii noii baze.

Produs de matrice

Am definit produsul a două transformări, conform schemei

$$V \xrightarrow{\mathfrak{T}} [V' = \mathfrak{T}(V)] \xrightarrow{\mathfrak{T}'} [V'' = \mathfrak{T}'[\mathfrak{T}(V)]]$$

Produsul a fost notat pînă acum cu $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}'$, dar din punctul de vedere de aici, pentru a marca mai bine că este vorba în realitate de o funcție de funcție, adoptăm ordinea inversă: produsul se scrie $\mathfrak{T}' \circ \mathfrak{T}$, operațiile fiind indicate *de la dreapta la stînga*.

Produsul a două operații regulate este, și el, o operație regulată. Dacă T este matricea lui $\mathfrak{T}$ în raport cu baza inițială, iar T' este matricea lui $\mathfrak{T}'$ în raport cu imaginea obținută a acestei baze, numim *produs al celor două matrice* matricea T'' a produsului în raport cu baza inițială și scriem $T'' = T' \circ T$.

Să explicităm aceasta: avem

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \end{cases}$$

apoi

$$\begin{cases} \mathbf{i}'' = a_1'\mathbf{i}' + b_1'\mathbf{j}' + c_1'\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}'' = a_2'\mathbf{i}' + b_2'\mathbf{j}' + c_2'\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}'' = a_3'\mathbf{i}' + b_3'\mathbf{j}' + c_3'\mathbf{k}' \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \mathbf{i}'' = (a_1'a_1 + b_1'a_2 + c_1'a_3)\mathbf{i} + (a_1'b_1 + b_1'b_2 + c_1'b_3)\mathbf{j} + (a_1'c_1 + b_1'c_2 + c_1'c_3)\mathbf{k} \\ \mathbf{j}'' = (a_2'a_1 + b_2'a_2 + c_2'a_3)\mathbf{i} + (a_2'b_1 + b_2'b_2 + c_2'b_3)\mathbf{j} + (a_2'c_1 + b_2'c_2 + c_2'c_3)\mathbf{k} \\ \mathbf{k}'' = (a_3'a_1 + b_3'a_2 + c_3'a_3)\mathbf{i} + (a_3'b_1 + b_3'b_2 + c_3'b_3)\mathbf{j} + (a_3'c_1 + b_3'c_2 + c_3'c_3)\mathbf{k} \end{cases}$$

Matricea care apare este produsul

$$T'' = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Așadar, fiecare linie a lui $T' \circ T$ provine din linia cu același număr a lui T' asociată cu coloanele succesive ale lui T; fiecare

coloană a lui $T' \circ T$ provine din coloana cu același număr a lui T asociată cu liniile succesive ale lui T'.

Pentru a aplica această regulă trebuie o oarecare experiență dobîndită pe exemple. Caracterul greoi al calculelor justifică notația simbolică cu ajutorul căreia învățăm să raționăm, evitînd pe cît posibil dezvoltarea expresiilor.

PROPRIETĂȚILE PRODUSULUI. Ele se deduc din cele ale transformărilor liniare:

a) Produsul unui număr oarecare de matrice regulate de același ordin este o matrice *de același ordin*, și produsul este asociativ dar, în general, necomutativ.

b) Matricea care reprezintă transformarea identică este, pentru un ordin dat, unică și independentă de bază, pentru că trebuie să scriem $x' = x$, $y' = y$ etc. Ea nu cuprinde decît elemente nule, cu excepția celor de pe diagonala ei principală, unde elementele sînt egale cu 1. Ea este elementul neutru al produsului: $T \circ I = I \circ T = T$.

Exemplu: pentru ordinul 3

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) O matrice regulată T are o inversă T^{-1} și $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$, ceea ce justifică termenul „inversă" și notația introdusă. În felul acesta, matricele regulate de un ordin dat formează un grup în raport cu produsul, grup necomutativ.

Transmutata unei transformări liniare regulate $\mathfrak{T}$ printr-o transformare regulată ($\mathfrak{S}$) de același ordin.

Schema este următoarea

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i, j, k} & \xrightarrow{\ \mathfrak{T}\ } & \mathbf{i', j', k'} \\ \uparrow \mathfrak{S} & & \mathfrak{S} \downarrow \\ \mathbf{u, v, w} & \xrightarrow{\ \mathfrak{K}\ } & \mathbf{u', v', w'} \end{array}$$

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{T} \circ \mathfrak{S}^{-1}$$

(citită de la dreapta la stînga)

Dar transformarea $\mathcal{H}$ nu este alta decît transformarea $\mathfrak{T}$; într-adevăr, să transformăm prin $\mathcal{H}$ un vector $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} \overset{\mathcal{H}}{\longrightarrow} \mathbf{V}' = x\mathbf{u}' + y\mathbf{v}' + z\mathbf{w}'.$$

Coeficienții formulelor pentru schimbările bazei sînt elementele uneia și aceleiași matrice $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{j} + \gamma_1\mathbf{k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \mathbf{u}' = \alpha_1\mathbf{i}' + \beta_1\mathbf{j}' + \gamma_1\mathbf{k}' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Calculul ar da, prin urmare, cu aceleași numere X, Y, Z, expresiile

$$\mathbf{V} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \quad \text{și} \quad \mathbf{V}' = X\mathbf{i}' + Y\mathbf{j}' + Z\mathbf{k}'$$

așa că transformarea lui $\mathbf{V}$ în $\mathbf{V}'$ apare, de data aceasta, ca fiind transformarea $\mathfrak{T}$.

În felul acesta, $\mathcal{H}$ operînd plecînd de la baza $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ este aceeași transformare ca $\mathfrak{T}$ operînd pe baza $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Altfel spus, *matricele*

$$T \text{ și } X = S \circ T \circ S^{-1}$$

sînt asemenea, oricare ar fi S (regulată).

Avem astfel un mijloc de a găsi matrice asemenea cu o matrice dată. O problemă importantă, pe care însă nu o abordăm, este cea a găsirii matricei celei mai simple, asemenea cu o matrice dată.

EXEMPLU

$$\mathcal{S} \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{i} \\ \mathbf{v} = \mathbf{k} \\ \mathbf{w} = \mathbf{j} \end{cases}$$

prin urmare

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = S^{-1}.$$

Calculul direct, trecerea de la

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{la} \quad \begin{cases} \mathbf{u}' = \alpha_1\mathbf{i}' + \beta_1\mathbf{j}' + \gamma_1\mathbf{k}' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

sau aplicarea regulii de înmulțire, va arăta că X se deduce din T permutînd ultimele două linii și ultimele două coloane. Se va studia, de asemenea, efectul transmutării prin

$$\mathcal{S}\begin{cases}\mathbf{u} = m\mathbf{i}\\ \mathbf{v} = \mathbf{j}\\ \mathbf{w} = \mathbf{k}\end{cases}$$

și prin

$$\mathcal{S}\begin{cases}\mathbf{u} = \mathbf{i}\\ \mathbf{v} = \mathbf{j}\\ \mathbf{w} = \mathbf{j} + \mathbf{k}.\end{cases}$$

Noțiuni despre matricele neregulate

În sistemul (1) care definește transformarea liniară, nu mai presupunem că $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ formează o bază. Aceasta înseamnă că acești vectori sînt legați printr-o relație de genul $\mathbf{k}' = \alpha\mathbf{i}' + \beta\mathbf{j}'$.

Vectorii $\mathbf{V}'$ imagini ale lui $\mathbf{V}$ nu mai generează deci decît un spațiu cu cel mult două dimensiuni, și transformarea nu mai are o inversă bine definită. De exemplu, $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{0}$, care corespunde unei proiecții pe planul $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ făcută paralel cu $\mathbf{k}$, nu este o transformare regulată; la fel — transmutata ei printr-o transformare regulată. Luînd de exemplu:

$$\begin{cases}\mathbf{u} = \mathbf{i}\\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}\\ \mathbf{w} = \mathbf{j} + \mathbf{k}\end{cases} \quad \text{deci} \quad \begin{cases}\mathbf{i} = \mathbf{u}\\ \mathbf{j} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w};\\ \mathbf{k} = -2\mathbf{u} + \mathbf{v}\end{cases}$$

matricea neregulată

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

devine

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \circ T \circ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

o nouă matrice pătrată neregulată, care, de această dată, nu mai are linia a treia formată din zerouri; într-adevăr, calculul dă:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

apoi

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

Dar în cazul de față nu mai are rost să ne limităm la a scrie matrice pătrate; este inutil să scriem $k' = 0$, și putem considera spațiul de sosire drept un spațiu cu două dimensiuni, și nu drept un subspațiu cu două dimensiuni al unui spațiu cu trei dimensiuni. Regula produsului rămîne valabilă și vom scrie

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix},$$

apoi

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

Regula de calcul a produsului pretinde numai ca *numărul de linii al primului factor* (cel din dreapta) *să fie egal cu numărul de coloane al celui de al doilea factor* (cel din stînga).

Astfel

$$(p\ q\ r)\circ\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(px+qy+rz).$$

Produsul rămîne asociativ; deoarece o matrice nu mai are totdeauna o inversă, mulțimea matricelor neregulate nu formează un grup în raport cu operația produs.

Folosirea matricelor pentru reprezentarea formelor liniare

a) Să nu mai considerăm sistemul (1) între vectorii bazei, ci sistemul (2) care leagă coordonatele vectorilor. Tabloul coeficienţilor este o matrice M (transpusa matricei T). Dacă convenim să reprezentăm un vector prin matricea v compusă dintr-o singură coloană care are ca elemente coordonatele vectorului, sistemul (2) se scrie

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

adică $v' = M \circ v$.

Faptul rămîne valabil chiar dacă M nu este regulată, şi nici măcar pătrată, cu condiţia însă ca numărul de coloane ale lui M să fie egal cu numărul de coordonate ale lui **V**, adică cu dimensiunea spaţiului transformat.

b) Din punct de vedere pur algebric, x', y', z' sînt *forme liniare* în x, y, z (adică polinoame de gradul unu, omogene în aceste trei litere). Formele se numesc *liniar independente*, sau *libere*, dacă matricea M este regulată. Atunci x, y, z sînt şi ele forme liniare în x', y', z'.

Firește, produsul matricelor nu este comparabil cu produsul formelor liniare ! Cele două operaţii numite aici produs sînt introduse pornind de la puncte de vedere cu totul diferite: un produs de matrice este o matrice; un produs de forme liniare este un polinom de gradul doi omogen în raport cu mulţimea literelor x, y, z, polinom care se numeşte *formă pătratică*. Totuşi, nu trebuie să se creadă că matricele sînt inutile în studiul formelor pătratice; dimpotrivă. Vom înţelege acest lucru din remarca următoare: fie, de exemplu

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

o formă pătratică cu două variabile. Acesta este însă polinomul obţinut făcînd $X = x$ şi $Y = y$ în forma *biliniară* $(ax + by)X + (bx + cy)Y$, care este reprezentată de produsul de matrice

$$(ax + by \quad bx + cy) \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aceeaşi remarcă pentru un număr oarecare de variabile (formele care constituie matricea din stînga sînt derivatele formei pătratice calculate, luînd succesiv ca variabilă fiecare literă). Vom constata în plus că forma liniară (numită *formă polară* a formei pătratice) este simetrică în raport cu mulţimea literelor x, y, ... şi cu mulţimea literelor X, Y, ...

Am dat aceste cîteva indicaţii pentru a-l face pe cititor să presimtă utilitatea matricelor în studiul curbelor şi al suprafeţelor de gradul doi (conice, cuadrice).

c) Dar formele liniare pot fi adunate, sau pot fi înmulţite cu un număr. Deoarece le reprezentăm printr-o matrice, este natural atunci să introducem o *adunare de matrice*, şi o *înmulţire cu un număr*.

Mai întîi pentru o matrice formată dintr-o singură coloană (care reprezintă un vector, sau o formă liniară): notăm, de exemplu pentru 3 litere:

$$\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \\ z' + z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Apoi, prin extensie, definim *suma a două matrice cu acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane* ca fiind matricea în care fiecare element este suma elementelor cu aceeaşi poziţie în matricele date, şi *produsul unei matrice cu un număr* ca fiind matricea obţinută înmulţind fiecare element cu acel număr. Obţinem atunci un spaţiu vectorial.

Matricea nulă (elementul neutru al adunării) este, evident, o matrice care are toate elementele nule.

Interpretarea prin vectori dovedeşte că mulţimea matricelor pătrate de ordin dat formează un *inel*, fiindcă produsul matricelor este distributiv în raport cu adunarea, din cauză că transformările liniare respectă adunarea vectorilor.

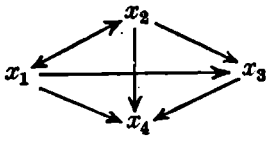
MATRICELE ŞI GEOMETRIA PROIECTIVĂ. Geometria proiectivă (vezi cap.2) conduce la înlocuirea coordonatelor din geometria afină cu coordonate omogene. Aceasta permite să se prezinte geometria proiectivă ca o geometrie liniară cu o dimensiune în plus; aceasta înseamnă că înlocuirea respectivă permite să se folosească matricele în problemele de gradul unu şi doi (aşa cum am văzut deja) ale acestei geometrii.

MATRICELE ÎN GEOMETRIA METRICĂ. Va trebui să folosim matrice particulare — dacă dorim baze formate din vectori egali, rectangulari. Forma relației lui Pitagora și a produselor scalare și vectoriale arată clar că matricele vor fi și aici utile.

ALTE CAZURI DE INTRODUCERE A MATRICELOR

Sînt numeroase problemele care introduc tablouri dreptunghiulare de elemente. Dacă teoria face să intervină operații cu aceste elemente, comparabile cu cele pe care le-am descris, aceste tablouri vor fi considerate drept matrice.

Exemplu: *Matrice de comunicații.* Se face schimb de semnale după o schemă analoagă celei reprezentate mai jos. Dacă x_j este atins de un semnal emis de x_i, marcăm cu 1 intersecția liniei i cu coloana j; dacă nu, înscriem acolo 0; obținem în felul acesta matricea m_1. În m_2 indicăm numărul de moduri de a atinge x_j plecînd de la x_i, cu două semnale succesive. Se va verifica că $m_2 = m_1 \circ m_1 = (m_1)^2$.



$$m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 2

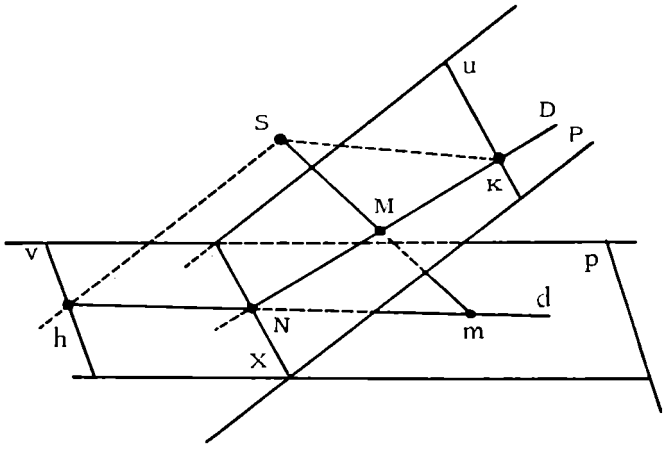
NOȚIUNI DE GEOMETRIE PROIECTIVĂ

Vom introduce acum o geometrie mai puțin cuprinzătoare decît geometria afină, care nu va mai conține noțiunea de paralelism, și nici, cu atît mai puțin, pe cea de vector liber, de sumă de vectori etc. La început vom deduce geometria proiectivă cu *două* dimensiuni din geometria afină cu *trei* dimensiuni. Pe baza proprietăților puse în evidență, ne vom da seama de posibilitatea unei introduceri axiomatice directe a acestei geometrii, și a extinderii ei la spațiul cu trei dimensiuni.

Noțiunile pe care le vom introduce sînt cele care se conservă la transformările de la plan la plan numite *perspective*.

I. Perspectiva unui plan pe un plan

1. Definiție. În spațiul geometriei afine, fie date două plane P și p, și un punct S în afara acestor plane. Fiecărui punct M al lui P îi corespunde punctul m în care dreapta SM înțeapă planul p. Vom spune că m este imagi ea lui M în *perspectiva de punct de vedere* (sau *centru de proiecție* — *N.R.*) S *care aplică* P *pe* p (terminologia provine din arta desenului care, istorice̦ște vorbind, a condus la această geometrie).



În cazul particular în care P şi p sînt paralele, transformarea este o omotetie. Pentru început ne vom ocupa însă numai de cazul general; cele două plane au atunci în comun o dreaptă X, loc al punctelor care coincid cu imaginile lor.

Orice punct M al lui P are o imagine m, cu excepţia punctelor care sînt astfel încît SM este paralelă cu p, adică a punctelor unei drepte U a lui P, intersecţie a lui P cu planul Π dus prin S paralel cu p. Tot astfel, orice punct m a lui p este imaginea unui punct M al lui P, cu excepţia punctelor unei drepte v, intersecţie a lui p cu planul dus prin S paralel cu P. Dreptele X, U, v sînt paralele.

2. Imaginea unei drepte. Fie D o dreaptă a lui P. În general, ea taie X într-un punct N, şi U într-un punct K. Orice punct M al lui D, cu excepţia lui K, are o imagine m; mulţimea acestor puncte m constituie dreapta d, intersecţie cu planul p a planului S, D, cu excepţia punctului h în care d taie v, fiindcă acest punct nu este imaginea nici unui punct al lui P. În ciuda acestor excepţii, vom spune că imaginea lui D este d. Cele două drepte se intersectează în punctul N al lui X, care este invariant.

Dacă D este paralelă cu U, d este paralelă cu ea, dar d nu există dacă D este însăşi dreapta U.

Drepte concurente într-un punct M_0 au imagini concurente în m_0, afară de cazul în care M_0 este pe U, caz în care dreptele

imagini sînt paralele cu SM_0. Tot astfel, drepte paralele cu o direcție Δ din P au imagini concurente în punctul h al lui ν care este astfel încît Sh are direcția Δ. În fine, drepte paralele cu U au, așa cum am mai spus, imagini paralele cu această direcție.

EXTENSIE. Toate aceste cazuri de excepție dispar dacă completăm mulțimile de puncte și de drepte, precum și terminologia, după cum urmează.

Un punct K al lui U are o imagine k, *punct de la infinit* al lui p.

Dreapta U, loc al punctelor K, are o imagine u, loc al punctelor de la infinit ale lui p, numit *dreapta de la infinit a lui p*.

Un punct h al lui ν este imaginea unui punct de la infinit al lui P, mulțimea acestor puncte constituind dreapta de la infinit V al lui P.

Putem atunci enunța proprietatea esențială:

[P_1] *În perspectiva unui plan pe un plan, imaginea fiecărui punct este un punct, imaginea fiecărei drepte este o dreaptă, în așa fel încît punctelor coliniare le corespund puncte coliniare, iar dreptelor concurente le corespund drepte concurente.* Altfel spus, perspectiva păstrează coliniaritatea și incidențele.

3. Remarcă de topologie. Fie un punct M nesituat pe U și o vecinătate $V(M)$ a lui M fără puncte comune cu U. Imaginea $\nu(m)$ a acestei vecinătăți este și ea o vecinătate a lui m. Vom deduce de aici că dacă M descrie o curbă care trece printr-un punct M_0 nesituat pe U și admite o tangentă T_0 în M_0, transformarea curbei dă o curbă care trece prin m_0, unde admite o tangentă t_0 imagine a lui T_0.

Fie însă o vecinătate a unui punct K al lui U, de exemplu interiorul unui paralelogram de centru K și cu laturi paralele cu U și cu o altă dreaptă D. Acest interior va avea ca imagine două unghiuri trunchiate (cu vîrful în h). Această mulțime de puncte trebuie considerată drept *o vecinătate a punctului de la infinit k*. O curbă C din planul P care trece prin K și admite în K o tangentă T_0, diferită de U, va avea ca imagine o curbă c „care trece prin punctul de la infinit k", și t_0, imaginea lui T_0, va fi „tangenta la c în punctul de la infinit k". Aceste expresii traduc expresiile afine: direcție asimptotică și asimptotă.

Un studiu al regiunilor determinate în P de dreptele U și T_0 pune în evidență dispunerea lui c față de t_0. Desenul în cazul general a fost făcut în capitolul referitor la graficele funcțiilor numerice (Cartea a III-a, cap, 4, § III): C este, în vecinătatea lui

K, de o singură parte a lui T_0, iar c este atunci de o parte și de alta a subasimptotei. Se va examina ca exercițiu cazurile în care K este punct remarcabil al lui C: punct de inflexiune sau punct de întoarcere.

În fine, dacă C admite ca tangentă în K însăși dreapta U, trebuie să spunem că c admite ca tangentă în punctul de la infinit k, dreapta de la infinit (din punct de vedere afin, c admite o ramură parabolică).

Obținem astfel enunțul general: Dacă o curbă C admite o tangentă într-un punct, curba imagine admite, în punctul imagine, o tangentă care este imaginea tangentei la C. Altfel spus, *perspectiva păstrează contactele curbelor.*

4. Aplicații. *a)* Să considerăm în planul P figura afină a lui Désargues (cap 1, § I) constituită din două triunghiuri omotetice ABC, $A'B'C'$. Presupunem că $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Atunci, a spune că AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct O echivalează cu a spune că AC și $A'C'$ sînt paralele.

Să transformăm această figură printr-o perspectivă oarecare: coliniaritățile OAA', OBB', OCC' dau coliniarități Oaa', Obb', Occ'. Paralelele AB, $A'B'$ au ca imagine drepte ab, $a'b'$ care se taie în γ pe dreapta ν; tot astfel, bc și $b'c'$ se taie în punctul α al lui ν, iar ac și $a'c'$ se taie în punctul β al lui ν.

Invers, fie în planul p figura formată din două triunghiuri oarecare abc, $a'b'c'$, laturile corespondente intersectîndu-se respectiv în α, β, γ. Putem face totdeauna o perspectivă luînd un plan P care taie p după o dreaptă paralelă cu $\alpha\beta$ și un punct S în planul dus prin $\alpha\beta$, paralel cu P. Atunci α și β își au imaginile la infinit. A spune că γ este coliniar cu α, β este echivalent cu a spune că AB și $A'B'$ sînt paralele. A spune că aa', bb', cc' sînt concurente este echivalent cu a spune că AA', BB', CC' sînt concurente. Obținem *figura proiectivă a lui Désargues* și enunțul devine:

A spune că două triunghiuri își au vîrfurile corespondente pe drepte concurente este echivalent cu a spune că laturile lor corespondente se intersectează în trei puncte coliniare. Două triunghiuri care satisfac această condiție se numesc *omologice.*

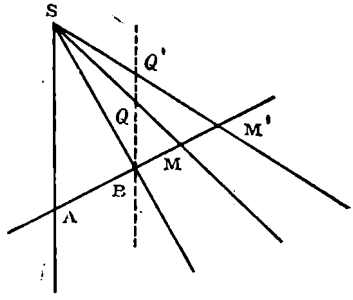
b) Printr-un procedeu asemănător, din figura afină a lui Pascal deducem *figura proiectivă a lui Pascal*:

Dacă un hexagon își are vîrfurile consecutive alternativ pe o dreaptă și pe o altă dreaptă, laturile lui opuse se intersectează în trei puncte coliniare.

II. Invariant referitor la puncte coliniare

a) Transformînd puncte coliniare, facem o restricție a perspectivei la un plan care trece prin punctul de vedere S. Facem deci aici geometrie proiectivă cu o dimensiune, cu ajutorul geometriei afine cu două dimensiuni.

Dacă sînt date *trei* puncte coliniare, nu avem de introdus nici o caracterizare proiectivă. Într-adevăr, dacă A, B, C sînt arbitrare pe o dreaptă D și a, b, c sînt arbitrare pe o dreaptă d, putem face totdeauna ca aceste figuri să se corespundă prin produsul unei translații (aducînd, de exemplu, pe A în a) cu o perspectivă (S este atunci intersecția lui bB cu cC). Trebuie deci să considerăm *patru* puncte.



Fie o dreaptă definită de două puncte A, B, și două alte puncte M și M' ale acestei drepte. Unim aceste puncte cu punctul de vedere S. Teorema lui Tales ne permite să evaluăm rapoartele $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ și $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$ cu ajutorul unor vectori luați pe paralela la SA dusă prin B; dacă această dreaptă taie SM în Q și SM' în Q', $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{QB}}$, $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{Q'B}}$, deci $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \frac{\overline{Q'B}}{\overline{QB}}$, raport invariant în perspectiva de punct de vedere S care aplică secanta $ABMM'$ pe orice altă secantă. Numărul

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$

se numește *biraportul* celor patru puncte $A, B; M, M'$ (sau, după denumirea dată de Chasles, *raportul anarmonic* al acestor 4 puncte).

Prin urmare, *biraportul a 4 puncte coliniare este invariant la orice perspectivă*. Acesta este elementul fundamental al geometriei proiective; îl notăm $(A, B; M, M')$.

Aşadar

$$(A, B; M, M') = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{M'B}}{\overline{MB} \cdot \overline{M'A}}.$$

Sub această din urmă formă vedem că fiecare punct apare o dată la numărător, o dată la numitor, şi de două ori ca extremitate sau de două ori ca origine a unor vectori. Aceasta caracterizează unul din birapoartele definite de 4 puncte coliniare, *număr care depinde de ordinea în care sînt luate aceste puncte.*

În geometria proiectivă, o dreaptă este determinată prin două puncte, dar un punct M al dreptei este reperat plecînd de la trei puncte A, B, C ale dreptei prin numărul

$$\lambda_M = (A, B; C, M) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.$$

Numărul λ_M este un element de geometrie proiectivă, în timp ce fiecare din rapoartele din membrul al doilea este un element de geometrie afină.

TEOREMĂ. Evaluarea biraportului a 4 puncte M_1, M_2, M_3, M_4 în funcţie de cele 4 numere λ care definesc fiecare punct plecînd de la punctele date A, B, C.

Să revenim la abscisele punctelor pe dreapta afină. Fiind date o origine şi o unitate oarecare, să notăm cu a, b, c, x abscisele lui A, B, C, M. Obţinem

$$\lambda_M = \frac{(a - c)}{(b - c)} : \frac{(a - x)}{(b - x)},$$

număr pe care îl numim *biraportul celor 4 numere* $a, b; c, x$ şi pe care îl notăm $(a, b; c, x)$. Aceasta este o funcţie omografică de x pe care o putem scrie sub forma

$$\lambda = k + \frac{h}{x - a}.$$

Or, transformările succesive ale lui x în $X = x - a$, apoi în $Y = 1/X$, apoi în $Z = hY$, apoi în $\lambda = Z + k$, păstrează, evident, birapoartele a 4 numere, de unde enunţul:

Biraportul a 4 puncte M de pe dreapta reperată prin trei puncte A, B, C, egal cu raportul celor 4 valori de abscise x, este egal cu biraportul numerelor λ corespunzătoare.

BIRAPOARTE PARTICULARE. Dacă A, B, C sînt distincte și M este caracterizat prin $\lambda, \lambda = +1$ exprimă că M este în C, $\lambda = 0$ exprimă că M este în B, iar pentru a exprima că M este în A trebuie să considerăm $\lambda = \infty$, fără a deosebi $+\infty$ de $-\infty$. Prin urmare, în felul acesta, așa cum am adăugat dreptei reale punctul ei de la infinit, completăm și mulțimea numerelor λ cu numărul infinit.

Dar cărui număr îi corespunde punctul de la infinit al dreptei? Să facem abscisa x a lui M să tindă către infinit; așa cum rezultă din calculul făcut, λ tinde către

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

Altfel spus, trebuie să considerăm că M la infinit corespunde la

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = +1,$$

că

$$\frac{a-\infty}{b-\infty} = +1,$$

și că

$$(a, b; c, \infty) = \frac{a-c}{b-c}.$$

REMARCĂ. Toate acestea rezultă, fără trecere la limită, din perspectiva a 4 puncte coliniare $A'B'C'M'$ făcută dintr-un punct de vedere S, pe o dreaptă paralelă cu SM'. Trasînd prin C' paralela la SM', evaluăm ca mai sus

$$\lambda = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{MA}} : \frac{\overline{C'B'}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

În concluzie, există o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor reale completată cu ∞ (mulțimea valorilor lui λ) și dreapta proiectivă (parcursă de M).

RELAȚII ÎNTRE BIRAPOARTELE A 4 PUNCTE COLINIARE $ABCD$. Să caracterizăm fiecare punct M de pe dreaptă prin $\lambda_M = (A, B; C, M)$ și să considerăm un punct D definit prin $\lambda_D = \delta$. Știm că $\lambda_A = \infty$, $\lambda_B = 0$, $\lambda_C = 1$. Prin urmare, dacă schimbăm ordinea punctelor A, B, C, D, nu găsim decît 6 valori de bira-

poarte, în funcţie de rolurile lui 0,1 şi δ, fiindcă ∞ dă raporte care au valoarea 1. Obţinem astfel

$$\lambda_1 = \frac{\delta - 0}{1 - 0} = \delta, \qquad \lambda_2 = \frac{1 - 0}{\delta - 0} = \frac{1}{\delta}, \qquad \lambda_3 = \frac{\delta - 1}{0 - 1} = 1 - \delta,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1 - \delta}, \qquad \lambda_5 = \frac{1 - \delta}{0 - \delta} = \frac{\delta - 1}{\delta}, \qquad \lambda_6 = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Aceste numere se reduc la 3 dacă ele au valorile $-1, 2, 1/2$. Vom studia, ceva mai departe, acest caz particular numit *caz de armonicitate*.

b) BIRAPORTUL UNUI FASCICUL DE 4 DREPTE. Numim *fascicul de drepte* o mulţime de drepte dintr-un plan care trec printr-un acelaşi punct, numit *vîrful* (sau centrul) fasciculului. O mulţime de drepte paralele în planul geometriei proiective este, din punct de vedere proiectiv, un fascicul al cărui vîrf este un punct la infinit.

Invarianţa la orice perspectivă a biraportului a 4 puncte coliniare exprimă că, *pe orice secantă a unui fascicul de 4 drepte luate într-o ordine determinată, biraportul punctelor de intersecţie este independent de secantă*; el este un număr ataşat fasciculului. El se numeşte *biraportul fasciculului*. Dacă, în particular, acest număr are valoarea -1, fasciculul se numeşte *armonic*.

RECIPROC, *dacă două drepte secante într-un punct A, determină diviziuni de acelaşi biraport $(A, B; C, M) = (A, b; c, m)$, dreptele Bb, Cc, Mm care trec prin perechile de puncte omoloage sînt concurente*. Într-adevăr, în perspectiva care transformă B în b şi C în c, M corespunde lui m, fiindcă biraportul determină al patrulea punct al diviziunii. Prin urmare, dacă considerăm pe M drept punct generic al primei drepte, m o descrie pe cealaltă şi Mm *trece printr-un punct fix*.

c) BIRAPORTUL UNUI FASCICUL DE 4 PLANE. În geometria cu 3 dimensiuni, se numeşte fascicul de plane o mulţime de plane care au o dreaptă comună. *Fiind dat un fascicul de 4 plane luate într-o ordine determinată, biraportul diviziunilor determinate pe orice secantă este independent de acea secantă*: într-adevăr, comparăm diviziunile purtate de două secante nesituate într-un acelaşi plan cu ajutorul unei secante auxiliare care uneşte un punct al uneia cu un punct al celeilalte, şi folosim tranzitivitatea relaţiei de

egalitate. Acest biraport este deci un număr atașat fasciculului; el se numește *biraportul fasciculului*.

REMARCĂ. *În planul afin, biraportul unui fascicul de 4 drepte este egal cu biraportul celor 4 coeficienți unghiulari ai acelor drepte.* (Se va secționa cu dreapta $x = 1$.)

III. Reperarea unui punct în geometria proiectivă

Vom determina acum un sistem de reperare a unui punct M situat într-un plan, în așa fel încît coordonatele introduse să fie invariante la perspectivă. Pentru aceasta este suficient să nu introducem altceva decît birapoarte.

Fie că am ales în plan 4 puncte A, B, C, D care nu sînt trei cîte trei coliniare, și să atribuim lui D un rol special. Să numim D_a, D_b, D_c punctele în care AD, BD, CD taie laturile lui ABC, și în mod analog M_a, M_b, M_c pe cele în care AM, BM, CM taie aceste laturi. Introducem

$$\alpha = (B, C; D_a, M_a),\ \beta = (C, A; D_b, M_b) \text{ și } \gamma = (A, B; D_c, M_c).$$

Este clar că două din aceste numere determină punctul M, prin urmare între aceste trei numere există o relație. Pentru a o obține, să folosim o secantă, de exemplu CM, care taie pe AD în A' și pe BD în B'.

$$\alpha = (B, C; D_a, M_a) = (M_c, C; A', M);$$

în mod analog

$$\beta = (C, M_c; B', M)$$

dar, prin perspectiva de punct de vedere D,

$$\gamma = (A, B; D_c, M_c) = (A', B'; C, M_c).$$

Explicitînd aceste birapoarte, obținem $\alpha\beta\gamma = 1$.

Vedem că D corespunde la $\alpha = \beta = \gamma = 1$ și poate fi considerat drept *punct unitar*, iar α, β, γ formează un *sistem de coordonate proiective*.

În spațiu, introducem în mod analog, 4 numere al căror produs este egal cu unitatea, cu ajutorul a 4 puncte care formează un tetraedru adevărat și al unui al 5-lea punct care servește drept punct unitar.

LEGĂTURA CU GEOMETRIA AFINĂ. Dacă am introdus, într-un plan, coordonatele x, y ale geometriei afine și dacă vrem să facem un studiu de geometrie proiectivă în acel plan, vom lua ca repere

$\{ABCD\}$: punctul A în originea O a coordonatelor, punctul B la infinit pe Ox, punctul C la infinit pe Oy, şi punctul unitar D în punctul de coordonate $x = 1$, $y = 1$. Un punct oarecare M de coordonate x, y are atunci asociată mulţimea de trei numere α, β, γ definite aşa cum am spus. Găsim în acest caz

$$\alpha = \frac{x}{y}, \quad \beta = y, \quad \gamma = \frac{1}{x}.$$

Prin urmare, dacă introducem trei numere X, Y, T definite pînă la un factor multiplicativ prin

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{T}{1},$$

obţinem

$$\alpha = \frac{X}{Y}, \quad \beta = \frac{Y}{T}, \quad \gamma = \frac{T}{X}.$$

X, Y, T care sînt proporţionale cu $x, y, 1$ şi care, prin rapoartele lor mutuale determină coordonatele proiective α, β, γ, se numesc *coordonatele omogene* ale lui M. Ele permit să se facă geometrie proiectivă în planul afin.

Un punct este atunci definit prin $\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{T}{c}$.

Ecuaţia $ux + vy + w = 0$ a unei drepte devine $uX + vY + wT = 0$ şi dreapta de la infinit are ca ecuaţie $T = 0$. Punctul de la infinit în direcţia $y/x = m$ va fi definit, de exemplu, prin

$$X = 1, \; Y = m, \; T = 0,$$

sau prin

$$X = k, \; Y = km, \; T = 0,$$

unde numărul k este arbitrar.

De exemplu, două drepte paralele $ax + by = c$, $ax + by = c'$ se intersectează în punctul definit de

$$\begin{cases} aX + bY = cT \\ aX + bY = c'T, \end{cases}$$

sistem omogen echivalent cu

$$X = bk, \; Y = -ak, \; T = 0.$$

În spațiu, introducem în mod analog

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{T}{1}.$$

Interpretare. Geometria proiectivă plană (g) poate fi considerată drept imaginea unei geometrii în spațiu (G) în care elementele sînt dreptele D $(X/a = Y/b = T/c)$ duse printr-un punct origine, și planele P $(uX + vY + wT = 0)$ duse prin același punct. Fiecare dreaptă D are asociat un punct din (g), și fiecare plan P — o dreaptă din (g). În (G), fără nici o excepție, două drepte D distincte determină un plan P, și două plane P se intersectează după o dreaptă D.

În mod analog, geometria proiectivă (g) cu n dimensiuni corespunde unei geometrii (G) a unui spațiu cu $n + 1$ dimensiuni.

IV. Transformările proiective plane

Putem defini transformarea proiectivă cea mai generală a planului pe el însuși (*transformarea omografică plană*) prin egalitatea coordonatelor proiective ale punctelor omoloage M și M', definite fiecare în raport cu repere arbitrare $\{A, B, C, D\}$ și $\{A', B', C', D'\}$. Este un produs de perspective de plane pe plane făcute în spațiul cu 3 dimensiuni care conține planul dat (de exemplu, notînd $K = AB \cap CD$ și $K' = A'B' \cap C'D'$, vom aduce mai întîi pe A peste A', apoi pe D și K peste D' și K', și în fine, pe B și C peste B' și C').

Transformarea păstrează deci coliniaritățile și birapoartele punctelor coliniare.

Invers, orice transformare a planului pe el însuși care respectă coliniaritățile și birapoartele punctelor coliniare este o transformare omografică, complet definită prin 4 perechi de puncte omoloage care nu sînt trei cîte trei coliniare.

EXEMPLU: **Omologia.** *Este transmutata prin perspectivă pe un plan, a unei omotetii definite într-un plan afin P'.*

În P', plecînd de la două perechi A', a' și B', b', $A'B'$ și $a'b'$ fiind paralele, o omotetie este definită prin

$$\forall m',\ A'M' \parallel a'm' \text{ și } B'M' \parallel b'm'.$$

Aceasta înseamnă că orice punct al dreptei de la infinit rămîne invariant.

După perspectivă, A, a și B, b sînt perechi oarecare și *orice punct al unei drepte* Δ *rămîne invariant.*

Să luăm două puncte C și D pe Δ. În raport cu baza A, B, C, D, punctul generic M al planului este definit prin coordonatele sale proiective α, β, γ, iar imaginea sa m este definită, plecînd de la a, b, C, D, prin aceleași numere (fiindcă pentru a evalua α și β putem folosi secanta Δ). Transformarea este deci realmente o omografie.

Deoarece în omotetie dreapta care unește un punct cu imaginea lui trece printr-un punct invariant S', la fel se întîmplă și în omologie. Acest punct se numește *centru de omologie*, iar Δ — *axă de omologie.*

Rezultă de aici că *omologia este complet definită de centrul ei* S, *axa ei* Δ, *și o pereche* A, a, *unde dreapta* Aa *trece prin* S. Într-adevăr, imaginea m a punctului generic M este caracterizată prin condițiile: m este pe SM și dreptele AM și am se intersectează pe Δ.

De unde reciproca: *O transformare punctuală care respectă coliniaritățile și lasă invariante punctele unei drepte* Δ *și un punct* S *nesituat pe* Δ *este o omologie.*

OMOLOGIE SINGULARĂ. Dacă transformăm prin perspectivă nu o omotetie veritabilă, ci o translație, obținem o transformare anaoagă celei precedente; orice dreaptă Mm care unește un punct cu imaginea lui trece printr-un punct fix S situat pe Δ. Transformarea este în continuare determinată dînd pe Δ, pe S, și o pereche A, a.

OMOLOGIE RECIPROCĂ. Orice omologie poate fi definită ca transmutata prin perspectivă a unei afinități, centrul S fiind imaginea punctului de la infinit de pe $A'a'$. Dar există afinități reciproce: simetriile. Atunci Δ' trece prin mijlocul α' al lui $A'a'$; altfel spus, avem

$$(S, \alpha;\ A, a) = -1.$$

Mai mult, oricare ar fi M, nu numai AM și am se intersectează pe Δ, dar la fel se întîmplă și cu Am și aM. Găsim astfel o figură foarte importantă pe care o vom studia acum în mod special.

V. Diviziune armonică. Fascicule armonice

a) Spunem că patru puncte A, B, C, D *coliniare formează o diviziune armonică dacă biraportul* $(A, B; C, D)$ *este egal cu* -1. Am văzut că așa se întîmplă în cazul în care cele 6 birapoarte se reduc la 3 care sînt $-1, 2$ și $1/2$.

Conform definiției, $(A, B; C, D) = -1$ se mai poate scrie

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \tag{1}$$

sau

$$\overline{CA} \cdot \overline{DB} + \overline{CB} \cdot \overline{DA} = 0. \tag{2}$$

Din simetriile acestei relații rezultă că cele două perechi A, B și C, D joacă același rol, și tot așa și cele două puncte ale fiecărei perechi. Despre punctele unei perechi spunem că sînt *conjugate* în raport cu cealaltă pereche. Aceste simetrii apar pregnant dacă revenim la abscisele a, b, c, d ale celor 4 puncte; (2) dă atunci

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd). \tag{3}$$

Remarcă. Dacă originea absciselor este A, formula dă

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \tag{4}$$

Dacă originea este mijlocul M al lui AB, ea dă

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}. \tag{5}$$

Aceste formule sînt deseori utile în aplicații.

Armonicitatea se caracterizează prin faptul că biraportul este propriul său invers, de exemplu

$$(A, B; C, D) = (A, B; D, C),$$

fiindcă dacă punctele sînt distincte, biraportul nu poate avea valoarea $+1$, ci exclusiv -1.

Un fascicul de 4 drepte (numite *raze*) *se numește armonic dacă biraportul lui are valoarea* -1, adică dacă determină pe orice secantă o diviziune armonică. *Razele conjugate* poartă punctele unei aceleiași perechi, adică puncte conjugate.

Să folosim o secantă paralelă cu una din raze; enunțăm: *În planul afin, un fascicul armonic se caracterizează prin faptul că două raze conjugate sînt simetrice în raport cu o a treia rază, paralel cu raza a patra.*

Aceasta ne permite să construim un fascicul armonic dacă cunoaștem o pereche și una din razele celei de a doua perechi: trasăm o paralelă cu una din razele cunoscute; punctul conjugat al punctului de la infinit este mijlocul segmentului format de celelalte două puncte.

În locul acestei construcții afine, vom prefera o construcție de geometrie proiectivă: Biraportul trebuie să fie propriul său invers. Prin urmare, dacă două secante se intersectează în A pe una din raze, determinînd

$$(A, M; B, C) = (A, M'; B', C'),$$

condiția necesară și suficientă de armonicitate — deoarece punctele distincte exclud posibilitatea unui biraport egal cu $+1$ — este

$$(A, M; B, C) = (A, M'; C', B').$$

Aceasta înseamnă (pe baza § II *b*, reciproca), că MM', BC' și CB' sînt concurente într-un punct T. Dreapta MM' este deci dreapta care unește vîrful fasciculului cu acest punct T. De unde construcția: *Fiind dată perechea de raze Sb, Sc și raza Sa, raza conjungată Sm a lui Sa se obține cu ajutorul a două secante ABC, AB'C' duse printr-un punct A al lui Sa; ea trece prin punctul în care se intersectează BC' și CB'.*

b) **Definiție.** Fiind dată o pereche de drepte d_1, d_2 și un punct A, numim *polara lui A în raport cu perechea de drepte* locul punctelor M conjugate cu A în raport cu segmentul N_1N_2 tăiat pe orice secantă care trece prin A. Pe fiecare secantă, M este unic: este punctul situat pe raza δ, conjugata armonică a lui SA în raport cu d_1 și d_2; această rază δ este deci locul căutat.

DISCUȚIE. Dacă vîrful fasciculului este un punct S (nesituat la infinit), punctul S de pe δ nu poate fi considerat ca făcînd parte din loc decît dacă *acceptăm să considerăm drept diviziune armonică o mulțime de 4 puncte din care trei sînt confundate.* Această convenție de limbaj este deseori utilă pentru considerații de continuitate. (Biraportul nu mai este definit, există nedeterminare. Îi vom putea atribui valoarea -1.)

POZIȚII PARTICULARE ALE LUI A. Acestea sînt, evident, punctele lui d_1, cele ale lui d_2, punctul S — dacă el există, și punctele de la infinit ale planului.

1. Vedem mai întîi că acest din urmă caz nu are nimic excepțional; dacă A este la infinit într-o direcție σ, secantele sînt paralele cu σ, ca și SA, și concluzia rămîne valabilă.

2. Dacă A este pe d_1, dar nu în S, orice secantă s diferită de d_1 poartă un N_1 confundat cu A și un N_2 distinct: trebuie deci să considerăm că M este în A, conform convenției precedente. Dar dacă s este confundată cu d_1, punctul N_2 este în S și punctul N_1 este nedeterminat pe d_1. Sîntem deci într-un caz singular. Vom spune, prin extensie, că polara lui A este d_1: *un fascicul cu trei drepte confundate poate fi considerat drept un fascicul armonic*, și enunțul general devine din nou aplicabil.

3. Dacă, în fine, A este în S, atunci pe orice dreaptă s, N_1 și N_2 se confundă cu A, prin urmare M este nedeterminat în mod absolut: nu mai există polară, dacă nu vrem să considerăm că polara este întregul plan.

Concluzie. *În plan, polara unui punct A în raport cu o pereche de drepte — dacă A nu este vîrful fasciculului definit de aceste drepte — este raza conjugată armonic în raport cu perechea de drepte, a razei care trece prin A.*

Invers, A se numește *polul* lui δ. Este clar că orice punct de pe SA, cu excepția lui S, este pol al lui δ. Prin urmare, corespondența între pol și polara în raport cu o pereche de drepte este departe de a fi biunivocă!

Spunem că două puncte sînt *conjugate în raport cu perechea de drepte* dacă unul din ele este pe polara celuilalt: *această relație este reciprocă.*

Aceste denumiri, destul de puțin utile în cazul de față, corespund unor noțiuni esențiale atunci cînd perechea de drepte este înlocuită cu o curbă tăiată în două puncte de dreptele s: este cazul conicelor. Vom studia problema pentru cerc în geometrie metrică, și de acolo vom deduce, prin perspectivă, teoria referitoare la conice.

EXEMPLU DE APLICAȚIE: enunț referitor la *patrulaterul complet.*

Un patrulater complet este figura formată de 4 drepte care nu sînt trei cîte trei concurente. Figura prezintă 6 vîrfuri (din care unul sau două pot fi la infinit, sau chiar 3 — dacă una din drepte este la infinit). Există trei diagonale, drepte care unesc două

vîrfuri nesituate pe aceeaşi dreaptă; aceste diagonale formează un triunghi, numit triunghi diagonal, ale cărui laturi poartă fiecare cîte două vîrfuri ale patrulaterului.

Aşa cum rezultă din construcţia proiectivă a polarei, cele două vîrfuri situate pe o diagonală sînt conjugate în raport cu celelalte două diagonale. Aceasta înseamnă că, pe fiecare diagonală, cele două vîrfuri pe care le poartă aceasta şi punctele de intersecţie cu celelalte două diagonale formează o diviziune armonică. Luînd cuvîntul „diagonală" în sensul „segment limitat de vîrfuri", enunţul este dat, în general, sub forma: *într-un patrulater complet, fiecare diagonală este tăiată armonic de celelalte două.*

Acest enunţ poate fi dedus din teorema de geometrie afină: „diagonalele unui paralelogram se taie în mijlocul lor", fiindcă orice patrulater complet poate fi dedus, prin perspectivă, dintr-un paralelogram. Vom vedea că enunţul general conţine şi teorema despre dreptele care unesc mijloacele a două laturi ale unui triunghi.

c) **Două enunţuri de geometrie metrică.** Să plasăm aici, deşi contravine planului nostru general, două enunţuri care completează, în geometrie metrică, expunerea precedentă.

1) UN FASCICUL ARMONIC PARTICULAR. Am caracterizat armonicitatea unui fascicul prin condiţia că două raze conjugate sînt simetrice în raport cu o rază a celeilalte perechi, simetria fiind făcută meparalel cu cea de a doua rază a acestei a doua perechi. A spune că această simetrie este ortogonală înseamnă a subînţelege că razele perechii a doua sînt rectangulare. Prin urmare, *o pereche de drepte şi bisectoarele ei formează un fascicul armonic,* şi reciproc, *dacă într-un fascicul armonic două raze conjugate sînt perpendiculare una pe alta, aceste raze sînt bisectoarele celeilalte perechi.*

2) EXPRESIA BIRAPORTULUI UNUI FASCICUL, CU AJUTORUL UNGHIURILOR FORMATE. În geometrie metrică, două fascicule sînt egale dacă razele formează unghiuri egale pînă la $k\pi$, în planul orientat. Biraportul

$$\lambda = (d_1, d_2; \delta_1, \delta_2)$$

poate fi evaluat în funcţie de sinusurile unghiurilor. Formula care dă, în orice triunghi, rapoartele laturilor în funcţie de rapoartele valorilor absolute ale sinusurilor unghiurilor opuse furnizează

imediat, tăind fasciculul cu o secantă, următoarea relație în valoare absolută

$$\lambda = \frac{\sin\,(d_1,\,\delta_1)}{\sin\,(d_2,\,\delta_1)} : \frac{\sin\,(d_1,\,\delta_2)}{\sin\,(d_2,\,\delta_2)}.$$

Rămîne să verificăm relația ca semn: deoarece sensurile alese în plan și pe fiecare dreaptă nu intervin, verificarea este imediată, orientînd de exemplu fiecare dreaptă de la vîrf spre secantă. Evident, formula nu se aplică unui fascicul de paralele.

VI. Schiță de introducere axiomatică directă a geometriei proiective

În expunerea precedentă, am dedus geometria proiectivă din geometria afină. Calea inversă poate părea mai satisfăcătoare: ea prezintă afinul ca o particularizare a proiectivului, așa cum metrica va fi prezentată ca o particularizare a afinului prin îmbogățirea teoriei.

Pe baza celor precedente, este ușor de înțeles că se introduc ca axiome enunțurile următoare, fără nici o excepție:

Axiome de incidență

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul.
Două plane neconfundate au în comun o dreaptă.
Două drepte distincte ale aceluiași plan au în comun un punct.

Odată formulate aceste propoziții, să plecăm de la figura din spațiul cu trei dimensiuni constituită dintr-un triedru de vîrf S tăiat de două plane P și P' în A, B, C; A', B', C'. Punctele $\alpha = BC \cap B'C'$, $\beta = CA \cap C'A'$, $\gamma = AB \cap A'B'$ sînt coliniare pe dreapta Δ de intersecție a planelor P și P'.

Printr-o perspectivă făcută dintr-un punct de vedere Σ pe un plan p, această figură în spațiu dă o figură plană pe care o numim *figura triunghiurilor omologice*, constituită din două triunghiuri abc, $a'b'c'$ care se corespund în așa fel încît dreptele care unesc vîrfurile omologice sînt concurente într-un punct s, iar laturile omologice se taie în trei puncte coliniare pe o dreaptă (δ).

Să demonstrăm acum teorema fundamentală:

1. Teorema triunghiurilor omologice (figura proiectivă a lui Désargues). *Fie, în planul p, trei perechi de puncte a, a'; b, b'; c, c'. Fie*

$$s = aa' \cap bb'$$

$$\alpha = bc \cap b'c',\ \beta = ca \cap c'a',\ \gamma = ab \cap a'b'.$$

Are loc echivalența

$$s \in cc' \Longleftrightarrow \gamma \in \alpha\beta.$$

Pentru a demonstra această echivalență, să arătăm că putem considera figura ca fiind o perspectivă a figurii în spațiu descrise mai sus. Vom lua planul P' confundat cu planul p al figurii, așa că A', B', C' sînt în a', b', c'. Luăm arbitrar un punct Σ în afara lui p și un punct S pe $s\Sigma$.

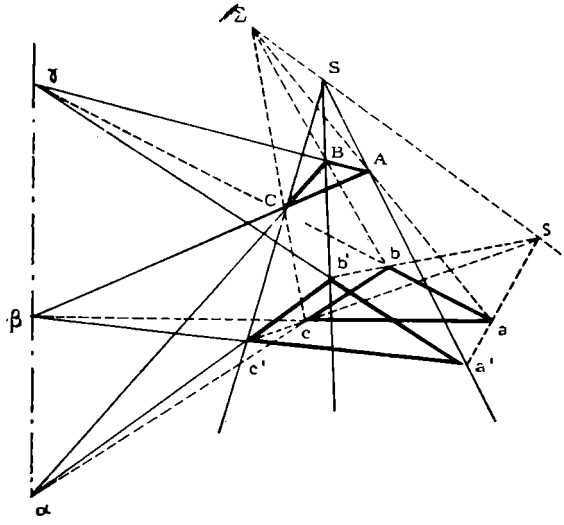
Aceasta definește $A = \Sigma a \cap Sa'$ și $B = \Sigma b \cap Sb'$, prin urmare

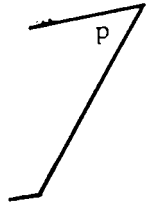
$$AB = (\text{plan } \Sigma ab) \cap (\text{plan } Sa'b')$$

deci $\gamma \in AB$.

1) IPOTEZA $s \in cc'$.

Definim C prin $C = \Sigma c \cap Sc'$. Atunci α, β, γ sînt coliniare pe urma planului ABC în planul p.





2) IPOTEZA α, β, γ coliniare.
Definim C ca fiind piciorul lui Sc' în planul $AB\alpha\beta\gamma$.
Atunci

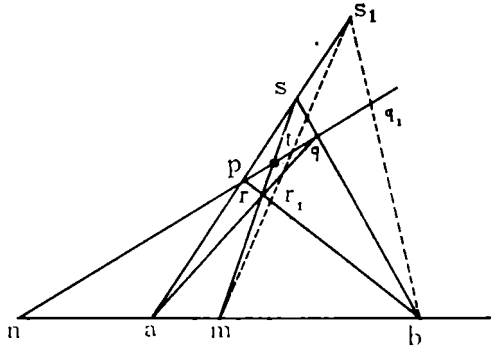
$$\alpha \in BC \text{ și } \beta \in AC$$

deci, prin perspectiva de punct de vedere Σ,

$$C = \alpha B \cap \beta A$$

dă

$$\alpha b \cap \beta a = c$$



și punctele coliniare S, C', C dau punctele coliniare s, c, c'.

OMOLOGIE ÎN PLAN. Fiind dată figura triunghiurilor omologice în planul p, să presupunem construită figura din spațiu cu ajutorul punctelor S și Σ. Fiecărui punct m din planul p îi corespunde, prin perspectiva Σ, un punct M din planul P, apoi, prin perspectiva S, un punct m' din p. Corespondența între m și m' poate fi definită, în planul p, prin coliniaritatea smm' și prin faptul că mm' taie aa' pe dreapta δ.

Numim această transformare *omologie*. Ea este definită prin centrul s, dreapta δ a punctelor invariante și o pereche a, a', dreapta aa' trecînd prin s.

De notat că punctul s poate fi pe δ, dar a și a' trebuie să nu fie situate pe δ și să fie distincte de s.

2. Armonicitate. Fie figura formată de patru drepte aps, arq, bqs, brp (patrulater complet). Diagonala ab este tăiată de diagonala sr în m, și de diagonala pq în n. Vom demonstra că, *a, b, m fiind date, n este determinat, independent de dreptele care formează patrulaterul.*

Fie deci date punctele a, b, m. Pe o dreaptă dusă prin a să luăm p și s. Coliniaritățile impuse determină pe r și q, deci pe n. Este suficient să arătăm că n rămîne fix dacă pe s îl facem să varieze pe ap; într-adevăr, vom putea apoi, în mod analog, să-l facem pe s să varieze pe sb, pe p pe as, obținînd în felul acesta poziții arbitrare pentru s și p.

Luăm deci s_1 pe as, păstrăm pe p, și considerăm

$$r_1 = bp \cap ms_1,\ q_1 = bs_1 \cap pq.$$

Trebuie demonstrat că a, r_1, q_1 sînt coliniare. Or, aceasta rezultă imediat din dispunerea triunghiurilor qrs și bms_1. Într-adevăr, bq, rm și ps_1 sînt concurente în s; deci

$$a = qr \cap bm,\ r_1 = rp \cap ms_1 \text{ și } q_1 = qp \cap bs_1$$

sînt coliniare.

În felul acesta, *fiecărei mulțimi de trei puncte a, b, m coliniare îi corespunde un al patrulea punct n numit conjungatul armonic al celui de al treilea punct în raport cu primele două*. Spunem că perechea a, b, și perechea m, n sînt în *relație armonică*.

Dacă notăm t punctul comun lui rs și pq (al treilea punct diagonal al patrulaterului complet), figura prezintă și celelalte diviziuni armonice p, q; n, t și r, s; t, m. Vedem că a, b; m, n este perspectiva la fel de bine a lui p, q; t, n (punct de vedere s) ca și a lui q, p; t, n (punct de vedere r).

Corolar. *În orice transformare punctuală plană care respectă coliniaritatea, dacă o dreaptă δ poartă trei puncte invariante, ea poartă o infinitate de asemenea puncte*: într-adevăr, de la trei din aceste puncte trecem la conjugatul armonic al unuia în raport cu celelalte două cu ajutorul unui patrulater complet, și transformarea respectă armonicitatea, conform teoremei precedente.

Fie atunci două perechi a, a' și b, b' de puncte omoloage astfel încît ab trece printr-unul din punctele invariante ale lui δ, și fie s intersecția lui aa' și bb'. Omologia definită de s, δ și perechea a, a' are în comun cu transformarea considerată orice pereche m, m' care este astfel încît ma și mb taie pe δ în puncte invariante. Transformarea are deci în comun cu omologia o infinitate de perechi, care formează — evident — o mulțime numărabilă. Dar nu putem afirma că cele două transformări au în comun *toate* perechile — fără *o axiomă suplimentară* care îngrădește transformările avute în vedere:

O transformare se numește *continuă* dacă orice limită de puncte m are ca imagine un punct limită al imaginilor m'. Ei bine, trebuie

să luăm ca axiomă afirmația că *transformarea în cauză este continuă*.

Obținem atunci enunțul următor:

Orice transformare punctuală plană continuă care păstrează coliniaritatea și astfel încît 3 puncte coliniare sînt invariante este o omologie.

În particular, *figura celor două triunghiuri omologice definește o singură transformare continuă care păstrează coliniaritatea, și aceasta este omologia.*

3. **Perspectiva în plan**. Într-o omologie, corespondența punctuală între punctele unei drepte x și ale imaginii ei x' este o perspectivă de punct de vedere s. Reciproc, orice perspectivă s; x, x' poate fi considerată drept o restricție la x a unei omologii a cărei axă δ este una oarecare din dreptele care trec prin intersecția lui x și x'.

Teoremă. *Fie patru puncte coliniare a', b', c', m' și trei puncte coliniare a, b, c. Imaginea m a lui m' într-un produs de perspective care transformă a', b', c' în a, b, c este bine determinată*, independentă de perspectivele considerate.

Într-adevăr, să considerăm perspectivele în cauză drept restricții de omologii, și fie (T_1) și (T_2) acele produse de omologii care dau pentru a', b', c', m' respectiv imaginile a, b, c, m_1 și a, b, c, m_2. Produsul inversei uneia din aceste transformări cu cealaltă dă pentru a, b, c, m_1 imaginea a, b, c, m_2. Or, acest produs păstrează coliniaritatea, și lasă invariante punctele a, b, c și deci, lasă invariant orice punct al dreptei; prin urmare m_1 și m_2 sînt confundate.

În felul acesta, pentru fiecare grup de 4 puncte coliniare, apare un *invariant la perspectivă* pe care îl vom nota $(a, b; c, m)$. Firește, ordinea punctelor intervine, dar pentru puncte în relație armonică, avem

$$(a, b; c, d) = (a, b; d, c).$$

Fiind date — pe două drepte x și x' — trei perechi asociate a, a'; b, b'; c, c', corespondența care respectă invariantul $(a, b; c, m)$ se numește *corespondență omografică*. De unde — enunțul particular:

Dacă două drepte x și x' poartă puncte în corespondență omografică și dacă punctul comun al dreptelor este propriul său omolog, corespondența este o perspectivă plană.

4. **Introducerea geometriei afine a planului.** Să atribuim un rol special unei drepte pe care o vom numi *dreapta de la infinit;* punctele ei vor fi numite *puncte la infinit*, iar două drepte care

trec printr-un asemenea punct vor fi numite *drepte paralele*. Două perechi de drepte paralele formează un *paralelogram*.

Figura triunghiurilor omologice, cînd centrul s este pe axa δ care este dreapta de la infinit, conduce la enunțul:

Dacă $abb'a'$ și $bcc'b'$ sînt paralelograme, atunci și $acc'a'$ este un paralelogram.

Deducem de aici o relație de echivalență: cea a vectorilor echipolenți, apoi noțiunile de *vector liber* (clasă de echivalență), de *sumă de vectori liberi*, și de *translație*.

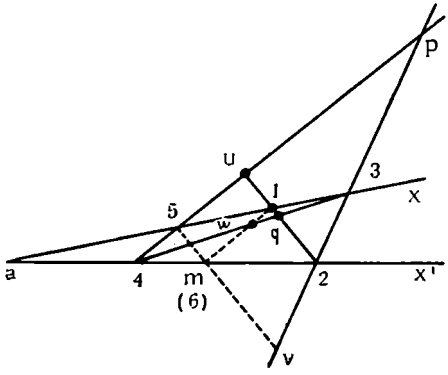
Dacă considerăm acum o omologie a cărei axă δ este dreapta de la infinit, fără ca centrul s să fie pe această dreaptă, obținem *omotetia* și *înmulțirea unui vector cu un număr* — dacă am gradat o dreaptă cu ajutorul translației.

În felul acesta se crează geometria afină a planului, și am văzut că ea conduce la aceea că invariantului perspectivei i se atașează un număr: biraportul a 4 puncte coliniare.

Exercițiu de geometrie proiectivă: Teorema lui Pascal. *Fie, pe două drepte x și x' de punct comun O, punctele* 1, 3, 5 *pe x și* 2, 4, 6 *pe x'. Să se demonstreze coliniaritatea punctelor:*

$$u = 12 \cap 45,\ v = 23 \cap 56,\ w = 34 \cap 61.$$

Să considerăm că punctele 1, 2, 3, 4, 5 sînt fixe, dar că al șaselea punct m de pe x' este mobil.



Pe dreapta 23, ν este perspectiva lui m (punct de vedere 5), iar pe 34, w este perspectiva lui m (punct de vedere 1). Or, să analizăm trei poziții particulare ale lui m:

m în O dă ν și w în 3

m în 4 dă ν în p și w în 4, cu $p \in 45$

m în 2 dă ν în 2 și w în q, cu $q \in 12$.

Prin urmare, 3, p, 2, ν și 3, 4, q, w sînt perspective ale lui 0, 4, 2, m, prin urmare sînt unul perspectiva celuilalt. Punctul de vedere este $p4 \cap 2q$, adică u. Prin urmare, oricare ar fi m pe x', punctele u, ν, w sînt coliniare.

REMARCĂ. Vom găsi o altă demonstrație revenind prin perspectiva la figura afină a lui Pascal (Cartea a IV-a, cap.1), analog modului în care o perspectivă poate transforma o figură proiectivă a lui Désargues (sau a triunghiurilor omologice) în figura afină a lui Désargues (sau a triunghiurilor omotetice).

PARTEA A II-A

GEOMETRII METRICE

CAPITOLUL 1

GEOMETRIE METRICĂ EUCLIDIANĂ

În Cartea I, cap. 5, am introdus geometria euclidiană metrică plecînd de la geometria afină. Vom studia acum această geometrie sub aspectul ei de geometrie analitică, dar mai ales sub aspectul ei sintetic.

§ 1. RELAŢII METRICE

I. Relaţii între lungimi

Teorema lui Chasles ne permite să comparăm segmente situate pe o aceeaşi dreaptă; *teorema lui Tales* — segmente paralele. Introducerea metricii permite, odată aleasă unitatea de lungime, să calculăm distanţa între două puncte definite prin coordonatele lor, cu ajutorul *teoremei lui Pitagora*. Baza va fi presupusă aici totdeauna ortonormală: vectori unitari perpendiculari. Am văzut că această distanţă este independentă de bază.

Astfel, fiind aleasă o unitate de lungime, formulele fundamentale ale întregului calcul sînt de forma

$$a = b + c, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Aceste formule se păstrează la schimbarea unităţii de lungime, fiindcă o asemenea schimbare are ca efect înmulţirea cu un acelaşi

număr a tuturor literelor care figurează în formule. Dispariția acestui factor multiplicativ se traduce spunînd că egalitățile scrise sînt *omogene*, sau, că *cei doi membri ai fiecăreia din ele sînt expresii omogene de același grad de omogenitate.*

Vom conveni ca, în cele ce urmează, să păstrăm acest caracter la toate relațiile pe care le vom deduce din cele precedente: va trebui deci să *nu* alegem o unitate de lungime particulară, cum ar fi distanța între două puncte oarecare ale figurii considerate și, în plus, să eliminăm din considerație relații de tipul

$$a + b^2 = c + d + e^2 + f^2$$

pe care le-am putea deduce din

$$a = c + d \quad \text{și} \quad b^2 = e^2 + f^2,$$

relații acceptabile fiecare în parte.

1) CONSTRUCȚII. Prin transport de distanțe, trasare de paralele și construire de unghiuri drepte, știm să construim

suma a două lungimi:

$$x = a + b;$$

a patra proporțională între 3 *lungimi*

$$x = ac/b$$

rădăcina pătrată a sumei pătratelor a două lungimi

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sau a *diferenței lor*

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

2) Fie un segment AB. Putem lua pe dreapta AB un vector unitar $\mathbf{u}$ și putem nota $\mathbf{AB} = a\mathbf{u}$, după care putem determina orice alt punct M cu ajutorul unuia din vectorii $\mathbf{v}$ unitari perpendiculari pe $\mathbf{u}$ în planul ABM.

Notînd

$$\mathbf{AM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

deducem

$$\mathbf{BM} = (x - a)\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

deci

$$\begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 \\ BM^2 = (x - a)^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow BM^2 = AM^2 + a^2 - 2ax.$$

Să schimbăm notaţiile: Fie un triunghi ABC şi H piciorul înălţimii coborîte din A. Relaţia se scrie

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BH}. \qquad (I)$$

(*Relaţia fundamentală a triunghiurilor oarecare*)

CAZ PARTICULAR: TRIUNGHI DREPTUNGHIC în A.

Teorema lui Pitagora dă

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \qquad (I')$$

de unde

$$AB^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \qquad (II)$$

Această relaţie (II) caracterizează triunghiul dreptunghic, fiindcă (I') rezultă din (I) şi (II).

Cînd studiul circumferinţei ne va permite să construim un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza şi unul din segmentele determinate de înălţime pe ipotenuză, această formulă (II) va arăta că *ştim să construim media geometrică x a două lungimi*: $x = \sqrt{ab}$.

REMARCĂ. Formula (I) arată că, dacă $\overline{AB} = a$ şi $\overline{AH} = x$ sînt cunoscute, locul punctelor astfel încît

$$BM^2 - AM^2 = a^2 - 2ax$$

este planul perpendicular pe $\overline{AB}$ în H. Invers, cunoaşterea diferenţei pătratelor distanţelor lui M pînă la două puncte date A şi B determină pe x, deci determină punctul H, proiecţia ortogonală a lui M pe $\overline{AB}$.

3) Fie acum trei puncte coliniare A, B, C, şi M un punct oarecare care se proiectează în H pe ABC. Cele două formule (I) aplicate lui $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ dau

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AH}$$

Eliminînd pe $\overline{AH}$ şi folosind teorema lui Chasles în aşa fel încît punctele A, B, C să apară în mod simetric, obţinem

$$AM^2 \cdot \overline{BC} + BM^2 \cdot \overline{CA} + CM^2 \cdot \overline{AB} - \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0 \quad (S)$$

(*Formula lui Stewart.*)

Vom vedea, ca pentru (I), că formula aceasta este singura care face să intervină lungimile considerate, fiindcă oricare alta este în mod necesar echivalentă cu ea.

Să transformăm această relaţie: deseori, punctul C de pe $\overline{AB}$ este determinat, din punct de vedere afin, prin raportul

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = q,$$

adică

$$\frac{\overline{CB}}{q} = \frac{\overline{CA}}{1} = \frac{\overline{AB}}{q-1}, \quad q \neq 1,$$

sau, pentru ca A şi B să joace roluri analoage:

$$\frac{\overline{CB}}{\alpha} = \frac{\overline{CA}}{-\beta} = \frac{\overline{AB}}{\alpha+\beta}, \quad \alpha + \beta \neq 0. \qquad (1)$$

Formula lui Stewart devine atunci

$$\alpha AM^2 + \beta BM^2 - (\alpha+\beta)CM^2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} AB^2 = 0 \qquad (S')$$

Deoarece, dacă perechea de puncte A, B şi numerele α, β cu $\alpha + \beta \neq 0$ sînt date, din ele putem deduce un punct C care satisface (1), formula (S') arată că locul punctelor M astfel încît

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = p,$$

cu p dat, este o sferă sau nu există, după cum (S') dă sau nu dă o valoare pentru $\overline{CM}$.

Cititorul va examina, în mod special, următoarele două cazuri particulare:

1) $p = 0, \quad \alpha/\beta = -k^2$

2) $\alpha = \beta.$

GENERALIZARE. Fiind date n puncte afectate de n coeficienţi, o expresie de tipul

$$\sum = \alpha_1(MA_1)^2 + \alpha_2(MA_2)^2 + \ldots + \alpha_n(MA_n)^2$$

poate fi pusă sub forma

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MK^2 + \varepsilon d^2,$$

unde K este un punct determinat, cu condiţia ca suma coeficienţilor să nu fie nulă; d este aici o lungime care se determină din aproape în aproape, iar ε reprezintă $+1$ sau -1. Locul punctelor M astfel încît Σ este dat, este deci — dacă există — o sferă sau, în mod excepţional, un plan.

Adăugăm că aceste formule nu se pretează prea bine la calcule şi că, de aceea, sînt înlocuite, în mod avantajos, cu formule de trigonometrie sau de geometrie analitică.

II. Geometrie analitică metrică plană

Să considerăm, în plan, o origine O şi o bază ortonormală $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$; prin definiţie, $\mathbf{j}$ este vectorul unitar direct perpendicular pe $\mathbf{i}$.

O dreaptă este definită printr-un punct A

$$\mathbf{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$$

şi un vector unitar $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha,$$

ca loc al punctelor M astfel încît

$$\mathbf{AM} = m\mathbf{u},$$

unde m parcurge mulţimea numerelor reale. Prin urmare

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x_0 + m\cos\alpha)\mathbf{i} + (y_0 + m\sin\alpha)\mathbf{j}.$$

Ecuaţia dreptei se obţine eliminînd m între cele două egalităţi

$$\begin{cases} x = x_0 + m\cos\alpha \\ y = y_0 + m\sin\alpha \end{cases}$$

şi este deci

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha.$$

Invers, fiind dați $\varphi \pmod{2\pi}$ și p, ecuația

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \tag{1}$$

reprezintă dreapta definită de

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

și, de exemplu, de punctul

$$x_0 = 0, \; y_0 = \frac{p}{\sin \varphi}.$$

Ecuația (1) se numește *ecuația normală a dreptei*. Ea este unică pînă la aceea că putem schimba φ în $\varphi + (2k + 1)\pi$ schimbînd semnul lui p.

SEMNIFICAȚIA GEOMETRICĂ A LUI p. Unul din vectorii unitari perpendiculari pe dreapta orientată de

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$$

este

$$\mathbf{w} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$$

Obținem de aici

$$\begin{cases} \mathbf{i} = -\mathbf{u} \sin \varphi + \mathbf{w} \cos \varphi \\ \mathbf{j} = \quad \mathbf{u} \cos \varphi + \mathbf{w} \sin \varphi, \end{cases}$$

deci

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)\,\mathbf{u} + (x \cos \varphi + y \sin \varphi)\mathbf{w}.$$

În felul acesta,

$$p = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

este măsura distanței $\overline{OH}$ de la O la dreaptă (distanță orientată de $\mathbf{w}$).

În plus,

$$\overline{HM} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

distanță orientată de $\mathbf{u}$.

Recunoaștem produsul scalar

$$\overline{OH} = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \mathbf{OM} \times \mathbf{w}$$

şi măsura produsului vectorial

$$\overline{HM} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \overline{\mathbf{w} \wedge \mathbf{OM}}.$$

Aşadar, în ecuaţia normală a dreptei, membrul al doilea p este măsura distanţei $\overline{OH}$ orientate de $\mathbf{w}$.

Se verifică imediat, printr-o translaţie a axelor, că *distanţa de la un punct* (x_1, y_1) *pînă la dreapta de ecuaţie normală*

$$D(x, y) \equiv x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

este

$$D(x_1, y_1) = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p,$$

această distanţă fiind măsura vectorului $\mathbf{M_1H_1}$ *orientat de* $\mathbf{w}$.

Această formulă completează pe cea care dă distanţa între două puncte

$$(M_1M_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

(Formula lui Pitagora.)

III. Relaţii metrice care introduc funcţii trigonometrice

Sistemele fundamentale caracterizează cele 6 elemente ale unui triunghi, laturile şi unghiurile. Figurile oarecare vor fi studiate prin triangulaţie.

Triunghiul dreptunghic. Unghiul A fiind presupus drept, a, b, c fiind măsurile laturilor, iar B şi C cele ale unghiurilor ascuţite, *un sistem necesar şi suficient pentru existenţa* unui triunghi dreptunghic, cu aceste elemente, este

$$(\mathrm{Tr}) \quad \begin{cases} B + C = \dfrac{\pi}{2}, \ b = a \sin B, \ c = a \cos B \\ a > 0, \quad 0 < B < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Într-adevăr, inegalităţile asigură existenţa unui triunghi dreptunghic construit cu ajutorul lui a şi B. Celelalte elemente au atunci, într-adevăr, valorile C, b, c, pe baza relaţiilor scrise care sînt valabile pentru orice triunghi dreptunghic.

Triunghi oarecare. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca a, b, c, A, B, C să fie elementele unui triunghi este exprimată de sistemul

$$(T)\quad \begin{cases} A+B+C=\pi, \quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C} \\ a>0, \quad B>0, \quad C>0, \quad B+C<\pi. \end{cases}$$

Într-adevăr, inegalităţile exprimă posibilitatea de a construi un triunghi cu a, B, C. Celelalte elemente ale acestui triunghi sînt, într-adevăr, A, b, c, fiindcă egalităţile scrise sînt adevărate în orice triunghi. Prima rezultă din teoria paralelelor, celelalte două din teorema unghiurilor înscrise sub forma ei elementară (dacă A' este mijlocul lui $\overline{BC}$, şi O centrul cercului circumscris, $BOA' = COA'$ are valoarea A sau $\pi - A$, după cum A este ascuţit sau obtuz, aşa că $a = 2R \sin A$, R fiind raza cercului circumscris. Relaţii analoage pentru celelalte laturi).

REMARCĂ. Ţinînd seama de prima ecuaţie şi de simetria sistemului, inegalităţile exprimă condiţiile:

O latură (la alegere) pozitivă şi cele trei unghiuri pozitive.

ALT SISTEM CARE ASIGURĂ EXISTENŢA UNUI TRIUNGHI. Din relaţia fundamentală a triunghiurilor oarecare

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BH}$$

rezultă imediat relaţia

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Pentru a forma un sistem (T') care asigură existenţa unui triunghi construit cu b, c, A, cele trei relaţii de acest tip trebuie completate cu

$$b>0, \quad c>0, \quad 0<A<\pi,$$

sau, pentru a asigura că elementele construite sînt realmente a, B, C, cu

$$a>0, \ 0<B<\pi, \ 0<C<\pi.$$

În concluzie, sistemul (T') cuprinde inegalităţile care exprimă că cele trei măsuri ale laturilor sînt pozitive, iar cele trei măsuri ale unghiurilor — cuprinse între 0 şi π.

(De remarcat că chiar dacă nu este scrisă decît una singură din egalităţile sistemului considerat, ea asigură condiţia ca o latură să fie cuprinsă între suma şi valoarea absolută a diferenţei celorlalte două.)

Sistemul format mai sus este foarte puţin practic, la fel de puţin practic ca şi relaţia în care intervin exclusiv lungimile; el nu este util decît pentru calcularea unghiurilor cînd se cunosc laturile. Sistemul de utilitate generală este (T).

EXEMPLU DE APLICAŢIE: PROBLEMA LUI STEWART. Într-un triunghi ABC, să se calculeze lungimea m a segmentului care uneşte A cu un punct M dat pe BC.

Dacă M este dat prin unul din unghiurile $\widehat{BAM}$ sau $\widehat{BMA}$, soluţia este dată imediat de formula

$$\frac{m}{\sin B} = \frac{c}{\sin \widehat{BMA}}. \tag{1}$$

Dacă M este dat prin lungimea $\overline{BM} = u$, vom calcula unghiul auxiliar $\widehat{BMA} = \theta$ care permite apoi să se obţină m cu ajutorul formulei precedente.

Dacă **BM** şi **BC** sînt de acelaşi sens, triunghiul BMA dă

$$\frac{c}{\sin \theta} = \frac{u}{\sin (\theta + B)}.$$

Această ecuaţie, omogenă în $\sin \theta$ şi $\cos \theta$, poate da pe $\operatorname{tg} \theta$, dar este mai bine să facem calculul scriind ecuaţia sub forma

$$\frac{c + u}{2 \sin \left(\frac{B}{2} + \theta\right) \cos \frac{B}{2}} = \frac{u - c}{2 \cos \left(\frac{B}{2} + \theta\right) \sin \frac{B}{2}},$$

de unde rezultă θ prin

$$\operatorname{tg} \left(\theta + \frac{B}{2}\right) = \frac{u + c}{u - c} \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \tag{2}$$

Dacă **BM** şi **BC** sînt de sensuri contrare,

$$\frac{c}{\sin \theta} = \frac{u}{\sin (B - \theta)}. \tag{2'}$$

Prin urmare, este suficient — în acest caz — să atribuim lui u semnul — şi să schimbăm semnul lui θ. Aceasta înseamnă că păstrăm formula (2). Dacă u este pozitiv, luăm θ cuprins între 0 şi π; dacă u este negativ, calculăm θ cuprins între $-\pi$ şi 0 şi adoptăm valoarea $-\theta$ pentru a calcula în continuare pe m din formula (1).

Folosind cele două formule (1) şi (2), calculele pot fi făcute uşor cu ajutorul logaritmilor; am folosit în felul acesta supleţea deosebită a formulelor trigonometrice.

Cînd este vorba de o figură ceva mai complicată, aproape niciodată nu trebuie folosite în calcule exclusiv relaţii între lungimi; calculele trebuie făcute, de la caz la caz, fie în geometrie analitică, fie în trigonometrie, introducînd unghiuri auxiliare bine alese.

§ 2. CERCURI. SFERE

I. Circumferinţă şi unghiuri

1. **Unghi înscris.** Amintim enunţul obţinut (Cartea I, cap.5): *Toate coardele paralele între ele au aceeaşi mediatoare, diametru al circumferinţei.* În răsturnarea în raport cu acest diametru, fiecare coardă este global invariantă.

a) LEMĂ. Fie o circumferinţă de centru O şi de rază R. *Dacă două coarde* M_1M_2 *şi* P_1P_2 *sînt paralele, avem*

$$(\mathbf{OM}_1, \mathbf{OP}_1) = -(\mathbf{OM}_2, \mathbf{OP}_2) \pmod{2\pi}.$$

Într-adevăr, $(\mathbf{OM}_1, \mathbf{OP}_1)$ şi $(\mathbf{OM}_2, \mathbf{OP}_2)$ sînt omoloage în răsturnarea în raport cu diametrul mediator al celor două coarde.

Să remarcăm că nimic nu deosebeşte unul de altul cele două puncte M, şi nici cele două puncte P; de altfel, formula lui Chasles permite să se treacă de la egalitatea scrisă, la

$$(\mathbf{OM}_1, \mathbf{OP}_2) = -(\mathbf{OM}_2, \mathbf{OP}_1) \pmod{2\pi}.$$

b) Fie două drepte X, Y care intersectează circumferinţa respectiv în M', M'' şi P', P''. Vrem să comparăm unghiul (X, Y) orientat, definit pînă la π, cu unghiurile pe care le formează între ele razele $\mathbf{OM}'$, $\mathbf{OM}''$, $\mathbf{OP}'$, $\mathbf{OP}''$.

Prin centrul O, să ducem dreptele x și y paralele respectiv cu X și Y; ele taie circumferința în m_1, m_2; p_1, p_2, indicii 1 și 2 fiind atribuiți în mod arbitrar celor două puncte cu același nume. Avem

$$(X, Y) = (Om_1, Op_1) = (Om_2, Op_2) \pmod{\pi}.$$

Vom utiliza consecința

$$(X, Y) = \frac{1}{2}\,[(\mathbf{Om_1}, \mathbf{Op_1}) + (\mathbf{Om_2}, \mathbf{Op_2})] \pmod{\pi}.$$

Conform lemei,

$$(\mathbf{Om_1}, \mathbf{OM'}) = -\,(\mathbf{Om_2}, \mathbf{OM''}) \pmod{2\pi}$$

$$(\mathbf{Op_1}, \mathbf{OP'}) = -\,(\mathbf{Op_2}, \mathbf{OP''}) \pmod{2\pi}.$$

Deci, scăzînd membru cu membru,

$$(\mathbf{Om_1}, \mathbf{OM'}) - (\mathbf{Op_1}, \mathbf{OP'}) = -\,[(\mathbf{Om_2}, \mathbf{OM''}) - (\mathbf{Op_2}, \mathbf{OP''})] \pmod{2\pi}$$

sau

$$(\mathbf{Om_1}, \mathbf{Op_1}) - (\mathbf{OM'}, \mathbf{OP'}) = -\,[(\mathbf{Om_2}, \mathbf{Op_2}) - (\mathbf{OM''}, \mathbf{OP''})] \pmod{2\pi}$$

și, în cele din urmă,

$$\begin{aligned} 2(X, Y) &= (\mathbf{OM'}, \mathbf{OP'}) + (\mathbf{OM''}, \mathbf{OP''}) \pmod{2\pi} \\ &= (\mathbf{OM'}, \mathbf{OP''}) + (\mathbf{OM''}, \mathbf{OP'}) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Această formulă este valabilă oricare ar fi poziția în raport cu cercul a punctului S comun dreptelor X și Y. În particular, *dacă S este pe circumferință*, atunci, de exemplu, punctele M'' și P'' sînt în S, și formula devine

$$2(X, Y) = (\mathbf{OM'}, \mathbf{OP'}) \pmod{2\pi}\ (\textit{Formula unghiului înscris}). \qquad \text{(II)}$$

Știm că în fiecare punct S al circumferinței există o tangentă T. Dacă Y tinde către T, P' și P'' tind către S; formula este în continuare valabilă și dă

$$2(X, T) = (\mathbf{OM'}, \mathbf{OS}) \pmod{2\pi}.$$

REMARCĂ. Această egalitate dă, orientînd dreapta X,

$$2(X, T) = (\mathbf{OM'}, \mathbf{X}) + (\mathbf{X}, \mathbf{OS}) \pmod{2\pi}.$$

Dar, în triunghiul isoscel OSM',

$$(\mathbf{OM'}, \mathbf{X}) = -(\mathbf{OS}, \mathbf{SX}) + \pi \pmod{2\pi}$$

pe baza simetriei în raport cu mediatoarea lui SM'. Prin urmare, în final,

$$(X, T) = \pi + (X, OS) \pmod{\pi},$$

deci

$$(OS, T) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Regăsim faptul că tangenta într-un punct al circumferinţei este perpendiculară pe raza care se termină în punctul de contact.

2. **Consecinţă.** PROPRIETATE CARACTERISTICĂ A CIRCUMFERINŢELOR, CARE NU FACE SĂ INTERVINĂ CENTRUL:

1) *Fie două puncte A şi B. Locul geometric al punctelor M astfel încît (MA, MB) are o valoare dată $\theta \pmod{\pi}$ este o circumferinţă.*

Să presupunem mai întîi $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. Să determinăm punctul O definit de

$$\mathbf{OA} = \mathbf{OB}, \quad (\mathbf{OA}, \mathbf{OB}) = 2\theta.$$

Acest punct este situat pe mediatoarea z a lui AB, şi **OA**, **OB** sînt simetrice în raport cu z. Aceasta înseamnă că $(z, OA) = -\theta \pmod{\pi}$, ceea ce determină dreapta OA, deci punctul A pe această dreaptă şi pe z.

Circumferinţa de centru O care trece prin A şi B este o mulţime de puncte care satisface condiţia, iar conform formulei generale (I), în care A şi B joacă rolul lui M' şi P', orice punct S care nu este pe circumferinţă nu este acceptabil. Deci circumferinţa este într-adevăr locul căutat.

Dacă $\theta = 0 \pmod{\pi}$, locul este dreapta AB. O dreaptă apare, din acest punct de vedere, drept o circumferinţă.

2) *Locul punctelor M astfel încît* $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

Numai o parte din circumferinţa definită luînd $\theta = \alpha + k\pi$ satisface condiţia. O vom determina prin continuitate: cînd M

este pe circumferință, unghiul (**MA**, **MB**) are valoarea α sau $\alpha + \pi$. Deoarece este o funcție continuă de unghiul la centru care determină pe M, acest unghi nu-și poate schimba determinarea decît dacă devine nedeterminat, adică dacă M este în A sau în B. Tangenta în B poartă vectorii opuși **b** și $-$ **b**. Să-l numim **b** pe cel care verifică

$$(\mathbf{BA}, \mathbf{b}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Prin simetrie în raport cu z, definim pe tangenta A vectorul **a** care verifică

$$(\mathbf{a}, \mathbf{AB}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Locul căutat este cel al arcelor AB astfel încît semidreapta MB tinde către semidreapta care poartă pe **b** cînd M tinde către B; este, de asemenea, cel pentru care **MA** tinde către semidreapta care poartă pe **a** cînd M tinde către A.

CAZURI PARTICULARE

$(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \pi \pmod{2\pi} \iff M$ aparține segmentului AB

$(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = 0 \pmod{2\pi} \iff M$ aparține uneia din semidreptele care prelungesc segmentul AB.

3) Locul punctelor M astfel încît, θ fiind dat între 0 și π,

$$|(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})| = \theta$$

este reuniunea a două circumferințe simetrice în raport cu AB.

4) Locul punctelor astfel încît

$$|(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})| = \alpha$$

este reuniunea a două arce simetrice în raport cu AB.

3. **Cvadriunghiuri inscriptibile.** Se numește *cvadriunghi*, sau, mai bine, *cvadripunct*, o mulțime neordonată de 4 puncte. Fie A, B, C, D aceste puncte. Cele 6 drepte care le unesc două cîte două sînt *laturile* cvadriunghiului.

1) *Condiția de inscriptibilitate a unui cvadriunghi se poate scrie în șase moduri, de tipul* $(CA, CB) = (DA, DB)$ (coarda de bază: AB). Scriind *două* din aceste egalități, se introduc în mod necesar cele 6 laturi, iar celelalte patru egalități se deduc din cele două alese prin aplicarea teoremei lui Chasles, pentru unghiuri.

ALT ENUNȚ. Fiind date două perechi de drepte, D_1, D_2 și D', D'', condiția ca cele 4 puncte în care dreptele primei perechi taie dreptele celeilalte perechi, adică cele 4 puncte

$$D_1 \cap D', \; D_1 \cap D'', \; D_2 \cap D', \; D_2 \cap D'',$$

să fie pe o aceeași circumferință (sau, cum se spune uneori, să fie *conciclice*) este

$$(D_1, D') = -(D_2, D'') \pmod{\pi}$$

sau, la fel de bine, pe baza formulei lui Chasles

$$(D_1, D'') = -(D_2, D') \pmod{\pi}$$

fiindcă ordinea indicilor, ca și cea a accentelor, nu intervine.

Fiecare din aceste relații exprimă că *perechile* D_1, D_2 *și* D', D'' *au aceleași bisectoare*, fiindcă ele permit să se treacă de la

$$(u, D_1) = -(u, D_2)$$

la

$$(u, D') = -(u, D'') \pmod{\pi}.$$

sau (dacă vrem să punem mai bine în evidență definiția celor două bisectoare de unghiuri care sînt definite mod π), de la $(D_1, u) = \frac{1}{2}(D_1, D_2) \mod \frac{\pi}{2}$ la $(D', u) = \frac{1}{2}(D', D'') \left(\mod \frac{\pi}{2}\right)$.

Spunem că cele două perechi D_1, D_2 și D', D'' au *direcții izogonale*.

Relația

$$(D_1, D') = -(D_2, D'') \pmod{\pi}$$

între perechile D_1, D_2 și D', D'' este o *relație de echivalență*, fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă. Această relație se numește *antiparalelism al perechilor*, și se notează uneori

$$(D_1, D_2) \;/\!-\!/\; (D', D'').$$

Ea exprimă inscriptibilitatea cvadriunghiului $ABCD$ de vîrfuri

$$D_1 \cap D', \; D_2 \cap D', \; D_1 \cap D'', \; D_2 \cap D''.$$

Tranzitivitatea exprimă că dacă avem, în plus, și inscriptibilitatea cvadriunghiului

$$D' \cap d', \; D'' \cap d', \; D' \cap d'', \; D'' \cap d'',$$

de aici rezultă inscriptibilitatea cvadriunghiului

$$D_1 \cap d', \quad D_2 \cap d', \quad D_1 \cap d'', \quad D_2 \cap d''.$$

CAZ PARTICULAR. Egalitatea $(D_1, D') = -(D_2, D'')$ (mod π) nu presupune că cele 4 puncte de intersecţie sînt distincte.

A presupune, de exemplu, că A şi B sînt confundate, înseamnă a spune că D' este tangentă în acest punct la circumferinţa circumscrisă lui $AA'B'$.

Dacă cele două drepte ale unei aceleiaşi perechi sînt confundate, de exemplu D' şi D'', înseamnă că A şi B' sînt şi ele confundate, şi, la fel, B şi A'; relaţia exprimă atunci că D_1 şi D_2 sînt tangente la o aceeaşi circumferinţă, D' fiind coarda contactelor.

Nu putem considera confundate două drepte din două perechi diferite, de exemplu D_1 şi D', fiindcă A' ar fi atunci nedeterminat pe această dreaptă; totuşi, egalitatea exprimă în acest caz că D_2 şi D'' sînt paralele: este un caz de degenerescenţă în care A' este aruncat la infinit şi cercul a devenit dreapta D_1. (O dreaptă apare aici ca un cerc degenerat.)

4. **Exerciţiu.** Studiul configuraţiei formate de 6 drepte a, b, c; a', b', c' care sînt astfel încît

$$(a, a') = (b, b') = (c, c') = \alpha \text{ (mod } \pi).$$

Să numim cele 9 puncte după schema

$$A = b \cap c, \; A' = a \cap a', \; A_1 = b' \cap c'.$$

Există deci 3 inscriptibilităţi, de pildă

$$A' = a \cap a', \quad B' = b \cap b', \quad C = a \cap b, \quad C_1 = a' \cap b'.$$

PRIMUL CAZ SIMPLU. Să presupunem A_1, B_1, C_1 confundate într-un punct M, şi să studiem triunghiul $A'B'C'$.

Inscriptibilitatea lui $A'B'CM$ dă $(A'B', b) =$
$= (MA', MC)$ (mod π).

De asemenea

$$(A'C', c) = (MA', MB) \text{ (mod } \pi);$$

de unde

$$(A'B', A'C') = (MB, MC) + (b, c) \text{ (mod } \pi).$$

Rezultă de aici că condiţia necesară şi suficientă pentru ca A', B', C' să fie coliniare este

$$(MB, MC) = (c, b) \pmod{\pi},$$

ceea ce exprimă că M este pe cercul (γ) circumscris lui ABC.

În cazul în care $\alpha = \pi/2$, dreapta de coliniaritate a lui A', B', C' se numeşte *dreapta lui Simson asociată punctului* M de pe cercul circumscris lui ABC.

Dacă $\alpha = \pi/2$ şi M nu este pe (γ), triunghiul $A'B'C'$ se numeşte *triunghiul podar* al lui M în raport cu triunghiul ABC.

AL DOILEA CAZ SIMPLU. Dreptele a', b', c' trec respectiv prin A, B, C.

Studiem de data aceasta A_1, B_1, C_1. Egalitatea

$$(a, a') = (b, b') \pmod{\pi}$$

este echivalentă cu

$$(a, b) = (a', b') \pmod{\pi},$$

adică

$$(CB, CA) = -(C_1B, C_1A) \pmod{\pi}$$

care exprimă că C_1 este pe circumferinţa (γ_c) simetrică cu (γ) în raport cu AB.

Dacă unghiul α variază de la 0 la π, locurile punctelor A_1, B_1, C_1 sînt deci respectiv circumferinţele (γ_a), (γ_b), (γ_c) egale şi parcurse în acelaşi sens, aşa cum o arată coardele a', b', c'.

Aceste trei circumferinţe sînt concurente într-un punct H, fiindcă

$$\left.\begin{aligned}(HA, HB) &= (a, b)\\ (HA, HC) &= (a, c)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (HB, HC) = (b, c).$$

Punctele H_a, H_b, H_c diametral opuse lui H pe fiecare cerc sînt punctele A_1, B_1, C_1 care corespund la $\alpha = 0 \pmod{\pi}$, fiindcă H_aH_b trece prin C şi $H_aH_b = 2\gamma_a\gamma_b = -2BA$ şi la fel pentru H_aH_c şi H_bH_c.

De aici rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 care corespund la $\alpha = \pi/2$ sînt confundate în H. Prin urmare H este punctul de concurenţă al înălţimilor lui ABC. De unde enunţul:

Cele trei înălţimi ale unui triunghi sînt concurente.

Dar cele 4 puncte A, B, C, H, ca și cele 4 cercuri (γ), (γ_a), (γ_b), (γ_c), joacă același rol. Cvadriunghiul A, B, C, H se numește *ortocentric* și fiecare din cele 4 puncte se numește *ortocentrul* triunghiului format de celelalte trei.

II. Puterea unui punct în raport cu o circumferință

1) Fie o circumferință (γ) și o pereche de drepte d_1, d_2 care o taie în A_1, B_1; A_2, B_2. În cazul general, d_1 și d_2 sînt concurente într-un punct S.

Cele 4 puncte situate pe (γ) definesc două perechi de drepte izogonale cu d_1, d_2. Să folosim de exemplu A_1A_2, B_1B_2 și una din bisectoarele lui d_1, d_2, fie ea u. Printr-o răsturnare în jurul lui u, d_1 și d_2 se schimbă între ele, A_1 are ca imagine un punct A_1' al lui d_2, astfel încît $SA_1' = SA_1$, iar A_2 are ca imagine un punct al lui d_1 astfel încît $SA_2' = SA_2$. În plus, $A_1'A_2'$ este paralelă cu B_1B_2.

De aici, cu ajutorul teoremei lui Tales, rezultă proporția

$$\frac{\overline{SA_1'}}{\overline{SB_2}} = \frac{\overline{SA_2'}}{\overline{SB_1}}$$

oricare ar fi sensurile pozitive alese pe d_1 și d_2. Pentru a reveni la punctele A_1 și A_2, să convenim de exemplu să orientăm d_1 și d_2 în sensuri simetrice în raport cu bisectoarea aleasă u, așa că $\overline{SA_1'} = \overline{SA_1}$, $\overline{SA_2'} = \overline{SA_2}$.

Obținem

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_2}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_1}},$$

deci, grupînd tot ceea ce privește fiecare secantă, $\overline{SA_1} \cdot \overline{SB_1} = \overline{SA_2} \cdot \overline{SB_2}$, formulă care nu depinde de sensurile pozitive alese pe d_1 și d_2.

ENUNȚ. Fiind date o circumferință și un punct S, considerăm mulțimea dreptelor care trec prin S și sînt secante la circumferință în A și B. Produsul $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$ este independent de secantă. El se numește *puterea punctului S în raport cu circumferința* (γ); noi îl vom nota $\mathcal{P}_\gamma(S)$. Cînd circumferința este dată, el este o funcție de punctul S, mai precis, de distanța d de la S la centru.

Dacă R este raza, secanta care trece prin centru dă imediat $\mathcal{P}_\gamma(S) = d^2 - R^2$.

Puterea este pozitivă, nulă sau negativă, după cum S este exterior circumferinţei, pe aceasta, sau în interiorul ei. Ea este omogenă în pătratul unei lungimi.

Dacă S ESTE EXTERIOR circumferinţei, cele două tangente ST şi ST' sînt astfel încît $ST^2 = ST'^2 = d^2 - R^2 = \mathcal{P}_\gamma(S)$.

Circumferinţa de centru S care trece prin T şi T' este ortogonală lui (γ), ceea ce înseamnă că tangentele în fiecare din punctele comune sînt perpendiculare. Vom studia ceva mai tîrziu această foarte importantă dispunere a două circumferinţe.

Dacă S ESTE INTERIOR lui (γ), lungimea care intervine este cea a secantei perpendiculare pe diametrul care trece prin S, fie ea A_0B_0. Ea dă

$$(SA_0)^2 = (SB_0)^2 = -\mathcal{P}_\gamma(S).$$

Teoremă. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un cvadriunghi A, B, C, D să fie inscriptibil într-o circumferinţă este $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$, dacă AB şi CD se intersectează în S.*

Dacă AB şi CD sînt paralele, condiţia este ca aceste segmente să aibă aceeaşi mediatoare.

Într-adevăr, relaţia caracterizează fără ambiguitate punctul D, cînd A, B, C sînt cunoscute; or, prin aceste puncte A, B, C trece un cerc unic care, conform teoremei precedente, trece prin D. Am presupus, firește, că AB şi CD nu sînt situate pe aceeaşi dreaptă, caz în care cercul ar fi înlocuit de această dreaptă.

În funcţie de punctele pe care le asociem, teorema poate fi aplicată în trei moduri diferite pentru un acelaşi cvadriunghi.

Ca şi caracterizarea printr-o egalitate de unghiuri înscrise, caracterizarea inscriptibilităţii prin putere nu face să intervină centrul circumferinţei.

2) PUNCTUL DE VEDERE AL GEOMETRIEI ANALITICE

Să luăm ca origine a coordonatelor punctul S, ca axă a absciselor diametrul care trece prin S, orientat pozitiv de la S către centrul cercului, şi o axă a ordonatelor perpendiculară, cu unităţi egale pe axe (fiindcă facem geometrie metrică). Ecuaţia circumferinţei este

$$(x - d)^2 + y^2 = R^2. \tag{1}$$

Să caracterizăm un punct din plan prin

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Pentru a avea corespondenţă biunivocă între (x, y) şi (r, θ), luăm

$$-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < r < +\infty.$$

O dreaptă dusă prin S este atunci definită de valoarea lui θ şi este orientată de vectorul $\mathbf{u}$ astfel încît

$$(\mathbf{Sx}, \mathbf{u}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Punctele circumferinţei sînt caracterizate prin relaţia

$$r^2 - 2dr \cos \theta + (d^2 - R^2) = 0 \tag{2}$$

Pentru o valoare dată a lui θ, produsul şi suma valorilor rădăcinilor r ale ecuaţiei — dacă ele există — verifică

$$r' \cdot r'' = d^2 - R^2, \quad r' + r'' = 2d \cos \theta.$$

Prima dintre aceste relaţii exprimă că $r' \cdot r''$ nu depinde de θ; este teorema puterii lui S în raport cu circumferinţa.

A doua relaţie, sub forma

$$\frac{r' + r''}{2} = d \cos \theta$$

exprimă că mijlocul coardei (presupusă că există) este proiecţia centrului pe secantă, rezultat binecunoscut care decurge imediat din egalitatea razelor. Mai deducem însă că

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = \frac{2d \cos \theta}{d^2 - R^2};$$

prin urmare, dacă introducem conjugatul armonic Q al lui S în raport cu coarda, notînd $q = \overline{SQ}$, avem $\frac{2}{q} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$ şi relaţia se scrie

$$q \cos \theta = d - \frac{R^2}{d};$$

ea exprimă că punctul Q se proiectează pe diametrul Sx în punctul fix H de abscisă $d - \frac{R^2}{d}$.

Cînd θ variază, Q descrie deci dreapta HY perpendiculară în H pe Ox, sau numai segmentul care corespunde valorilor θ pentru care rădăcinile r' și r'' există. (În cazul $d > R$, trebuie ca $|\sin\theta| < R/d$.)

Polară a lui S în raport cu circumferința se numește însă, nu locul lui Q, ci, în toate cazurile, întreaga dreaptă care poartă acest loc. Dacă, atunci cînd S este exterior circumferinței, luăm pe polara lui un punct Q' exterior coardei de contact TT', dreapta SQ' nu taie circumferința; nu mai putem vorbi de diviziune armonică. În § III vom obține o caracterizare geometrică.

FORMULE MAI GENERALE

a) Dacă cercul are o poziție oarecare în raport cu axele de coordonate, ecuația lui este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

ecuație de forma

$$P(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

O dreaptă dusă printr-un punct S oarecare, de coordonate (x_0, y_0), va fi definită de

$$(\mathbf{Ox}, \mathbf{u}) = \theta$$

așa că punctul ei verifică

$$x = x_0 + r\cos\theta, \quad y = y_0 + r\sin\theta,$$

iar acele puncte ale dreptei care sînt pe circumferință vor fi caracterizate prin

$$(x_0 + r\cos\theta)^2 + (y_0 + r\sin\theta)^2 - 2a(x_0 + r\cos\theta) - \\ - 2b(y_0 + r\sin\theta) + c = 0,$$

adică

$$r^2 + 2[(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\sin\theta]\, r + P(x_0, y_0) = 0.$$

Prin urmare, *puterea punctului $S(x_0, y_0)$ în raport cu cercul $P(x,y) = 0$ este egală cu $P(x_0, y_0)$*. (De notat că, în ecuația cercului, x^2 și y^2 sînt luați cu coeficientul 1.)

b) Conjugatul Q al punctului S este pe secantă, și este definit de

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{r' + r''}{r'r''} = -\,\frac{(x_1 - a)\cos\theta + (y_1 - b)\sin\theta}{P(x_1, y_1)}.$$

Deoarece coordonatele lui sînt

$$X = x_0 + r\cos\theta,\quad Y = y_0 + r\sin\theta,$$

Q rămîne pe dreapta a cărei ecuație se obține eliminînd pe r și θ:

$$(X - x_0)(x_0 - a) + (Y - y_0)(y_0 - b) + P(x_0, y_0) = 0;$$

aceasta este ecuația polarei lui S în raport cu cercul. Ea se simplifică, fiindcă $P(x_0, y_0) = 0$, și se scrie

$$(x_0 - a)(X - a) + (y_0 - b)(Y - b) - R^2 = 0.$$

III. Familii de cercuri

Să studiem cîteva familii de cercuri introduse adesea în geometria metrică și folosite într-o serie de demonstrații importante.

a) **Cercuri ortogonale.** Dacă, într-unul din punctele lor comune T, două cercuri (C) și (C') au tangentele rectangulare, adică dacă tangenta unuia este rază a celuilalt, la fel se întîmplă și în celălalt punct comun T' (din simetria în raport cu dreapta centrelor). Cercurile se numesc atunci *ortogonale*. Această relație între două cercuri poate fi exprimată prin condițiile echivalente:

Puterea centrului unuia din ele în raport cu celălalt este egală cu pătratul razei primului.

Orice diametru al unuia care îl taie pe celălalt, divide armonic coarda determinată în cel de al doilea.

Fie o circumferință (C) și un punct S. Orice cerc (C') ortogonal lui (C) și care trece prin S, trece prin punctul H, conjugatul lui S în raport cu diametrul lui (C) care trece prin S, și invers. Aceasta înseamnă că locul punctelor Q diametral opuse lui S pe cercurile (C') este perpendiculara HY în H pe diametrul care trece prin S. Dintre aceste puncte Q, acelea care sînt astfel încît SQ taie (C), sînt conjugatele lui S în raport cu coarda determinată în (C). Regăsim deci *polara*, așa cum a fost introdusă mai sus.

REMARCĂ. Cercurile (C') care permit să se atingă toate punctele dreptei polare vor fi foarte utile în demonstrații, dar definiția

prin diviziune armonică este mai profundă: ea arată clar că este vorba de o chestiune de geometrie proiectivă, dacă considerăm circumferința în calitatea ei de membră a familiei curbelor perspective ale acestei circumferințe, adică în calitate de conică. De altfel, am obține întreaga dreaptă dacă am ști să considerăm o dreaptă care nu taie circumferința ca tăind-o de fapt în două puncte „imaginare", definite de valorile r' și r'', „rădăcini imaginare" ale ecuației scrise mai sus!

Reciprocitate polară. Două puncte S și Q diametral opuse pe un cerc (C') ortogonal lui (C) sînt astfel încît *fiecare din ele este pe polara celuilalt.* Spunem că ele sînt *conjugate în raport cu* (C). Deducem de aici imediat TEOREMA RECIPROCITĂȚII POLARE: *Dacă un punct Q descrie o dreaptă s, care este polara lui S, atunci polara q a lui Q trece prin S.*

Vedem deci că orice dreaptă care nu trece prin centru este polara unui punct, pe care îl numim *polul* dreptei. Există, prin urmare, o aplicație biunivocă a mulțimii punctelor planului (centrul fiind exclus) pe mulțimea dreptelor planului (excluzînd dreptele care trec prin centru). Așa cum am făcut cînd am studiat diviziunile armonice în geometria proiectivă, vom spune că o dreaptă care trece prin centru este asociată punctului de la infinit din direcția perpendiculară, și reciproc.

b) **Fascicule de cercuri.** Mulțimea Γ' a cercurilor (C') care trec prin S și H se numește *fascicul de cercuri cu punctele de bază S și H.* Ele sînt toate ortogonale nu numai lui (C), ci și oricărui cerc care, ca și (C), are ca diametru un segment care divide armonic pe SH. Spunem că această mulțime Γ de cercuri constituie un *fascicul cu punctele limită S și H.* În particular, S și H trebuie considerate drept *cercuri de rază nulă ale fasciculului* Γ; ele corespund celor două cazuri în care trei puncte ale diviziunii armonice coincid.

Despre asemenea două fascicule Γ și Γ' spunem că sînt *ortogonale.* Punctele lor S și H sînt *punctele lui Poncelet.*

Așa cum rezultă din definiția precedentă, fasciculele cu puncte de bază și fascicule cu puncte limită par foarte diferite. Analogia între aceste două specii de fascicule apare însă clar în geometria analitică: să luăm de această dată ca centru al coordonatelor mijlocul O al lui SH, ca axă x dreapta SH, iar ca axă y, perpen-

diculara pe ea în O. Notînd $\overline{OH} = a$, cercurile (C'), definite ca fiind cercurile care trec prin S şi H, au ca ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2my - a^2 = 0$$

(m este un parametru care variază de la $-\infty$ la $+\infty$).

Cercurile (C) au ca diametre segmentele axei x ale căror extremităţi au abscisele x' şi x'' legate prin

$$x' \cdot x'' = a^2.$$

Ecuaţia unei circumferinţe (C) este deci

$$x^2 + y^2 - 2px + a^2 = 0$$

(p — un parametru care verifică $|p| \geqslant a$).

Regăsim faptul că centrul lui (C) este, în mod necesar, exterior segmentului SH, aşa cum rezultă din ortogonalitatea circumferinţelor (C) şi (C').

Definiţie comună celor două specii de fascicule de cercuri. Orice punct al dreptei Oy, loc al centrelor circumferinţelor (C') care constituie fasciculul Γ', are aceeaşi putere în raport cu toate circumferinţele (C), putere egală cu pătratul razei circumferinţei (C') care admite acel punct ca centru. De asemenea, orice punct al dreptei SH are, evident, aceeaşi putere în raport cu toate cercurile (C'), chiar dacă este situat între S şi H. Dacă el este exterior segmentului SH, această putere este egală cu pătratul razei cercului (C) al cărui centru este. Reciproc:

Teoremă. 1. *Locul punctelor care au aceeaşi putere în raport cu două circumferinţe neconcentrice este o dreaptă numită axă radicală a celor două circumferinţe.*

2. *O mulţime de cercuri care au, două cîte două, aceeaşi axă radicală este un fascicul de cercuri.*

Să examinăm condiţia ca un punct M să aibă aceeaşi putere în raport cu două cercuri (C_1) şi (C_2) de centre O_1, O_2 şi deraze R_1, R_2:

$$MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2.$$

adică

$$MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Aceasta exprimă că locul lui M este o dreaptă perpendiculară pe dreapta centrelor O_1O_2. În toate cazurile, orice punct al locului

exterior unuia din cercuri este exterior şi celuilalt, şi este centrul unui cerc ortogonal celor două cercuri date. (Dacă cercurile sînt concentrice, aceste cercuri ortogonale devin dreptele duse prin centru.)

Dacă cercurile date sînt secante, axa radicală este dreapta care trece prin aceste puncte şi mulţimea cercurilor care au, două cîte două, această axă radicală este fasciculul care are aceste două puncte ca puncte de bază.

Dacă cele două cercuri date nu sînt secante, axa radicală este exterioară acestor două cercuri; în particular, piciorul axei radicale pe dreapta centrelor este centrul unui cerc ortogonal celor două cercuri date; el are ca diametru două puncte S şi H pe dreapta centrelor, şi mulţimea cercurilor care au, două cîte două între ele şi cu cercurile date aceeaşi axă radicală este fasciculul de puncte limită S şi H.

Dacă cercurile date sînt tangente într-un punct S, axa radicală este tangenta comună în S, şi fasciculul corespunzător este format de mulţimea cercurilor tangente în S la cercurile date.

ÎN GEOMETRIA ANALITICĂ, să folosim axe oarecare dar, fireşte, rectangulare, cu aceleaşi unităţi pe ambele axe. Ecuaţia unei circumferinţe oarecare este

$$P(x, y) \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

şi puterea unui punct $M(x_0, y_0)$ este

$$P(x_0, y_0) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2.$$

Locul punctelor M de puteri egale în raport cu două cercuri presupuse neconcentrice

$$P_1(x, y) \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0$$
$$P_2(x, y) \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - R_2^2 = 0$$

este dreapta de ecuaţie

$$D(x, y) \equiv P_1(x, y) - P_2(x, y) = 0,$$

adică

$$D(x, y) \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + P_1(0, 0) - P_2(0, 0) = 0.$$

Ecuaţia generală a unui cerc care are această axă radicală cu fiecare din cercurile date va avea expresia

$$P_3(x, y) \equiv P_1(x, y) + \lambda D(x, y) = 0$$

sau, mai simetric,

$$P_3(x, y) \equiv \alpha P_1(x, y) + \beta P_2(x, y) = 0;$$

parametrii λ sau α și β iau toate valorile care sînt astfel încît cercul există, adică astfel încît valoarea dată de ecuație pentru pătratul razei este pozitivă.

LOCURI GEOMETRICE ATAȘATE UNEI PERECHI DE CIRCUMFERINȚE

Condiția

$$\alpha \mathcal{P}_{(C_1)}(M) + \beta \mathcal{P}_{(C_2)}(M) = k$$

se reduce imediat la condiția analoagă referitoare la centre:

$$\alpha(MC_1)^2 + \beta(MC_2)^2 = k.$$

$\alpha + \beta \neq 0$: Locul este o circumferință cu centrul pe dreapta centrelor.

$\alpha + \beta = 0$: Locul este o paralelă la axa radicală. Să precizăm poziția relativă a acestor două drepte: fie K piciorul dreptei-loc, și H piciorul axei radicale. Ele sînt definite pe dreapta centrelor (făcînd $\alpha = -\beta = 1$), de

$$(KC_1)^2 - (KC_2)^2 = R_1^2 - R_2^2 + k$$

$$(HC_1)^2 - (HC_2)^2 = R_1^2 - R_2^2$$

de unde, scăzînd membru cu membru,

$$k = \mathcal{P}_{(C_1)} - \mathcal{P}_{(C_2)} = 2\overline{HK} \cdot \overline{C_1C_2}.$$

Din acest punct de vedere, dacă sînt date două cercuri, se determină în plan o partiție în clase de echivalență care sînt drepte perpendiculare pe dreapta centrelor.

CENTRUL RADICAL A TREI CERCURI CU CENTRELE NECOLINIARE

Cele trei axe radicale ale cercurilor luate două cîte două sînt concurente într-un punct de putere egală. Dacă acest punct este exterior unuia din cercuri, este exterior și celorlalte, și este centrul unui cerc ortogonal celor trei cercuri. Mulțimea cercurilor care au același centru radical formează o *rețea* de cercuri.

Aplicație. Obținem puncte ale axei radicale a două cercuri nesecante cu ajutorul unor cercuri auxiliare care le taie pe amîndouă.

Sfere. Figura formată dintr-o sferă și un punct, sau din două sfere, derivă prin revoluție din figura analoagă relativă la cercuri, de unde concluziile (plan radical, plan polar etc.). Nu insistăm. Va trebui doar să ne imaginăm că o pereche de sfere are un *plan radical*, o mulțime de trei sfere are, în general, *o axă radicală*, o mulțime de 4 sfere — în general un *centru radical*. Un punct va avea un *plan polar* în raport cu o sferă, iar un plan are asociat *un pol*.

IV. Noțiuni despre corespondența prin polare reciproce

ÎN PLAN, un punct este definit prin 2 parametrii, și la fel și o dreaptă (de exemplu, un punct este definit prin coordonatele sale x_0, y_0, iar o dreaptă prin ecuația ei $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$ sau, la fel de bine, prin ecuația normală $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$). Odată ales un cerc de bază, relația pol-polară stabilește o corespondență biunivocă între mulțimea punctelor și mulțimea dreptelor. Pe baza reciprocității polare, dacă o dreaptă este considerată ca un loc de puncte, polul ei este vîrful fasciculului polarelor asociate. Mai general, o curbă poate fi considerată drept loc de puncte (punct de vedere punctual), sau drept înfășurătoare a tangentelor sale (punct de vedere tangențial). Or, se demonstrează că o curbă are asociată aceeași curbă imagine, indiferent dacă este considerată dintr-un punct de vedere sau din celălalt; dacă una este considerată punctual, cealaltă este considerată tangențial. Aceasta se demonstrează, în mod evident, plecînd de la reciprocitatea polară și este un fapt destul de evident intuitiv, dar demonstrația riguroasă necesită considerații de geometrie infinitezimală (teoria înfășurătoarelor) pe care însă noi nu o abordăm.

Trebuie deci să ne limităm la figuri formate din puncte și drepte. Așa se face că un cvadriunghi devine un patrulater complet, figura lui Menelau devine figura lui Céva etc.

Teoremă. *Biraportul a 4 puncte coliniare este egal cu biraportul polarelor lor.* (Într-adevăr, fasciculul polarelor este egal cu fasciculul dreptelor duse prin centrul cercului și trecînd prin punctele date.) Rezultă de aici că, *oricare ar fi proprietatea proiectivă considerată*, este posibilă o traducere care permite să se descrie

o figură plecînd de la figura asociată (punct ↔ dreaptă), (puncte coliniare ↔ drepte concurente). Există *dualitate* (noţiune introdusă de Chasles).

ÎN SPAŢIUL cu 3 dimensiuni, o dreaptă şi un plan depind de 3 parametri; corespondenţa polară (pol ↔ plan) în raport cu o sferă de bază pune în evidenţă o dualitate prin care o dreaptă, loc de puncte, are asociată o dreaptă, „balama" a unui fascicul de plane.

Teoria corespondenţei prin polară reciprocă îşi capătă însă întreaga ei importanţă numai în cadrul punctului de vedere proiectiv, cînd cercul este înlocuit cu o conică, sfera cu cuadrică, şi cînd se introduc elementele imaginare (pe lîngă elementele de la infinit). Aşa cum am mai spus, este nevoie, de asemenea, de un studiu al înfăşurătoarelor. Noi nu facem aici decît să semnalăm această teorie, insistînd asupra noţiunii de dualitate.

§ 3. TRANSFORMĂRILE PUNCTUALE ALE GEOMETRIEI METRICE

O transformare punctuală face parte din geometria metrică dacă ea poate fi definită cu ajutorul elementelor de geometrie metrică afină (paralelism, rapoarte de vectori paraleli) şi al elementelor metrice (distanţe şi unghiuri, sau produse scalare şi vectoriale).

O proprietate a unei figuri în geometrie euclidiană este o relaţie între elementele figurii care rămîne invariantă la un grup de transformări metrice numite *similitudini*. Îl vom introduce în cele ce urmează. Trebuie însă semnalat că putem considera o infinitate de aplicaţii ale planului sau ale spaţiului pe el însuşi, prin corespondenţă biunivocă sau nu. Vom studia cîteva din ele, ca exerciţiu. Rezervăm pentru capitolul următor una din aceste transformări, *inversiunea*, deosebit de importantă din cauză că introduce o nouă geometrie, inclusă în geometria metrică, dar care poate fi privită drept o geometrie autonomă.

I. Transformările afine în geometria metrică

Proprietăţile studiate ale transformărilor afine trebuie completate cu enunţurile referitoare la elementele metrice: distanţe şi unghiuri.

1) **Translație.** Invarianța oricărei lungimi, a oricărui unghi (definit în valoare absolută, sau orientat pînă la 2π sau pînă la π).

O circumferință are ca imagine o circumferință de o rază egală situată într-un plan paralel, centrele lor fiind puncte omoloage. Reciproc, fiind date două circumferințe de raze egale situate în plane paralele, există o translație prin care una este imaginea celeilalte.

Enunțuri analoage (mai simple) pentru sfere.

2) **Omotétie.** Orice lungime este înmulțită cu valoarea absolută a raportului de omotetie. Orice unghi se conservă.

O circumferință are ca imagine o circumferință situată într-un plan paralel și a cărei rază este produsul razei circumferinței date cu valoarea absolută a raportului de omotetie. Reciproc, fiind date două circumferințe situate în plane paralele, există două omotetii, de rapoarte opuse, prin care una din circumferințe o dă pe cealaltă ca imagine. Dacă circumferințele sînt egale, omotetia negativă este o simetrie în raport cu un punct, iar omotetia pozitivă degenerează într-o translație. În cazul general, cele două centre de omotetie sînt coliniare cu centrele și divid armonic segmentul care unește centrele în raportul razelor.

Această figură poate fi descrisă și sub o altă formă: Orice secțiune a unui con cu baza circulară cu un plan paralel cu această bază este o circumferință; invers, două circumferințe situate în plane paralele, sînt situate pe două conuri, unul din acestea fiind un cilindru dacă razele sînt egale.

Dacă circumferințele sînt într-un același plan, și sînt concentrice, există un singur centru de omotetie, dar cele două omotetii sînt totuși distincte fiindcă rapoartele lor sînt opuse. Mai semnalăm că orice tangentă comună la două cercuri coplanare trece prin unul din centrele de omotetie și că, dacă circumferințele sînt tangente, punctul lor de contact este unul din centrele de omotetie.

Studiu analog (mai simplu) pentru sfere.

3) **Afinități.** Numai afinitățile ortogonale merită să fie completate din punct de vedere metric. Să considerăm doar afinitatea în spațiul cu două dimensiuni. Orice segment va fi descompus în componenta lui paralelă cu axa de afinitate, care își conservă lungimea, și componenta lui perpendiculară, a cărei lungime se înmulțește cu valoarea absolută a raportului de afinitate. Teorema lui Pitagora permite atunci să se studieze lungimea segmentului imagine. Tot astfel, orice direcție va fi reperată în raport cu

direcția axei de afinitate, și studiul se va face cu ajutorul formulelor trigonometrice referitoare la tangentele unghiurilor.

IMAGINEA UNEI CIRCUMFERINȚE. Știm că, pînă la o translație, putem lua ca axă de afinitate (considerată ca axă a absciselor) o dreaptă care trece prin centru; ecuația circumferinței

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{1}$$

devine, prin afinitatea de raport k,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

unde $b = |k| \cdot a$, ecuația unei curbe numite *elipsă*.

În felul acesta, orice elipsă este definită ca imagine a unei circumferințe prin afinitate ortogonală, așa că ea are proprietățile afine ale cercului, de pildă: centru de simetrie, axe de simetrie oblice care trec prin acest centru, proprietățile polilor și polarelor (cu excepția perpendicularității polarei pe dreapta care unește punctul cu centrul și, firește, a proprietăților referitoare la cercurile ortogonale auxiliare).

II. Deplasări și antideplasări

1. Introducere

Amintim definiția generală a unei transformări punctuale *afine* a unui spațiu E pe el însuși: Fiind date o origine O, o bază $\mathfrak{B}$ de reper, și imaginile lor O' și $\mathfrak{B}'$, fiecărui punct M reperat plecînd de la $\{O, \mathfrak{B}\}$ i se asociază punctul M' *de aceleași coordonate* în raport cu $\{O', \mathfrak{B}'\}$. În felul acesta, transformarea este produsul translației de vector $\mathbf{OO'}$ și al unei transformări punctuale în care O este invariant, transformare liniară a lui $\mathfrak{B}$ în $\mathfrak{B}'$.

În geometria metrică, transformarea se numește *izometrie* dacă, $\mathfrak{B}$ fiind ortonormală, baza $\mathfrak{B}'$ este și ea ortonormală. Într-adevăr, formulele care permit calculul distanței între două puncte cu ajutorul coordonatelor arată că, în acest caz, *toate distanțele vor fi invariante.*

$$(\forall M \text{ și } P,\ M'P' = MP)$$

Dacă, în plus, $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B}'$ au aceeași orientare, *unghiurile omoloage sînt și ele egale:* pentru oricare doi vectori $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$,

$$(\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2') = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \pmod{2\pi}.$$

În acest caz, transformarea se numește o *deplasare*, și despre figurile omoloage spunem că sînt *egale*, sau, mai adecvat, *congruente*.

Dacă, din contra, imaginea $\mathfrak{R}'$ a lui $\mathfrak{R}$ este de sens contrar celui al lui $\mathfrak{R}$, *orice unghi este opus imaginii sale:*

$$(\mathbf{V}_1', \mathbf{V}_2') = -(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \pmod{2\pi}.$$

Transformarea se numește o *antideplasare;* despre figurile omoloage spunem că sînt *antiegale*.

Teoremă fundamentală. *Relația de egalitate* (sau de antiegalitate) *este instrinsecă*, adică independentă de sistemul de referință $\{O, \mathfrak{R}\}$ folosit la definirea ei, baza trebuind însă, firește, să rămînă ortonormală, dar putînd să intervină totuși o schimbare de unitate.

1) **Spațiu cu o dimensiune.** Deplasarea $\{O, \mathbf{i}\} \overset{\mathfrak{D}}{\searrow\!\!\nearrow} \{O', \mathbf{i}'\}$ este definită de $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$, $\mathbf{OO}' = a\mathbf{i}$ și $\forall M$, $\mathbf{OM} = x\mathbf{i} \overset{}{\searrow\!\!\nearrow} \mathbf{O'M'} = x\mathbf{i}$.

Dacă noua bază $\{\omega, \mathbf{u}\}$ este definită prin

$$\begin{cases} \mathbf{O\omega} = d\mathbf{i} \\ \mathbf{u} = k\mathbf{i}, \end{cases}$$

ea are ca imagine pe $\{\omega', \mathbf{u}'\}$, cu

$$\begin{cases} \mathbf{O'\omega'} = \mathbf{O\omega} = d\mathbf{i} \\ \mathbf{u}' = \mathbf{u} = k\mathbf{i} \end{cases}$$

Transformarea poate fi deci definită cu ajutorul noii baze prin

$$\forall M,\ \boldsymbol{\omega}\mathbf{M} = X\mathbf{u} \overset{}{\searrow\!\!\nearrow} \boldsymbol{\omega}'\mathbf{M}' = X\mathbf{u},$$

unde $X = (x - d)/k$.

Este, în mod intrinsec, translația $\mathbf{MM}' = \mathbf{OO}' = \boldsymbol{\omega\omega}'$.

2) **Spațiu cu două dimensiuni.** Deplasarea

$$\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\} \overset{\mathfrak{D}}{\searrow\!\!\nearrow} \{O', \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$$

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \overset{\mathfrak{D}}{\searrow\!\!\nearrow} \mathbf{O'M'} = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$$

[illegible]efinită ca produs al unei translații $\mathbf{OO}'$ — despre care știm [illegible]trinsecă — cu o deplasare $\mathfrak{R}$ care lasă O invariant; spa[illegible]ul suferă o transformare liniară, $\mathbf{i}'$ și $\mathbf{j}'$ trebuind să fie

unitari şi perpendiculari, iar $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ să aibă acelaşi sens ca $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ştim (Cartea I, cap. 5, § I şi IV) că notînd

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = c\mathbf{i} + d\mathbf{j} \end{cases}$$

aceste condiţii se exprimă prin

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 & ad - bc = +1. \end{cases}$$

Aceasta înseamnă că există un unghi α definit pînă la $2k\pi$ care verifică

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha, \quad c = -\sin\alpha, \quad d = \cos\alpha,$$

de unde

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j} \end{cases}$$

sau, la fel de bine,

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos\alpha\,\mathbf{i}' - \sin\alpha\,\mathbf{j}' \\ \mathbf{j} = \sin\alpha\,\mathbf{i}' + \cos\alpha\,\mathbf{j}'. \end{cases}$$

Prin urmare, *o deplasare care este astfel încît O rămîne invariant este caracterizată printr-un unghi α.*

Fie $\mathbf{u}$ un vector oarecare şi $\mathbf{u}'$ imaginea lui,

$$\mathbf{u} = \rho(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}), \quad \mathbf{u}' = \rho(\cos\theta\,\mathbf{i}' + \sin\theta\,\mathbf{j}').$$

Egalitatea unghiurilor

$$(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = (\mathbf{i}', \mathbf{u}') \pmod{2\pi}$$

este echivalentă cu

$$\forall\mathbf{u}, (\mathbf{u}, \mathbf{u}') = (\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Prin urmare, imaginea M' a lui M prin $\mathcal{R}$ este definită prin

$$(\mathcal{R})\ OM = OM', \ (\mathbf{OM}, \mathbf{OM}') = \alpha \pmod{2\pi}.$$

O asemenea deplasare se numeşte *rotaţie* de centru O şi de unghi α. În felul acesta, rotaţia este definită prin $\mathcal{R}$ în mod intrinseca, aşa că dacă folosim o altă bază ortonormală

$$\mathbf{u} = \rho(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}), \ \mathbf{v} = \rho(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\ldots$$

definiția

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{OM}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$$

devine

$$\mathbf{OM} = X\mathbf{u} + Y\mathbf{v} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{OM}' = X\mathbf{u}' + Y\mathbf{v}'.$$

Prin urmare, orice deplasare plană $\mathcal{D}$ este produsul unei translații și al unei rotații. Unghiul α al rotației se numește *unghiul deplasării;* el nu depinde de perechea O, O' aleasă pentru definirea deplasării. Dar un calcul simplu arată că $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ asigură existența unui punct invariant $M_0(x_0, y_0)$, prin urmare *orice deplasare este o translație sau o rotație.*

3) **Spațiu cu 3 dimensiuni.** Studiu analog în ceea ce privește calculul, dar introducerea unui singur unghi nu mai este suficientă. Deoarece un punct M poate fi determinat pornind de la puncte date prin distanțe și unghiuri — elemente invariante — M' poate fi definit dînd perechi de puncte omoloage. Această posibilitate de a da o definiție intrinsecă dovedește că alegerea bazei $\{O, \mathcal{B}\}$ nu intervine în nici un fel.

Studiu analog pentru antideplasări, în spațiile cu 2 și cu 3 dimensiuni.

2. Studiul intrinsec al deplasărilor și al antideplasărilor

A) Spațiu cu o dimensiune

Orice deplasare este o *translație*:

$$\forall M,\ \mathbf{O'M'} = \mathbf{OM}$$

sau, la fel de bine,

$$\forall M,\ \mathbf{MM'} = \mathbf{OO'}.$$

Orice antideplasare este definită prin

$$\forall M,\ \mathbf{O'M'} = -\mathbf{OM},$$

de unde rezultă un punct invariant S, mijlocul lui OO':

$$\mathbf{O'S} = -\mathbf{OS},$$

care permite să se definească transformarea prin

$$\forall M,\ \mathbf{SM'} = -\mathbf{SM}:$$

Transformarea este o *simetrie* de centru S.

B) Spaţiu cu două dimensiuni

α) **Deplasări.** Am văzut că o deplasare în plan este produsul unei rotaţii de centru O arbitrar şi de unghi α cunoscut, şi al translaţiei $\mathbf{OO'}$ (produs necomutativ).

a) **Teoremă.** *În plan, o deplasare este definită cînd se dau două perechi de puncte omoloage:*

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \searrow\!\!\nearrow \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix}, \quad A'B' = AB.$$

Într-adevăr, deoarece putem alege sistemul de referinţă, vom lua originea în A, un vector unitar, $\mathbf{i}$, pe AB, şi un altul, $\mathbf{j}$, direct perpendicular pe $\mathbf{i}$, de unde — imaginile lor A', $\mathbf{i'}$ pe $A'B'$ şi $\mathbf{j'}$ direct perpendicular pe $\mathbf{i'}$. Corespondenţa este atunci definită prin

$$\forall M, \quad \mathbf{AM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \searrow\!\!\nearrow \mathbf{A'M'} = x\mathbf{i'} + y\mathbf{j'}.$$

Această manieră de a caracteriza triunghiurile egale conduce la un *caz de egalitate a triunghiurilor* care este fundamental, cu toate că enunţul lui este oarecum neobişnuit:

Egalitatea a două triunghiuri este caracterizată prin faptul că ele au o latură egală, înălţimea corespunzătoare egală — piciorul acestei înălţimi divizînd latura într-un acelaşi raport — şi, în plus, unghiurile drepte asociate (latură, înălţime) de acelaşi sens.

b) Să ne îndepărtăm şi mai mult de geometria analitică folosind corespondenţa biunivocă între perechea x, y şi perechea r, $\theta \pmod{2\pi}$ definită prin

$$r > 0, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

adică

$$\begin{cases} r = AM \\ \theta = (\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Obţinem enunţul intrinsec:

Enunţul I. *Deplasarea determinată prin*

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \searrow\!\!\nearrow \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix}, \quad A'B' = AB$$

este definită prin

$$\forall M,\ \begin{cases} A'M' = AM \\ (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'M'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AM}) \pmod{2\pi}, \end{cases} \tag{I}$$

ceea ce conduce la enunțul cazului de egalitate a triunghiurilor (numit, în general, „cazul al doilea"):

Egalitatea a două triunghiuri este caracterizată prin faptul că ele au două laturi respectiv egale, care cuprind între ele un unghi egal cu omologul lui, aceste unghiuri fiind orientate și definite pînă la 2π.

Unghiul deplasării este

$$\alpha = (\mathbf{AB},\ \mathbf{A'B'}) = (\mathbf{AM},\ \mathbf{A'M'}) \quad \forall M,$$

prin urmare, pe baza invarianței relației de paralelism,

$$\alpha = (\mathbf{V},\ \mathbf{V'})$$

oricare ar fi vectorul $\mathbf{V}$. Acest unghi se mai numește și *unghiul figurilor egale*.

c) Deoarece deplasarea este determinată de A, B; A', B' orice construcție a lui M' care pleacă de la M și de la aceste date va da o definiție intrinsecă a deplasării. În particular, sistemul

$$(\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'M'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AM}) \pmod{\pi}$$

$$(\mathbf{A'B'},\ \mathbf{B'M'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{BM}) \pmod{\pi}$$

determină perfect pe M'. Prin urmare:

Enunțul II. *Deplasarea determinată prin*

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \searrow\!\!\nearrow \begin{cases} A' \\ B' \end{cases},\ AB = A'B'$$

este definită prin

$$\forall M,\ \begin{cases} (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'M'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AM}) \pmod{\pi} \\ (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{B'M'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{BM}) \pmod{\pi}, \end{cases} \tag{II}$$

de unde — enunțul cazului de egalitate (numit „primul caz"):

Două triunghiuri sînt egale dacă au o latură egală cu omoloaga ei, cuprinsă între două unghiuri egale cu omoloagele lor, aceste unghiuri fiind orientate dar putînd fi considerate numai pînă la un π.

d) Dacă determinăm M' prin cele două distanţe $A'M' = AM$ şi $B'M' = BM$, punem în evidenţă un alt caz de egalitate, dar pentru a înlătura ambiguitatea, trebuie să asigurăm în plus că cele două unghiuri omoloage sînt de acelaşi sens. Acest al „treilea" caz de egalitate al triunghiurilor este folosit în studiul unor figuri particulare, însă în cadrul studiului general pe care-l intreprindem noi, el nu este prea comod de utilizat.

Noi vom continua expunerea folosind (I).

Teoremă. *În plan, două figuri egale derivă una din alta printr-o rotaţie sau, în mod excepţional, printr-o translaţie.*

Dacă unghiul α al figurilor este egal cu 0 (mod 2π), deplasarea este translaţia $\mathbf{AA'}$.

Fie deci $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. Ştim că o deplasare care are un punct invariant este o rotaţie al cărei centru este acel punct. Este suficient deci să demonstrăm existenţa unui punct invariant. Or, un asemenea punct O este definit prin (I) în care înlocuim M şi M' **cu** O:

$$\left\{\begin{array}{l} A'O = AO \\ (\mathbf{A'B}, \mathbf{A'O}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{AO}) \pmod{2\pi} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} OA' = OA \\ (\mathbf{OA}, \mathbf{OA'}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{array}\right.$$

ceea ce înseamnă că O este intersecţia mediatoarei lui AA' şi a arcului AA' perfect definit ca loc al punctelor P care verifică

$$(\mathbf{PA}, \mathbf{PA'}) = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Intersecţia există şi este unică. Ea este centrul O al rotaţiei anunţate; unghiul ei este α.

De notat că pentru $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ arcul devine segmentul de dreaptă AA', punctul O devine mijlocul lui AA', iar rotaţia este simetria de centru O.

PRODUS DE DEPLASĂRI. Deoarece relaţia de egalitate a două figuri este tranzitivă, produsul de deplasări este o deplasare. Considerînd transformarea identică drept o deplasare, vedem că mulţimea translaţiilor şi rotaţiilor planului formează un grup, *grupul deplasărilor.*

β) **Antideplasări.** Se demonstrează ca mai sus — folosind faptul că relaţia de antiegalitate este intrinsecă — că o antideplasare este definită printr-o pereche de puncte şi imaginile lor

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \searrow\!\!\nearrow \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix}, \quad A'B' = AB$$

cu ajutorul oricăruia din sistemele:

$$\forall M, \quad \begin{cases} A'M' = AM \\ (\mathbf{A'B'}, \mathbf{A'M'}) = -(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{I'}$$

şi

$$\forall M, \begin{cases} (\mathbf{A'B'}, \mathbf{A'M'}) = -(\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) \pmod{\pi} \\ (\mathbf{A'B'}, \mathbf{B'M'}) = -(\mathbf{AB}, \mathbf{BM}) \pmod{\pi}. \end{cases} \tag{II'}$$

Putem enunţa în particular, cele două cazuri de antiegalitate a triunghiurilor, analoage cazurilor de egalitate.

a) **Teoreme** (**geometrie plană**). *Orice antideplasare care are un punct invariant este o simetrie ortogonală axială.*

Într-adevăr, fie O punctul invariant şi A, A' o a doua pereche de puncte omoloage; dacă A şi A' sînt confundate, transformarea este simetria ortogonală în raport cu dreapta OA, iar dacă A şi A' sînt distincte, este simetria ortogonală în raport cu bisectoarea internă a lui $(\mathbf{OA}, \mathbf{OA'})$.

b) *Produsul a două simetrii ortogonale de axe concurente este o rotaţie*: el este, într-adevăr, o deplasare care are un punct invariant. Fie O acest punct, intersecţia celor două axe D_1, D_2 ale simetriilor; transformînd un punct A al lui D_1, vedem că unghiul de rotaţie este

$$\alpha = 2\,(D_1, D_2) \pmod{2\pi}.$$

Aceasta completează teorema deja analizată în geometria afină cu privire la produsul a două simetrii de *axe paralele* (aici, simetrii ortogonale); ştim că acest produs este o *translaţie* de vector

$$\mathbf{V} = 2\mathbf{h_1h_2},\ h_1 \in D_1,\ h_2 \in D_2,\ h_1h_2 \perp D_1.$$

RECIPROC, *orice deplasare este un produs de două simetrii ortogonale.*

1) TRANSLAŢIA de vector $\mathbf{V'}$: axele D_1 şi D_2 trebuie luate perpendiculare pe $\mathbf{V}$ şi la distanţa relativă $\mathbf{h_1h_2} = \mathbf{V}/2$.

2) ROTAȚIA de centru O și de unghi α: cele două axe trebuie să treacă prin O și să facă un unghi $(D_1, D_2) = \alpha/2 \pmod{\pi}$.

Vedem că, în fiecare caz, una — la alegere — din cele două axe de simetrie este supusă numai condiției de a avea o direcție dată, sau de a trece printr-un punct dat. Cealaltă se deduce apoi univoc.

c) Un produs de trei simetrii ortogonale este o antideplasare, și invers, orice antideplasare poate fi considerată, într-o infinitate de moduri, drept un produs de trei simetrii ortogonale. Într-adevăr, o simetrie ortogonală poate transforma un punct A ales arbitrar în imaginea lui dată, A'; rămîne atunci să facem o rotație în jurul lui A', adică un produs de două simetrii ortogonale. Putem, de asemenea, începe cu o simetrie ortogonală care transformă un vector ales $\mathbf{AB}$ într-un vector $\mathbf{AB}''$ echipolent cu $\mathbf{A'B'}$; rămîne atunci să facem o translație $\mathbf{AA'}$, adică un produs de două simetrii ortogonale de axe paralele.

Din această a doua descompunere în produs rezultă că, *în două figuri antiegale, toate unghiurile* $(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ *dintre doi vectori omologi au* — ca într-o simetrie ortogonală — *aceeași direcție a bisectoarei*, fie ea δ.

Să folosim acest rezultat pentru a descompune antideplasarea într-un produs particular: să luăm ca primă axă D_1 de simetrie ortogonală paralela la δ care trece prin mijlocul lui AA'; rămîne atunci să facem o translație $\mathbf{A''A'}$ paralelă cu δ. Rezultă de aici că dreapta D_1 trece de asemenea prin mijlocul oricărui segment MM' care unește două puncte omoloage (fiindcă $M''M'$ este paralel cu D_1, oricare ar fi M) și această condiție este suficientă, de unde enunțul:

Orice antideplasare poate fi descompusă — și aceasta într-un singur mod — într-un produs al unei simetrii ortogonale și al unei translații de vector paralel cu axa de simetrie. Acest produs este, de altfel, *comutativ*.

În felul acesta, în plan, simetria ortogonală în raport cu o dreaptă este izometria fundamentală care dă, prin produsele sale, toate deplasările și antideplasările. Faptul că este o transformare reciprocă face din ea un instrument deosebit de comod, așa cum o arată aplicația care urmează:

Produs de două deplasări

Fie două deplasări $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ de unghiuri α_1 și α_2. Produsul lor este o deplasare de unghi $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

În cazul $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ produsul este o translaţie căreia îi căutăm vectorul. În cazul $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$, el este o rotaţie, căreia îi căutăm centrul. Oricare ar fi cazul, să descompunem fiecare deplasare în produs de două simetrii.

$$\mathfrak{D}_1 = S_1 \times S_1', \quad \mathfrak{D}_2 = S_2 \times S_2'.$$

Putem alege totdeauna axa lui S_1' confundată cu cea a lui S_2. Atunci

$$\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 = (S_1 \times S_1') \times (S_2 \times S_2') =$$
$$= S_1 \times (S_1' \times S_2) \times S_2' = S_1' \times S_2'.$$

Prin urmare, dacă axele lui S_1 şi S_2 sînt paralele, deducem de aici vectorul translaţiei produs; iar dacă aceste axe sînt concurente într-un punct O, acest punct este centrul căutat al rotaţiei produs.

EXERCIŢIU: DIFERITE CONSTRUCŢII ALE CENTRULUI O AL ROTAŢIEI

$$\begin{cases} A \searrow \nearrow A' \\ B \searrow \nearrow B' \end{cases}$$

Fie J punctul de intersecţie al dreptelor AB şi $A'B'$, ceea ce exclude cazul simetriei în raport cu un punct. Se demonstrează că centrul O al rotaţiei este

1) Pe mediatoarele lui AA' şi BB'.
2) Pe circumferinţele AJA' şi BJB'.
3) Pe dreapta dusă prin J, *bisectoare exterioară* a axelor omoloage care poartă pe AB şi pe $A'B'$.
4) Centrul cercului circumscris triunghiului $J^{-1}JJ'$, unde J^{-1} este antecedentul lui J, iar J' consecventul acestuia în transformare.

C) **Spaţiu cu trei dimensiuni**

Ca şi în plan, o deplasare este produsul unei translaţii şi al unei deplasări cu un punct invariant care defineşte o transformare liniară a spaţiului vectorial. La fel pentru antideplasări. Presupunînd că a fost aleasă baza, pentru a pune în evidenţă elementele invariante ale transformării liniare, putem indica imediat trans-

formările cele mai simple care ar putea servi, prin produsele lor, la formarea celorlalte:

$$a)\begin{cases}\mathbf{i}' = \mathbf{i}\\ \mathbf{j}' = \mathbf{j}\\ \mathbf{k}' = \mathbf{k}\end{cases}\quad \textit{transformare identică}$$

$$b)\begin{cases}\mathbf{i}' = \mathbf{i}\\ \mathbf{j}' = \mathbf{j}\\ \mathbf{k}' = -\mathbf{k}\end{cases}\quad \textit{antideplasare: simetrie ortogonală în raport cu planul } O\mathbf{ij}\text{, fie el } P.$$

Pentru un vector $\mathbf{V}$ paralel cu P, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$.
Pentru un vector $\mathbf{V}$ perpendicular pe P, $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}$.

$$c)\begin{cases}\mathbf{i}' = \mathbf{i}\\ \mathbf{j}' = -\mathbf{j}\\ \mathbf{k}' = -\mathbf{k}\end{cases}\quad \textit{deplasare: simetrie ortogonală în raport cu dreapta } O\mathbf{i}\text{, fie ea } D.$$

Această deplasare se numește *răsturnare*, sau întoarcere. Vom vedea că ea este o rotație de unghi π.
Dacă un vector $\mathbf{V}$ este paralel cu D, $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$.
Dacă $\mathbf{V}$ este ortogonal lui D, $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}$.

$$d)\begin{cases}\mathbf{i}' = -\mathbf{i}\\ \mathbf{j}' = -\mathbf{j}\\ \mathbf{k}' = -\mathbf{k}\end{cases}\quad \textit{antideplasare: simetrie în raport cu punctul } O.$$

Pentru orice vector $\mathbf{V}$, avem $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}$.

α) **Studiu intrinsec al cazului general.** *O deplasare este definită prin trei puncte necoliniare și omoloagele lor,*

$$\begin{cases}A\\ B\\ C\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}A'\\ B'\\ C'\end{cases}\quad\text{care verifică}\quad\begin{cases}A'B' = AB\\ A'C' = AC\\ B'C' = BC\end{cases}$$

Să luăm ca reper O în A, $\mathbf{i}$ pe $\mathbf{AB}$, $\mathbf{j}$ perpendicular pe $\mathbf{i}$ în planul ABC de partea lui AB în care se află C, și $\mathbf{k}$ vectorul care completează baza ortonormală. Deducem de aici imaginile O', $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$.

Deplasarea este definită atunci prin condiţiile necesare şi suficiente

$$\forall M, \begin{cases} A'M' = AM, \\ B'M' = BM \\ (C', \mathbf{A'B'}, M') = (C, \mathbf{AB}, M) \bmod (2\pi) \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

sau, la fel de bine, prin

$$\forall M, \begin{cases} (C', \mathbf{A'B'}, M') = (C, \mathbf{AB}, M) \pmod{\pi} \\ (A', \mathbf{B'C'}, M') = (A, \mathbf{BC}, M) \pmod{\pi} \\ (B', \mathbf{C'A'}, M') = (B, \mathbf{CA}, M) \pmod{\pi} \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

La fel pentru antiegalitate, schimbînd sensul lui **k'** în baza imagine şi schimbînd semnele tuturor diedrelor în primii membri ai sistemelor.

De notat că, în spaţiu, triunghiurile ABC, $A'B'C'$ care au toate cele trei laturi respectiv egale pot fi considerate la fel de bine egale sau antiegale.

β) **Clasificarea deplasărilor în spaţiu.** *a*) DEPLASARE CU DOUĂ PUNCTE INVARIANTE. Să luăm A şi B în aceste puncte şi C în afara dreptei AB. Sistemul (I) devine

$$\forall M, \begin{cases} AM' = AM \\ BM' = BM \\ (C', \mathbf{AB}, M') = (C, \mathbf{AB}, M) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

sau, pe baza teoremei lui Chasles pentru diedrele cu aceeaşi muchie:

$$\forall M, \begin{cases} AM' = AM \\ BM' = BM \\ (M, \mathbf{AB}, M') = (C, \mathbf{AB}, C') = \alpha \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (\mathrm{R})$$

Restricţia acestei transformări la un plan p perpendicular pe AB, plan care este global invariant, este o rotaţie plană al cărei centru este pe AB. Să numim **d** dreapta AB orientată în sensul **AB**, ceea ce ne permite să orientăm planul p; unghiul acestei rotaţii este atunci $\alpha \pmod{2\pi}$.

Deplasarea spaţiului se numeşte o *rotaţie*; **d** este axa ei şi

$$\alpha \pmod{2\pi}$$

este unghiul ei.

Orice vector $\mathbf{V}$ paralel cu d dă $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$.

Orice vector $\mathbf{V}$ perpendicular pe d dă, în planul perpendicular pe d care îl conţine, o imagine $\mathbf{V}'$ astfel încît

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \alpha \pmod{2\pi},$$

Orice alt vector poate fi descompus în doi vectori unul paralel cu d celălalt perpendicular pe d, aşa că el face cu imaginea lui un unghi diferit de 0 şi α.

Regăsim pentru $\alpha = \pi$ simetria ortogonală în raport cu d, numită şi răsturnare.

b) TEOREMĂ. *Orice deplasare care are un punct invariant este o rotaţie.*

Fie A punctul invariant cunoscut; este vorba să demonstrăm că mai există încă cel puţin unul, fie el O. Un asemenea punct va fi caracterizat, conform sistemului (I), prin

$$\begin{cases} B'O = BO \\ (C', \mathbf{AB}', O) = (C, \mathbf{AB}, O) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Dar acum nu mai putem transforma egalitatea între diedre aşa cum am făcut în plan, fiindcă teorema lui Chasles nu se aplică la diedre cu muchii diferite. (Sub o altă formă, este vorba de a găsi un punct invariant al unei sfere de centru A, care este — evident — global invariantă la deplasare.)

Vom reduce totul la o problemă de geometrie plană considerînd, odată cu perechea dată B, B', o altă pereche D, D' care este astfel încît D' este confundat cu B; aceasta înseamnă că D este antecedentul lui B în transformarea dată, punct perfect determinat de (I).

Cele trei puncte D, B, B' sînt echidistante de A; acest punct A se proiectează deci ortogonal în planul DBB' în centrul ω al cercului circumscris acestui triunghi. Acest plan este rectiliniul diedrelor de muchie $\mathbf{A\omega}$, aşa că avem

$$(D, \mathbf{A\omega}, B) = (\mathrm{B}, \mathbf{A\omega}, B') = \alpha \pmod{2\pi}.$$

Aceasta înseamnă că ADB are ca imagine pe ABB' prin rotaţia de axă $\mathbf{A\omega}$ şi de unghi α. Deoarece aceste trei perechi de puncte determină o deplasare unică, conchidem că *deplasarea dată este această rotaţie.*

Am văzut că o rotaţie lasă invarianţi vectorii paraleli cu axa de rotaţie; pe de altă parte, orice deplasare este produsul unei translaţii şi al unei deplasări care lasă un punct invariant; obţinem astfel enunţul:

Orice deplasare lasă invarianți vectorii unei direcții δ *și numai ai uneia singure* (afară numai dacă nu este o translație, caz în care toți vectorii se conservă). *Ea este produsul unei translații și al unei rotații în jurul unei axe paralele cu direcția invariantă.*

Unghiul acestei rotații este determinat: dacă $\mathbf{V}$ este un vector perpendicular pe δ, acest unghi este $\alpha = (\mathbf{V}, \mathbf{V}')$; este *unghiul deplasării.*

c) DEPLASARE ELICOIDALĂ. În descompunerea precedentă, singura condiție la care este supusă translația este să transforme un punct arbitrar ales în imaginea lui. Vom găsi o descompunere deosebit de interesantă și determinată unic impunîndu-i condiția ca *translația să fie paralelă cu direcția invariantă* δ.

Pentru a determina deplasarea, să considerăm un vector $\mathbf{AB}$ paralel cu δ, prin urmare $\mathbf{A'B'} = \mathbf{AB}$, și un vector $\mathbf{AC}$ perpendicular pe δ; imaginea lui, $\mathbf{A'C'}$, dă deci unghiul deplasării $(\mathbf{AC}, \mathbf{A'C'}) = \alpha$, sau, și mai bine, proiectînd A' și C' în A'' și C'' ortogonal pe planul perpendicular pe δ dus prin $\mathbf{AC}$,

$$(\mathbf{AC}, \mathbf{A''C''}) = \alpha.$$

Însă, în planul p, vectorii de aceeași lungime $\mathbf{AC}$ și $\mathbf{A''C''}$ considerați drept figuri egale derivă unul din altul printr-o rotație de unghi α în jurul unui anumit punct O pe care știm să-l construim. Fie z paralela la δ dusă prin O. Rotația plană considerată în jurul lui O este restricția unei rotații a spațiului în jurul lui z care transformă A în A'' și C în C''; punctul B are o imagine B'' astfel încît $\mathbf{A''B''} = \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$. Produsul acestei rotații cu translația $\mathbf{A''A'} = \mathbf{B''B'} = \mathbf{C''C'}$ este o deplasare care transformă ABC în $A'B'C'$: este deci deplasarea considerată.

Ne rămîne să remarcăm că produsul acestei rotații cu această translație este *comutativ*. Deplasarea obținută, produs al unei rotații și al unei translații al cărei vector este paralel cu axa de rotație, se numește *deplasare elicoidală*. Vectorul translației, axa și unghiul de rotație se numesc respectiv *vectorul*, *axa* și *unghiul deplasării elicoidale.*

CONCLUZIE. *Orice deplasare în spațiul cu trei dimensiuni este o deplasare elicoidală*, redusă eventual la o translație ($\alpha = 0$) sau la o rotație ($\mathbf{V} = 0$), sau la transformarea identică ($\alpha = 0$ și $\mathbf{V} = 0$).

d) **Descompunerea unei deplasări în produs de răsturnări** (simetrii ortogonale în raport cu o dreaptă, adică rotații de unghi π).

1) *Produsul a două răsturnări în jurul unor axe paralele* z_1, z_2 *este o translaţie* fiindcă vectorii paraleli cu z_1 sînt invarianţi, şi la fel şi vectorii perpendiculari pe z_1. Vectorul translaţiei produs este determinat luînd un punct H_1 pe z_1; dacă H_2 este proiecţia acestui punct pe z_2, vectorul în cauză este $\mathbf{V} = \mathbf{H_1H'_1} = 2\,\mathbf{H_1H_2}$.

Invers, *orice translaţie poate fi descompusă în produs de două răsturnări de axe paralele* dintre care una este supusă doar la condiţia că este ortogonală vectorului $\mathbf{V}$ al translaţiei, cealaltă fiind atunci determinată.

2) *Produsul a două răsturnări de axe concurente este o rotaţie*, fiindcă punctul de concurenţă O este invariant. Direcţia orientată invariantă δ este perpendiculara pe planul z_1z_2, aşa că axa z a rotaţiei este perpendiculară în O pe acest plan z_1z_2; în fine, unghiul rotaţiei se obţine transformînd un punct de pe z_1. Găsim astfel

$$\alpha = 2(z_1, z_2) \pmod{2\pi},$$

unghi orientat în jurul lui $\mathbf{z}$.

Invers, *orice rotaţie poate fi descompusă în produs de două răsturnări*, una din axe fiind supusă numai la condiţia de a se sprijini pe axa de rotaţie şi de a fi perpendiculară pe aceasta; cealaltă axă se deduce atunci univoc.

3) *Produsul a două răsturnări în jurul unor axe nesituate într-un acelaşi plan este o deplasare elicoidală a cărei axă este perpendiculara comună* z *pe axele date* z_1 *şi* z_2. Dacă H_1H_2, $H_1 \in z_1$, $H_2 \in z_2$ este pe această perpendiculară comună, *vectorul* deplasării elicoidale este

$$\mathbf{V} = 2\,\mathbf{H_1H_2}$$

iar *unghiul* ei este $\alpha = 2(z_1, z_2) \pmod{2\pi}$ socotit în jurul lui $\mathbf{H_1H_2}$.

Toate acestea rezultă imediat din cele precedente introducînd o axă auxiliară de răsturnare z', paralelă cu z_2 şi care trece prin H_1. Într-adevăr, numind R şi T o răsturnare şi o translaţie,

$$R(z_1) \times R(z_2) = R(z_1) \times R(z') \times R(z') \times R(z_2) =$$
$$= Rot\ (z, \alpha) \times T(\mathbf{V}).$$

Invers, *orice deplasare elicoidală poate fi descompusă în produs de două răsturnări*, una din axe fiind supusă numai la condiţia de a se sprijini pe axa deplasării date şi de a fi perpendiculară pe aceasta; cealaltă axă se deduce atunci univoc.

4) *Aplicație la determinarea elementelor deplasării produs de două deplasări date.* Este suficient să descompunem fiecare deplasare dată în produs de două răsturnări, axa celei de a doua răsturnări care provine din prima deplasare fiind confundată cu axa primei răsturnări care provine din a doua deplasare: operația este totdeauna posibilă, fiindcă două drepte au totdeauna o perpendiculară comună.

În cazul unui număr oarecare de deplasări, se procedează din aproape în aproape.

γ) **Studiul antideplasărilor.** *a)* REDUCEREA UNEI ANTIDEPLASĂRI. O antideplasare definită prin

$$(O,\ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \searrow\!\!\nearrow (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'),$$

unde cele două baze ortogonale sînt de sensuri diferite, este — în mod evident — produsul unei deplasări

$$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \searrow\!\!\nearrow (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', -\mathbf{k}')$$

și al unei simetrii planare ortogonale

$$(O, \mathbf{i}', \mathbf{j}', -\mathbf{k}') \searrow\!\!\nearrow (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$$

sau, la fel de bine, al unei deplasări

$$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \searrow\!\!\nearrow (O', -\mathbf{i}', -\mathbf{j}', -\mathbf{k}')$$

și al unei simetrii centrale

$$(O', -\mathbf{i}', -\mathbf{j}', -\mathbf{k}') \searrow\!\!\nearrow (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}').$$

Să considerăm această din urmă descompunere: În deplasare există o direcție invariantă δ astfel încît dacă $\mathbf{V}$ este un vector paralel cu δ, imaginea lui $\mathbf{V}_1$ îi este egală: $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}$. Însă, în simetria în raport cu punctul, imaginea lui $\mathbf{V}_1$ îi este opusă $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}_1$, prin urmare $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}$. În felul acesta, *în orice antideplasare există o direcție* δ *astfel încît, dacă* $\mathbf{V}$ *este paralel cu* δ, $\mathbf{V}' = -\mathbf{V}$.

Fie deci p un plan perpendicular pe această direcție δ; pe baza simetriei în raport cu p, figura F devine o figură F'' antiegală cu F, deci egală cu F' și care dă F' printr-o deplasare elicoidală de axă z paralelă cu δ. Prin urmare, *orice antideplasare este produsul unei simetrii în raport cu un plan și al unei deplasări elicoidale de axă perpendiculară pe acest plan.* Dar vectorul aces-

teia din urmă poate fi anulat printr-o alegere convenabilă a planului p: este suficient să facem planul să treacă la distanțe egale de două puncte omoloage A, A', De unde concluzia: *Orice antideplasare este produsul unei simetrii planare ortogonale și al unei rotații în jurul unei axe perpendiculare pe acest plan.* Acest produs este *comutativ*. Descompunerea este unică.

b) PRODUS DE SIMETRII PLANARE ORTOGONALE. *Dacă cele două plane sînt paralele*, produsul conservă vectorii paraleli cu planele, precum și vectorii perpendiculari: deplasarea produs este deci *o translație*. Luînd pe H_1 în primul plan, punct care se proiectează în H_2 pe al doilea plan, vectorul translației este $2\mathbf{H_1H_2}$.

Dacă cele două plane sînt concurente după o dreaptă z, această dreaptă este loc de puncte invariante, prin urmare deplasarea produs este o *rotație*; unghiul ei este $\alpha = 2(P_1, P_2) \pmod{2\pi}$, socotit în jurul lui z.

Invers, o translație sau o rotație pot fi descompuse în produs de două simetrii ortogonale în raport cu două plane, unul din aceste plane fiind supus numai la condiția de a avea o direcție dată, sau de a trece printr-o dreaptă dată, celălalt plan deducîndu-se atunci univoc.

O deplasare elicoidală generală este deci produsul a 4 simetrii planare ortogonale. Orice antideplasare este produsul a trei simetrii planare ortogonale, ultimele două plane fiind perpendiculare pe primul, sau, dacă preferați, primele două plane fiind perpendiculare pe al treilea.

c) PRODUS DE SIMETRII CENTRALE. În produsul a două simetrii centrale, de centre O_1, O_2, orice vector este egal cu omologul lui: $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$. Deplasarea produs este deci o *translație*. Vectorul acestei translații este $2\ \mathbf{O_1O_2}$.

Simetria centrală fiind reciprocă,

$$[S_{O_1} \times S_{O_2} = T] \Longrightarrow S_{O_1} = T \times S_{O_2} \text{ și } S_{O_2} = S_{O_1} \times T.$$

d) PRODUSUL UNEI SIMETRII PLANARE ȘI AL UNEI SIMETRII CENTRALE. Fie p planul simetriei planare ortogonale și O centrul simetriei centrale. Orice vector perpendicular pe p se conservă în deplasare produs, care este deci o deplasare elicoidală de axă z perpendiculară pe p. Considerînd omologul lui O, vedem că axa acestei deplasări este perpendiculara pe p care trece prin O, și determinăm vectorul deplasării elicoidale: Fie O_1 punctul proiecției lui O în planul p; în produsul $S(O) \times S(p)$, vectorul translației este

$2\,\mathbf{O_1O}$; în produsul $S(O) \times S(p)$, vectorul translației este $2\,\mathbf{OO_1}$. În sfîrșit, unghiul deplasării elicoidale se obține transformînd un vector paralel cu planul p: acest unghi are valoarea π: rotația deplasării elicoidale este deci o răsturnare. Dacă centrul O este dat în planul p, produsul se reduce la această răsturnare.

CONCLUZIE. Mulțimea simetriilor planare generează grupul izometriilor. Mulțimea simetriilor centrale nu generează decît un subgrup caracterizat prin invarianța direcțiilor neorientate.

D) **Mișcarea unei figuri nedeformabile**

Considerăm o mulțime de puncte care depind de un parametru într-un mod continuu și astfel încît mulțimile F_0 și F_1 asociate unor valori t_0, t_1 *oarecare* ale parametrului se corespund prin deplasare. Interpretînd parametrul t ca o măsură a timpului, spunem că F este *în mișcare*. Locul fiecărui punct M al lui F este *traiectoria* lui M; dacă O este un punct fix în raport cu reperul spațiului, de exemplu originea coordonatelor, vectorul derivată a lui $\mathbf{OM}$ la un moment dat se numește *viteza* punctului M în acel moment. Studiul mișcărilor unei figuri nedeformabile este deci o parte a cinematicii corpurilor solide. Indicăm numai cîteva rezultate utile, în geometria elementară.

a) **Mișcare de translație.** Este cazul în care două poziții F_0, F_1 derivă una din alta prin deplasare-translație, oricare ar fi t_0 și t_1. Traiectoriile a două puncte M, P sînt egale și derivă una din alta prin translație, fiindcă $\mathbf{MP} = \mathbf{M_0P_0}$, oricare ar fi t. În plus

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP},$$

unde $\mathbf{MP}$ este un vector constant. Prin urmare, în fiecare moment, viteza lui P este egală cu cea a lui M, oricare ar fi P. Această viteză se numește *viteza mișcării* în acel moment.

b) **Mișcare de rotație.** Este o mișcare astfel încît punctele unei axe rămîn fixe, așa că două poziții F_0 și F_1 derivă una din alta printr-o rotație de axă fixă z.

Prin urmare, traiectoria fiecărui punct este purtată de o circumferință de axă z. Vitezele, tangente la fiecare traiectorie, sînt proporționale, în fiecare moment, cu distanța d a punctului pînă la axă; notăm $V = \omega d$ și convenim să luăm pe z un vector $\mathbf{\Omega}$ de măsură ω într-un sens astfel încît triedrul $\mathbf{OM}, \mathbf{V}, \mathbf{\Omega}$ să fie direct. Acest vector se numește *vector rotație* și măsura lui, ω,

este *viteza unghiulară a mişcării* în momentul considerat. Dacă z este orientată, ω este prevăzut cu un semn, în funcţie de sensul mişcării. Mişcarea este determinată dacă este dat z şi funcţia ω de t. Conform definiţiei produsului vectorial, $\mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$, pentru orice punct M.

c) **Mişcare elicoidală.** Este o mişcare astfel încît două poziţii oarecare F_0, F_1 derivă una din alta printr-o deplasare elicoidală cu proprietăţile

1) axa ei z este fixă,

2) vectorul translaţie este proporţional cu unghiul de rotaţie.

Orice punct de pe z îşi are deci traiectoria situată pe această dreaptă. Orice punct nesituat pe z descrie o traiectorie situată pe un cilindru de revoluţie de axă z, astfel încît cota ei măsurată pe z este proporţională cu unghiul θ cu care M se roteşte în semiplanul $\mathbf{z}$, M; aceasta înseamnă că această curbă este definită de

$$z = h(\theta - \theta_0).$$

Ea se numeşte *elice circulară*. *Pasul* elicii este unghiul $2\pi h$.

Toate punctele M descriu deci arce de elici circulare de acelaşi pas. Vitezele într-un acelaşi moment au proiecţii pe z, $\mathbf{V}_z$, egale, şi o componentă perpendiculară pe z proporţională cu distanţa d de la punct pînă la axa z: ele sînt respectiv vitezele pe care le-ar avea punctul în translaţia considerată singură şi în rotaţia considerată singură. Pentru punctele unei aceleiaşi elici, la un acelaşi moment, aceste componente au aceeaşi măsură, de unde rezultă că tangentele în diferite puncte ale elicii fac un acelaşi unghi cu axa z. Viteza este deci definită de

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_z + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{OM},$$

unde O este un punct de pe z.

d) **Mişcarea tangentă la un moment dat.** În cazul general, să considerăm la un moment dat t_0 poziţia F_0; fie F_1 poziţia la un moment $t_1 = t_0 + \Delta t$. Cele două figuri egale F_0, F_1 derivă una din alta printr-o deplasare elicoidală care, t_0 fiind fixat, depinde de t_1. Printre mişcările elicoidale care fac să se treacă de la F_0 la F_1 între momentele t_0 şi t_1 există o mişcare elicoidală uniformă, numită *mişcare medie* între t_0 şi t_1: aceasta înseamnă că atît viteza de translaţie, cît şi viteza unghiulară de rotaţie, vor fi constante. Orice coardă M_0M_1 este coardă a traiectoriei adevărate

şi, în acelaşi timp, a elicii mişcării medii considerate. Dacă facem acum pe Δt să tindă către 0, axa mişcării medii, viteza ei de translaţie şi viteza ei unghiulară de rotaţie tind în general către limite; aceste limite sînt axa, viteza de translaţie şi viteza de rotaţie ale unei mişcări elicoidale care se numeşte *mişcare elicoidală tangentă* mişcării studiate. (Se mai spune şi *mişcare instantanee*.) În momentul considerat, tangentele la traiectoriile punctelor M, P, ... fac unghiuri egale cu axa mişcării tangente.

În cazul mişcării unei figuri plane în planul ei, mişcarea tangentă este (în general) o rotaţie; dacă C_0 este centrul acestei rotaţii la momentul t_0, *normalele în punctele* M_0 *la toate traiectoriile punctelor* M *ale figurii sînt concurente în* C_0.

Aceste teoreme permit studiul tangentelor la anumite curbe definite pe cale cinematică ca traiectorii ale punctelor unei figuri supuse la o mişcare determinată.

EXEMPLU: Un segment PQ de lungime constantă se mişcă în aşa fel încît extremităţile lui rămîn respectiv pe două drepte $x'Ox$, $y'Oy$. Un punct M formează cu PQ o figură care rămîne egală cu ea însăşi. Să se construiască, în fiecare poziţie, tangenta la locul lui M.

Direcţiile vitezelor lui P şi Q determină centrul C_0 al rotaţiei tangente, prin urmare normala C_0M_0.

CAZ PARTICULAR. $x'Ox$ şi $y'Oy$ perpendiculare, iar M este pe dreapta PQ.

Locul lui M este o elipsă (definită mai sus ca imaginea unui cerc prin afinitate ortogonală), fiindcă dacă notăm

$$\mathbf{MP} = a\mathbf{u}, \quad \mathbf{MQ} = b\mathbf{u}, \qquad (\mathbf{Ox}, \mathbf{u}) = \theta,$$

coordonatele lui M sînt

$$x = -b\cos\theta, \qquad y = -a\sin\theta$$

şi ecuaţia locului lui M este

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Dreapta PQ poate fi materializată, şi elipsa este studiată, în felul acesta, prin *metoda benzii de hîrtie*.

REMARCĂ. Necesitatea, stringentă în fizică, de a studia mişcări de corpuri solide şi diferite poziţii ale acestora justifică, în

mod firesc, introducerea noţiunilor de egalitate şi de deplasare Din acest punct de vedere, antideplasările sînt mult mai puţin importante. Însăşi noţiunea de figuri asemenea între ele, imagini ale unui acelaşi solid reprezentat la scale diferite, poate fi considerată drept fundamentală pentru reprezentarea noastră despre spaţiul fizic, figurile egale putînd fi deosebite ca formînd o submulţime remarcabilă a unei mulţimi de figuri asemenea. În expunerea de faţă, vom deduce acum similitudinea din egalitate.

III. Similitudinea

a) Diviziuni asemenea

ÎN GEOMETRIA CU O DIMENSIUNE, spunem că corespondenţa între punctele M de abscisă X şi punctele m de abscisă x este o similitudine dacă ea este definită prin

$$\mathbf{M_0M} = a\,\mathbf{m_0m}, \text{ de unde } X = ax + b,\ a \neq 0.$$

Dacă $a = 1$, ştim că aceasta este o *translaţie*. Dacă $a \neq 1$, există un punct invariant $X_0 = x_0 = b/(1 - a)$, şi corespondenţa este definită prin

$$X - X_0 = a(x - x_0)$$

adică $\mathbf{m_0M} = a\,\mathbf{m_0m}$. Ea este deci o *omotetie*.

Spunem că M şi m determină pe dreaptă *două diviziuni asemenea*.

ÎN GEOMETRIA CU MAI MULT DE O DIMENSIUNE, dacă două drepte poartă respectiv două puncte M (de abscisă X) şi m (de abscisă x) legate prin corespondenţa $X = ax + b$, vom spune, în continuare, că *cele două drepte poartă diviziuni asemenea*; în particular, dacă $a = 1$ sau $a = -1$, acestea sînt *diviziuni egale*. Printr-o alegere convenabilă a sensurilor pozitive ale absciselor, putem presupune a *pozitiv*, iar atunci cînd a este diferit de 1, putem considera punctele omoloage m_0 şi M_0 de abscise egale $X_0 = x_0$. Rezultă de aici că corespondenţa între cele două drepte poate fi definită ca produsul unei deplasări elicoidale şi al unei omotetii de raport a pozitiv.

b) Transformarea prin similitudine

Se numeşte *similitudine produsul unei deplasări şi al unei omotetii de raport pozitiv.*

În spaţiul cu două dimensiuni, ipoteza despre semnul raportului de omotetie nu este decît o comoditate de importanţă secundară, fiindcă acolo orice omotetie de raport negativ este produsul unei simetrii în raport cu un punct (rotaţie), şi al unei omotetii de raport pozitiv. Dimpotrivă, în spaţiul cu trei dimensiuni, precizarea este esenţială, fiindcă simetria în raport cu un punct este o antideplasare: produsul unei deplasări cu o omotetie de raport negativ este deci produsul unei antideplasări cu o omotetie de raport pozitiv.

În mod analog, se numeşte *antisimilitudine produsul unei antiegalităţi şi al unei omotetii de raport pozitiv.*

CARACTERIZAREA FIGURILOR ASEMENEA, adică a mulţimilor de puncte M şi M' asociate printr-o similitudine.

1) **În plan.** Fie două perechi de puncte omoloage A, A'; B, B'; să introducem $A'B' = kAB$. Sistemele (I) şi (II) care caracterizează egalitatea dau, ţinînd seama de omotetie, sistemele necesare:

$$(S_1) \qquad \forall M, \begin{cases} (\mathbf{A'B'}, \mathbf{A'M'}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{AM}) \pmod{2\pi} \\ A'M' = kAM \end{cases}$$

$$(S_2): \qquad \forall M, \begin{cases} (A'B', A'M') = (AB, AM) \pmod{\pi} \\ (A'B', B'M') = (AB, BM) \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Oricare dintre aceste sisteme este suficient, fiindcă figura (F_1), mulţime a punctelor M definite prin $\mathbf{A'M_1} = k^{-1}\,\mathbf{A'M'}$, derivă din (F), mulţime a punctelor M, prin deplasare, şi din (F'), mulţime a punctelor M', prin omotetie.

Mulţimea similitudinilor formează un grup, fiindcă relaţiile exprimate prin sistemele scrise sînt, în mod evident, tranzitive: produsul a două similitudini este o similitudine, transformarea identică face parte din această mulţime, şi orice similitudine determină o similitudine inversă.

Corespondenţa este definită de două perechi A, A'; B, B', dar este clar că ea poate fi definită într-o infinitate de moduri ca produs

al unei deplasări și al unei omotetii de raport pozitiv. Din teorema care urmează decurge o descompunere canonică, adică supusă la condiții suplimentare care o fac să fie perfect determinată.

Teoremă. *În plan, orice similitudine lasă un punct invariant.*

Ca la teorema analoagă referitoare la deplasări, să considerăm de exemplu sistemul (S_1). Un punct invariant O este caracterizat prin

$$\left\{\begin{array}{l} A'O = k \cdot AO \\ (\mathbf{A'B'}, \mathbf{A'O}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{AO}) \pmod{2\pi} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A'O = k \cdot AO \\ (\mathbf{OA}, \mathbf{OA'}) = (\mathbf{AB}, \mathbf{A'B'}) \pmod{2\pi}. \end{array}\right.$$

Prin urmare, O este punctul determinat ca intersecție a unui arc de cerc cunoscut, limitat la A, A', și a unui cerc care este astfel încît A și A' sînt în regiuni diferite în raport cu el.

Scris cu ajutorul punctului O, sistemul (S_1) devine

$$\left\{\begin{array}{l} OM' = k \cdot OM \\ (\mathbf{OM}, \mathbf{OM'}) = \alpha \pmod{2\pi}. \end{array}\right.$$

Transformarea apare deci ca fiind produsul, comutativ, al unei rotații de centru O și de unghi α, și al unei omotetii de același centru O și de raport k.

În felul acesta, *o similitudine poate fi descompusă, și aceasta într-un singur mod, într-un produs al unei omotetii și al unei rotații al cărei centru este centrul de omotetie.* De unde definiția centrului O, a raportului k, și a unghiului $\alpha \pmod{2\pi}$ care determină similitudinea plană.

2) **În spațiul cu 3 dimensiuni.** Pentru a caracteriza corespondența, trebuie să considerăm trei perechi de puncte omoloage A, A'; B, B'; C, C', cu A, B, C, necoliniare. Numim k valoarea comună a rapoartelor

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Sistemul care înlocuiește sistemul (I) caracterizînd egalitatea este

$$(S_1)' \qquad \forall M, \left\{\begin{array}{l} A'M' = kAM \quad B'M' = kBM \\ (C', \mathbf{A'B'}, M') = (C, \mathbf{AB}, M) \pmod{2\pi}. \end{array}\right.$$

O descompunere canonică a unei similitudini în produs al unei deplasări și al unei omotetii se obține din teorema următoare:

În spațiul cu trei dimensiuni, orice similitudine este produsul unei rotații și al unei omotetii al cărei centru este pe axa rotației, descompunere *unică* în produs *comutativ*.

Într-adevăr, produsul unei deplasări elicoidale și al unei omotetii lasă invariantă o direcție z și numai una singură (presupunînd că deplasarea nu este o translație, caz în care produsul ar fi o omotetie). Fie atunci p un plan perpendicular pe z. Secțiunea (f) a figurii (F) cu planul p are ca imagine secțiunea (f') a lui (F') cu un plan p' paralel cu p, fiindcă similitudinea păstrează unghiurile. Să proiectăm ortogonal (f') în (f_1) pe planul p. Figurile (f) și (f_1) sînt, în planul p, figuri asemenea; fie α unghiul de similitudine, și o centrul de similitudine. Fie Z paralela la z dusă prin o. În similitudinea dată, Z este global invariantă și punctele omoloage M, M' situate pe această dreaptă formează diviziuni asemenea, prin urmare omotetice în raport cu un punct O. Raportul k al acestei omotetii este pozitiv și egal cu raportul k al similitudinii care transformă (f) în (f_1), raportul a doi vectori omologi ai figurilor date. Prin urmare, transformarea studiată apare ca fiind produsul rotației de axă Z și de unghi α, și al omotetiei de centru O situat pe Z și de raport k.

O similitudine care nu este redusă la o rotație sau la o translație are deci *un punct invariant unic*, centru al similitudinii, o axă, un unghi și un raport.

c) Antisimilitudini

Ele pot fi caracterizate prin sisteme analoage celor precedente, schimbînd semnul unuia din membrii fiecărei egalități de unghiuri. Se demonstrează imediat rezultatele următoare:

În plan, orice antisimilitudine este produsul unei răsturnări în jurul unei drepte Z și al unei omotetii al cărei centru este pe Z. Centrul este, prin urmare, invariant.

Într-adevăr, am văzut că orice antideplasare plană este produsul unei răsturnări în jurul unei drepte z și al unei translații paralele cu z. În similitudinea dată, imaginea lui z este o dreaptă z' paralelă cu z; aceste drepte poartă diviziuni asemenea, prin urmare — în cazul dat — omotetice într-un raport pozitiv k. Dreapta Z paralelă la z dusă prin centrul O al acestei omotetii poartă diviziuni asemenea, omotetice de centru O, și este dreapta care satisface enunțul.

De altfel, acesta nu este decît un caz particular al teoremei referitoare la similitudinea în spaţiu, fiindcă antisimilitudinea în planul P poate fi considerată drept restricţia unei similitudini în spaţiu, rotaţia din teorema generală avînd unghiul $\alpha = \pi$.

În spaţiu, putem introduce antideplasarea considerînd o omotetie de raport negativ, şi putem enunţa teorema:

Orice antisimilitudine este produsul unei rotaţii şi a unei omotetii de raport negativ al cărei centru este pe axa rotaţiei.

Într-adevăr, antideplasarea poate fi definită ca produsul unei simetrii în raport cu un plan p şi al unei rotaţii de unghi α în jurul unei drepte z perpendiculare pe p; prin urmare, z şi imaginea ei z' poartă, în similitudinea dată, diviziuni asemenea care sînt, aici, omotetice într-un raport negativ; dreapta Z paralelă la z dusă prin centrul O al acestei omotetii este dreapta considerată în enunţ, unghiul rotaţiei fiind α, iar centrul omotetiei fiind O.

În orice antisimilitudine există deci un punct invariant şi numai unul singur, o axă, un unghi şi un raport de similitudine.

Grupul similitudinilor şi antisimilitudinilor lasă invariante acele proprietăţi pe care experienţa fizică ne determină să le considerăm „proprietăţi ale figurilor". Orice altă aplicaţie a spaţiului pe el însuşi „deformează figurile". A considera drept echivalente figuri omoloage prin transformările unui alt grup înseamnă a face o geometrie care nu este geometrie euclidiană. Nu vom da decît un singur exemplu de asemenea geometrie, altul decît cel al geometriilor afină şi proiectivă; el va face obiectul capitolului următor.

CAPITOLUL 2

INVERSIUNEA
ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALAGMATICĂ

I. Inversiunea ca transformare, în geometria metrică

1. Definiţie

În spaţiul metric, fie date un punct O numit pol şi o cantitate omogenă în pătratul unei lungimi, numită *puterea* inversiunii, pe care o vom numi $p = \rho^2$, sau $p = -\rho^2$, în funcţie de semnul ei. Inversiunea $\mathcal{J}_{O,p}$ este transformarea punctuală care asociază fiecărui punct M o imagine M', punct situat pe dreapta OM, care verifică

$$\overline{OM'} \cdot \overline{OM} = p.$$

Vectorial, aceasta se exprimă prin

$$\mathbf{OM'} = \frac{p}{OM^2}\,\mathbf{OM},$$

sau, la fel de bine, prin

$$\mathbf{OM} = \frac{p}{OM'^2}\,\mathbf{OM'}.$$

Transformarea este *reciprocă*. Punctul O — şi numai el singur — nu are imagine: este punctul singular al transformării; poziţia lui este deci foarte importantă. Punctele invariante sînt definite prin

$$OM^2 = p;$$

aşadar, ele nu există decît dacă puterea p este pozitivă. Ele sînt atunci punctele sferei de centru O şi de rază $\rho = \sqrt{p}$, numită *sfera*

de inversiune (*cerc de inversiune*, în geometria cu două dimensiuni, *pereche de puncte* în geometria cu o dimensiune). Din acest punct de vedere, semnul puterii este deci important. În fine, să remarcăm că $p = 0$ trebuie exclus (imaginea oricărui punct ar fi atunci în O). Transformarea nu se reduce la transformarea identică pentru nici o valoare a lui p. Mulțimea inversiunilor nu este deci un grup.

Din punctul de vedere al proprietăților din geometria euclidiană ale unei figuri, valoarea puterii nu are importanță, fiindcă a modifica puterea revine la a transforma prin omotetie figura inversă, deoarece

$$\left.\begin{array}{l} \forall M, \quad \overrightarrow{OM'} = \dfrac{p}{OM^2}\,\overrightarrow{OM} \\ \qquad\quad \overrightarrow{OM'_1} = \dfrac{p_1}{p}\,\overrightarrow{OM'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OM'_1} = \frac{p_1}{OM^2}\,\overrightarrow{OM}.$$

Prin urmare, pentru a studia natura inversei unei figuri particulare date, putem alege puterea de inversiune în modul pe care îl considerăm cel mai convenabil.

Exemplu. INVERSA UNEI SFERE, CÎND POLUL DE INVERSIUNE NU SE AFLĂ PE SFERĂ. Este evident că sfera este global invariantă dacă alegem ca putere de inversiune puterea polului în raport cu sfera însăși; printr-o inversiune de putere oarecare, imaginea este deci o sferă omotetică sferei date, centrul de omotetic fiind polul de inversiune.

Metoda convine și pentru un cerc, dacă polul de inversiune este în planul cercului, dar nesituat pe circumferință.

CAZUL INVERSIUNII POZITIVE, adică de putere pozitivă.

Interesul pentru acest caz vine din faptul că putem defini atunci transformarea dînd sfera de inversiune ($\mathcal{J}$) (sau cercul de inversiune, în geometria cu două dimensiuni). Punctele inverse sînt atunci fiecare piciorul planului polar al celuilalt (sau al polarei celuilalt) Vom folosi exprimările: inversiune de sferă ($\mathcal{J}$), puncte inverse în raport cu sfera ($\mathcal{J}$).

Deseori, în aplicații, o inversiune de putere p negativă este considerată drept produsul (comutativ) al unei inversiuni pozitive, de putere $|p|$, și al unei simetrii în raport cu polul. Rolul acestei simetrii apare clar dacă subliniem că simetria în raport cu un punct este o deplasare în spațiul cu două dimensiuni, dar este o antideplasare în spațiul cu o dimensiune sau cu trei dimensiuni.

CAZUL GEOMETRIEI CU O DIMENSIUNE

Să definim fiecare punct M prin abscisa lui x, luînd ca origine polul O. Inversiunea este definită prin

$$xx' = p.$$

Se verifică imediat conservarea biraportului a 4 puncte

$$(x_1, x_2; x_3, x_4) = (x_1', x_2'; x_3', x_4');$$

inversiunea cu o dimensiune este deci o transformare omografică.

În cazul unei inversiuni pozitive, fie A și B cele două puncte invariante definite prin $|x| = \sqrt{p} = \rho$; orice pereche M, M' de puncte omoloage divide armonic segmentul AB.

În toate cazurile, dacă M tinde către polul O, $x \to 0$, $x' \to \infty$ și sîntem conduși să adăugăm punctelor dreptei care constituie spațiul geometriei noastre *un punct la infinit*, considerat drept imagine a polului O. Această operație este în acord cu geometria proiectivă căreia îi aparține transformarea omografică.

Teoremă. *Pe o dreaptă, două perechi oarecare de puncte distincte definesc totdeauna o inversiune sau o simetrie.*

Fie, într-adevăr, punctele A, A' și B, B'. Căutăm un pol definit prin $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.

Dacă — originea absciselor fiind oarecare — numim a, a', b, b', x abscisele punctelor în cauză, condiția este

$$(a - x)(a' - x) = (b - x)(b' - x),$$

adică

$$[(a + a') - (b + b')]x = aa' - bb'.$$

Ecuația are o soluție, cu excepția cazului $a + a' = b + b'$. În acest caz, punctele fiind distincte, de aici rezultă că $aa' \neq bb'$ și segmentele AA' și BB' au același mijloc C. *Simetria apare deci aici ca un caz singular al inversiunii*, polul fiind la infinit, ca și unul din punctele invariante. Nu subzistă decît un singur punct invariant și el este centrul de simetrie. Puterea a devenit infinită.

Pentru o geometrie cu mai multe dimensiuni, studiul pe care l-am făcut mai sus este restricția transformării la o dreaptă care trece prin polul de inversiune.

2. Conservarea contactelor și a unghiurilor

a) CONTINUITATE. Relația vectorială $\mathbf{OM'} = (p/OM^2)\mathbf{OM}$ arată că vectorul $\mathbf{OM'}$ este funcție continuă de vectorul $\mathbf{OM}$ în orice punct diferit de pol. Să precizăm: fie A un punct dat distinct de O, $OA = a \neq 0$, și fie M un punct din vecinătatea lui A care nu conține pe O; vom lua un cerc centrat în A, de rază $\alpha < a/2$; prin urmare, $AM < \alpha < a/2$. După inversiune, obținem

$$\mathbf{A'M'} = \mathbf{OM'} - \mathbf{OA'} = p\left[\frac{1}{OM^2}\mathbf{OM} - \frac{1}{OA^2}\mathbf{OA}\right],$$

$$= p\left[\left(\frac{1}{OM^2} - \frac{1}{OA^2}\right)\mathbf{OA} + \frac{1}{OM^2}\mathbf{AM}\right],$$

prin urmare, în lungime

$$A'M' < p\left[\left(\frac{1}{(a-\alpha)^2} - \frac{1}{a^2}\right)a + \frac{\alpha}{(a-\alpha)^2}\right] =$$

$$= p\,\frac{(3a-\alpha)\alpha}{a(a-\alpha)^2} < 12\,\frac{p}{a^2}\,\alpha,$$

și $A'M'$ tinde către zero cînd α tinde către zero.

Dacă punctul M tinde către polul O, $OM \to 0$, prin urmare $OM' \to \infty$; vecinătății $OM < \alpha$ a lui O îi corespunde $OM' > \frac{|p|}{\alpha}$, adică *exteriorul* unei sfere de centru O a cărei rază tinde către infinit cînd α tinde către zero. Dacă deci vrem să adăugăm spațiului un element pentru a face corespondența biunivocă și bicontinuă, trebuie să considerăm că *spațiul are un punct la infinit*, același pentru toate dreptele duse prin pol, și că *exteriorul oricărei sfere este o vecinătate a acestui punct*. Rezultă de aici că, din punctul de vedere al geometriei euclidiene, în ciuda continuității, transformarea deformează mult figurile care se apropie de pol. Ne putem da seama de aceasta făcînd cîteva desene.

b) CONSERVAREA CONTACTELOR ȘI A UNGHIURILOR. Fie M punctul generic al unei curbe (C), definite parametric prin $\mathbf{OM} = f(t)\mathbf{u}$, unde $\mathbf{u}$ este presupus unitar, funcție de t. Presupunem că funcțiile care intervin au derivate în punctul M_0, $\mathbf{OM}_0 = f(t_0)\mathbf{u}_0$. Vectorul $\mathbf{OM}$ are el însuși o derivată

$$(\mathbf{OM})'_0 = f'(t_0)\mathbf{u}_0 + f(t_0)\mathbf{u}'_0 = f'_0\mathbf{u}_0 + f_0\mathbf{u}'_0$$

și știm că vectorul $\mathbf{u}_0'$ este perpendicular pe vectorul $\mathbf{u}_0$, fiindcă acesta are o lungime constantă. Vectorul $(\mathbf{OM})_0'$ dirijează tangenta în M_0 la curba (C).

După inversiune avem, notînd cu M_0' imaginea lui M_0:

$$\mathbf{OM}_0' = \frac{p}{f_0}\,\mathbf{u}_0,$$

și, prin derivare,

$$(\mathbf{OM}')_0' = p\left[\frac{-f_0'}{f_0^2}\,\mathbf{u}_0 + \frac{1}{f_0}\,\mathbf{u}_0'\right]$$

$$= \frac{p}{f_0^2}\left[-f_0'\mathbf{u}_0 + f_0\mathbf{u}_0'\right]$$

vector dirijat de $-f_0'\mathbf{u}_0 + f_0\mathbf{u}_0'$.

Conchidem că curba (C'), imagine a lui (C) în inversiune, admite o tangentă în punctul M_0' imagine a lui M_0, *cele două tangente fiind într-un același plan și simetrice una alteia în raport cu planul mediator al lui* M_0M_0'.

CONSECINȚĂ. *Unghiul a două curbe care au un punct comun se conservă*. În particular, dacă curbele sînt tangente, *contactul se păstrează*.

Dacă M generează o suprafață care admite în M_0 un plan tangent, mulțime a tangentelor în acest punct la curbele suprafeței, atunci și suprafața inversă admite în M_0' un plan tangent care este simetricul precedentului în raport cu planul mediator al lui M_0M_0'.

Într-un plan care trece prin pol, unghiul orientat a două curbe, adică unghiul tangentelor lor, *își schimbă sensul* în urma simetriei care devine, în două dimensiuni, o simetrie în raport cu mediatoarea lui M_0M_0'.

În spațiu, ce putem conchide despre sensul triedrelor formate de tangente? Deoarece două triedre opuse la vîrf sînt de sensuri contrare, trebuie să considerăm semitangentele asociate, așadar sensul vectorului derivată $(\mathbf{OM}')_0'$ pe suportul lui, adică semnul lui p. Conchidem: *Dacă puterea de inversiune este pozitivă*, semitangentele asociate în inversiune sînt asociate și în simetrie, prin urmare sensurile triedrelor *sînt inverse. Dacă puterea de inversiune este negativă*, triedrele asociate triedrului semitangentelor în M_0 prin inversiune și prin simetrie planară sînt opuse, așa că, *în acest caz, inversiunea păstrează sensul triedrului.*

Această proprietate de conservare a unghiurilor în ciuda deformării suferite de figuri stă la originea a numeroase utilizări ale inversiunii. Spunem că inversiunea este o *aplicație conformă*; mulțimea aplicațiilor conforme (adică, a celor care conservă unghiurile) formează evident un grup. Din el fac parte produsele de similitudini, de antisimilitudini și de inversiuni.

3. Proprietate fundamentală

Să considerăm, într-o inversiune, două perechi de puncte inverse A, A'; M, M'. Fie a, m, p, q dreptele OAA', OMM', AM și $A'M'$. Prin definiție, avem pe a și pe m

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}.$$

Această egalitate exprimă că cele 4 puncte A, A', M, M' sînt pe un același cerc (γ). Prin urmare, *două puncte și inversele lor sînt conciclice.*

În consecință, dreptele p și q sînt izogonale dreptelor a și m; aceste două perechi de drepte au aceleași direcții ale bisectoarelor d_1, d_2. Similitudinea celor două triunghiuri OAM și $OM'A'$ care rezultă de aici permite să se scrie relația metrică utilă uneori:

$$A'M' = AM \cdot \frac{OA'}{OM} = AM \cdot \frac{|p|}{OA \cdot OM}.$$

(Ca exercițiu, se va deduce această formulă din expresia vectorială a lui $A'M'$ scrisă mai sus.)

O ALTĂ DEMONSTRAȚIE A CONSERVĂRII UNGHIURILOR

Păstrăm notațiile precedente. Fie (C) o curbă, A unul din punctele ei, și M punctul ei generic. Prin ipoteză, cînd M tinde către A, drepta p suport al lui AM tinde către o dreaptă t care este tangenta în A la (C). În aceste condiții, dreapta m tinde către a, iar planul (a, m) către planul (a, t) (plan bine definit, dacă tangenta t nu este confundată cu a). Direcțiile bisectoare d_1, d_2 tind una către direcția lui a, cealaltă către direcția perpendiculară din planul (a, t). Rezultă de aici că dreapta q care poartă $A'M'$ are o poziție limită, simetrică lui t în raport cu cea a mediatoarelor lui AA', care este în planul (a, t). În felul acesta t' este simetric lui t în raport cu planul mediator al lui AA'. Concluzia subzistă dacă t este confundat cu a, fiindcă unghiul (a, q) tinde către zero (mod π).

Încheiem studiul ca mai sus.

a) APLICAȚIE A PROPRIETĂȚII FUNDAMENTALE

Inversiunea poate fi definită plecînd de la polul O și de la o pereche AA' coliniară cu O pe o dreaptă a. Perechile M, M' de puncte omoloage sînt perechile comune dreptelor m duse prin O și cercurilor (γ) care trec prin A și A'. Să notăm că trei perechi A, A'; M, M'; P, P' sînt pe o aceeași sferă (σ). Cercurile (γ) și sferele (σ) sînt, evident, global invariante în inversiune. Dacă puterea de inversiune este pozitivă, aceste cercuri și aceste sfere sînt ortogonale sferei de inversiune $(\mathcal{J})$. Să mai notăm că inversiunea este perfect definită de polul O și *un* cerc (γ), sau *o* sferă (σ). Orice sferă ortogonală lui $(\mathcal{J})$ este sferă (σ); orice cerc ortogonal lui $(\mathcal{J})$ al cărui plan trece prin O este cerc (γ).

Simetria planară apare ca un caz particular: drepte m paralele, $(\mathcal{J})$ devenind un plan perpendicular pe m.

b) IMAGINEA CERCURILOR ȘI A SFERELOR, A DREPTELOR ȘI A PLANELOR

1) CERCURI AL CĂROR PLAN TRECE PRIN POL. Să definim cercul (C) prin două din punctele sale A, B și prin unghiul $\varphi \pmod{\pi}$, astfel încît punctul generic M să fie caracterizat prin

$$(AM,\ MB) = \varphi \pmod{\pi}.$$

Să numim a, b, m dreptele AA', BB', MM', și α, α', β, β' dreptele MA, $M'A'$, MB, $M'B'$. Să exprimăm inscriptibilitatea lui $AA'MM'$ și a lui $BB'MM'$:

$$(a,\ \alpha) = (\alpha',\ m), \quad (b,\ \beta) = (\beta',\ m).$$

Deducem de aici

$$(\alpha',\ \beta') = (a,\ \alpha) - (b,\ \beta)$$

sau

$$(\alpha',\ \beta') = (a,\ b) - \varphi \pmod{\pi}.$$

PRIMUL CAZ:

$$(a,\ b) \neq \varphi \pmod{\pi},$$

adică *O nesituat pe* (C).

Imaginea lui (C) este *un cerc* într-un plan care nu trece, nici el, prin polul O. Am văzut la punctul 1) că O este un centru de omotetie pentru (C) şi (C').

CAZUL AL DOILEA:

$$(a, b) = \varphi \pmod{\pi}.$$

Polul este pe cercul (C):

Imaginea lui (C) este *dreapta* $A'B'$.

Făcînd $\varphi = 0 \pmod{\pi}$, vedem de asemenea, aşa cum o cere reciprocitatea, că inversa unei drepte (C) care nu trece prin O este o circumferinţă care trece prin O.

În fine, cazul $\varphi = 0 \pmod{\pi}$ cu $(a, b) = 0 \pmod{\pi}$ este cel în care (C) este o dreaptă care trece prin O. Regăsim că ea este global invariantă.

Deoarece imaginea mulţimii de cercuri care trece prin O este mulţimea dreptelor, sîntem conduşi să adăugăm planului *un punct unic la infinit*, imagine a polului, şi să considerăm că toate dreptele planului trec prin acest punct la infinit. Ce vom spune, prin urmare, despre două drepte paralele? Cercul invers unei drepte admite în O o tangentă paralelă cu dreapta. (Aceasta rezultă din teorema generală despre tangente sau, mai simplu, din considerarea axei de simetrie a figurii.) Două drepte paralele corespund deci la două circumferinţe tangente în O, şi sîntem determinaţi să spunem că *două drepte paralele sînt două circumferinţe care trec prin punctul de la infinit şi sînt tangente în acel punct*, aceasta pentru a extinde la acest punct conservarea contactului. Pentru a extinde şi conservarea unghiurilor, întrucît două cercuri se taie sub un acelaşi unghi în cele două puncte de intersecţie, vom spune că două drepte se intersectează în punctul de la infinit sub un unghi egal cu unghiul acelor drepte.

2) SFERE ŞI PLANE. Metoda precedentă (de geometrie metrică) nu mai este adecvată fiindcă foloseşte teorema lui Chasles pentru unghiuri. Vom deduce concluziile căutate din cele precedente, generînd figura formată din pol şi sferă (sau plan) prin revoluţia unei figuri plane constituite din pol şi o circumferinţă (sau o dreaptă). Conchidem că inversa unei sfere care nu trece prin pol este o sferă care nu trece, nici ea, prin pol, şi că inversa unei sfere care trece prin pol este un plan care nu trece prin pol, plan paralel cu planul tangent la sferă în pol. Reciproc, imaginea unui

cu dreapta. Dacă cercul și dreapta sînt tangente, punctul de contact face excepție și nu subzistă decît o singură inversiune.

Două drepte sînt omoloage nu în inversiuni, ci în două simetrii în raport cu drepte, sau într-o simetrie, dacă ele sînt paralele.

b) Două sfere sînt omoloage, în general, *în două inversiuni* ai căror poli sînt centrele de omotetie. Aceeași discuție ca pentru cercurile dintr-un plan. Aceeași analiză pentru o sferă și un plan, și pentru două plane.

c) Două cercuri ale unei aceleiași sfere (σ) *sînt inverse, în general, în două moduri.* Într-adevăr, dacă planele celor două cercuri nu sînt paralele, există un plan de simetrie comun π unic. În acest plan π se află două perechi de puncte diametral opuse: A, B ale lui (C) și P, Q ale lui (C'). Apar în mod vădit două inversiuni, după cum A' este în P și B' este în Q, sau A' este în Q și B' este în P. Odată alegerea făcută, dreptele AA' și BB' se taie într-un punct O; inversiunea de pol O a cărei puteri este puterea lui O în raport cu sfera (σ) este acceptabilă fiindcă ea transformă (C) într-un cerc de diametru $A'B'$ și de plan perpendicular pe π: el este deci cercul (C').

Dacă cele două cercuri ale lui (σ) sînt în plane paralele, există o infinitate de plane de simetrie, fiindcă există o axă de revoluție; cei doi poli de inversiune sînt atunci centre de simetrie și cele două conuri care trec prin cercuri sînt conuri de revoluție.

d) Două cercuri ale unui același con și de plane neparalele sînt inverse (dacă planele lor sînt paralele, ele sînt omotetice). Pentru a demonstra această reciprocă, este suficient să demonstrăm că cercurile sînt pe o aceeași sferă. Or, dacă dreapta de intersecție a planelor lui (C) și (C') taie cercul (C) în A și B, aceste puncte sînt pe con, prin urmare sînt și pe cercul (C') care este intersecția completă a conului și a planului lui (C'). În acest caz, cele două cercuri, care au două puncte comune, sînt pe o aceeași sferă (σ). Ele sînt deci inverse, polul fiind vîrful conului iar puterea — cea care lasă (σ) global invariantă.

Dacă dreapta de intersecție a planelor lui (C) și (C') nu intersectează (C), îl vom face pe (C') să sufere, în prealabil, de exemplu o omotetie care aduce unul din punctele sale, A', în punct[illegible] lui (C) situat pe aceeași generatoare; cercul (C'') omot[illegible] este într-un plan care trece prin A și care taie deci [illegible] alt punct B comun lui (C) și lui (C'): am reveni[illegible] dent: (C) și (C'') sînt omoloage într-o inversiun[illegible] conului, prin urmare și (C) și (C') sînt[illegible]

plan este o sferă care trece prin pol, afară numai dacă planul nu trece el însuşi prin pol, caz în care el este global invariant.

Spaţiul va trebui deci considerat ca fiind completat cu *un punct la infinit*, comun tuturor planelor şi imagine a polului.

3) INVERSUL UNUI CERC ÎN SPAŢIU. Un cerc (C) poate fi considerat drept intersecţie de sfere (s); inversul său este deci un cerc, intersecţie a sferelor inverse (s'). Printre sferele (s) există una care trece prin polul O; imaginea ei este planul cercului (C'). Există de asemenea o sferă care este global invariantă în inversiune: această sferă (σ) poate fi obţinută cu ajutorul unui punct $A \in (C)$ şi a imaginii lui, A': este sfera care trece prin (C) şi prin A'; prin urmare, *două cercuri inverse sînt pe o aceeaşi sferă.*

Figura formată dintr-un cerc (C) şi un punct O situat în afara planului acestuia are un plan de simetrie π. Această simetrie este respectată de inversiunea de pol O, aşa că π trece prin centrul lui (C') şi este perpendicular pe planul acestuia din urmă. În acest plan π se află două puncte A şi B diametral opuse pe (C), şi imaginile lor (A', B') diametral opuse pe (C'), precum şi centrele acestor cercuri; însă aceste centre nu sînt omoloage în inversiune. Ele nu sînt, în general, nici măcar coliniare cu O: ele se află pe două drepte duse prin O simetrice în raport cu bisectoarele unghiurilor OAA', OBB'.

Două cercuri inverse sînt pe un acelaşi con al cărui vîrf este polul O al inversiunii şi care este global invariant în inversiune; rezultă de aici că orice con care are o secţiune circulară, are o infinitate de asemenea secţiuni, pe lîngă secţiunile paralele pe care le-am putea deduce prin omotetie din secţiunea considerată: sînt secţiunile, paralele şi ele între ele, care se deduc prin inversiune. Aceste două direcţii de secţiuni circulare nu sînt confundate decît pentru conurile de revoluţie.

4) RECIPROCE. Folosind teoremele directe, se verifică imediat enunţurile reciproce:

a) Într-un plan, două cercuri se corespund, în general, în două inversiuni ai căror poli sînt centrele de omotetie. Dacă ele sînt [illegible], punctul de contact — deşi este centru de omotetie — nu [illegible] inversiune: nu subzistă deci decît o singură inversiune. [illegible] concentrice, există un singur centru pentru cele două [illegible] singur pol pentru cele două inversiuni.

[illegible]ntă sînt omoloage, în general, în două inversiuni [illegible]le cercului în care tangenta este paralelă

produs al acestei inversiuni şi a omotetiei care transformă (C'') în (C'). Demonstraţia este acceptabilă chiar şi atunci cînd A şi B sînt confundate, fiindcă două cercuri de plane distincte şi tangente sînt pe o aceeaşi sferă.

În felul acesta, *un con care are o secţiune circulară are două direcţii de secţiuni circulare*, numite *direcţii ciclice*, una paralelă cu planul secţiunii date, cealaltă paralelă cu planul unei secţiuni inverse cercului dat. În cazul unui con de revoluţie, aceste direcţii sînt confundate.

REMARCĂ. Toate excepţiile întîlnite în enunţurile precedente dispar dacă considerăm simetriile ortogonale planare (sau, în plan, simetriile ortogonale axiale) drept inversiuni al căror pol este punctul de la infinit.

II. Noţiuni de geometrie analagmatică

Aşa cum perspectiva — care conduce la introducerea unor puncte la infinit şi la un invariant specific: biraportul a 4 puncte coliniare — este o introducere în geometria proiectivă care poate fi studiată folosind geometria afină, dar care se bucură de o anumită autonomie, avînd axiome proprii şi metode proprii, tot aşa inversiunea introduce o geometrie nouă care, şi ea, poate fi studiată direct şi nu prin intermediul geometriei metrice: este *geometria analagmatică*. Împreună cu *punctul*, elementele ei esenţiale sînt *cercul*: prin trei puncte trece totdeauna un cerc şi numai unul, şi *sfera*: prin 4 puncte neconciclice trece totdeauna o sferă şi numai una. Proprietăţile analagmatice ale unei figuri sînt relaţiile invariante la inversiune.

Noi nu vom da aici o introducere axiomatică autonomă a geometriei analagmatice, dar vom da proprietăţile esenţiale printre care trebuie alese axiomele care urmează să fie adăugate *axiomelor de incidenţă* (care se referă la intersecţiile de cercuri şi de sfere). Pentru demonstraţii, vom utiliza deci în continuare geometria metrică.

1. **Definiţia analagmatică a inversiunii.** Vom caracteriza inversiunea exclusiv cu ajutorul cercurilor.

a) Fiind date două perechi A, A'; B, B' pe acelaşi cerc (γ) sau pe o aceeaşi dreaptă, există o inversiune sau o simetrie planară astfel încît A' şi B' sînt respectiv imaginile lui A şi B.

Demonstrația a fost făcută pentru cazul punctelor coliniare; cunoașterea restricției inversiunii la dreapta de coliniaritate determină această inversiune. Dacă dreptele AA' și BB' nu sînt confundate, ele sînt — în planul lui (γ) — sau concurente, sau paralele. În primul caz inversiunea căutată are ca pol punctul de intersecție și ca putere, puterea acestui punct în raport cu (γ); în cazul al doilea, inversiunea este simetria planară în raport cu planul mediator comun coardelor paralele AA' și BB'.

În inversiunea astfel determinată, imaginea unui punct M este punctul M' comun celor două cercuri $AA'M$ și $BB'M$ ale sferei determinate de (γ) și M. În caz de coliniaritate, se folosește un punct intermediar P necoliniar cu celelalte puncte.

Din punct de vedere analagmatic (fără a deosebi dreptele de cercuri, și nici simetria planară de inversiune) enunțăm prin urmare:

Inversiunea este o transformare punctuală definită de două perechi de puncte conciclice A, A'; B, B'. Imaginea oricărui punct M este al doilea punct comun cercurilor $AA'M$ și $BB'M$.

Considerînd un punct I drept punct la infinit, obținem o reprezentare metrică a inversiunii; cercurile care trec prin I se numesc drepte. Sferele care trec prin I se numesc plane. Imaginea lui I se numește polul de inversiune.

Aplicații. TRANSMUTATA UNEI INVERSIUNI PRINTR-O INVERSIUNE.

Fie inversiunea $(\mathcal{J})$ definită de perechile $A, B \in (F)$ și imaginile lor $A', B' \in (F')$, puncte situate pe un cerc (γ). Inversiunea $(\mathcal{J}_1)$ dă $A_1, B_1 \in (F_1)$ și $A_1', B_1' \in (F_1')$, puncte situate pe un cerc (γ_1) imagine a lui (γ). Inversiunea $(\mathcal{J}')$ definită de perechile A_1, A_1'; B_1, B_1' este tocmai transmutata căutată, fiindcă cercurile care permit trecerea de la punctele lui (F) la imaginea lor în (F_1) se transformă prin $(\mathcal{J}_1)$ în cercurile care definesc $(\mathcal{J}')$. În felul acesta, *transmutata unei inversiuni printr-o inversiune este o inversiune.*

Deoarece inversiunea este reciprocă, scriem toate acestea sub formele echivalente

$$(\mathcal{J}_1) \times (\mathcal{J}) \times (\mathcal{J}_1) = (\mathcal{J}') \quad \text{sau} \quad (\mathcal{J}_1) \times (\mathcal{J}) = (\mathcal{J}') \times (\mathcal{J}_1)$$

sau

$$(\mathcal{J}) = (\mathcal{J}_1) \times (\mathcal{J}') \times (\mathcal{J}_1)$$

Dacă $(\mathcal{J}_1)$ este dată, relația între $(\mathcal{J})$ și $(\mathcal{J}')$ este reciprocă.

2. Invarianți analagmatici

a) BIRAPORTUL A 4 PUNCTE CONCICLICE. Fie date, pe un cerc (γ), 4 puncte A, B, C, D într-o ordine determinată. Oricare ar fi un punct M al lui (γ), biraportul fasciculului $M(A, B, C, D)$ este un număr determinat, numit *biraportul celor 4 puncte ale cercului*.

Printr-o inversiune de pol O situat pe acest cerc, biraportul se conservă fiindcă (γ) devine o dreaptă (γ') secantă a fasciculului $M(A, B, C, D)$ după punctele A', B', C', D'. Să studiem cazul în care polul O al inversiunii $(\mathcal{J})$ nu este pe cercul (γ):

Deoarece valoarea puterii de inversiune nu are nici o importanță, putem presupune că cercul (γ'), inversul lui (γ), îl taie pe acesta în două puncte K și L, și putem transmuta $(\mathcal{J})$ printr-o inversiune $(\mathcal{J}_1)$ de pol L. Prin $(\mathcal{J}_1)$, (γ) și (γ') au ca imagini niște drepte (γ_1) și (γ_1') care se taie în K_1. Prin urmare, prin

$$(\mathcal{J}') = (\mathcal{J}_1) \times (\mathcal{J}) \times (\mathcal{J}_1),$$

cele două drepte (γ_1) și (γ_1') sînt omoloage și punctul lor comun K_1 este invariant. Dar $(\mathcal{J}')$ este o inversiune; aceasta nu poate fi deci decît o simetrie planară. În consecință $(\mathcal{J}')$, ca și $(\mathcal{J}_1)$, păstrează birapoartele punctelor considerate; prin urmare, la fel se întîmplă și cu

$$(\mathcal{J}) = (\mathcal{J}_1) \times (\mathcal{J}') \times (\mathcal{J}_1).$$

Așadar, *biraportul a 4 puncte conciclice este invariant la orice inversiune*.

b) INVARIANT ANALAGMATIC AL UNEI PERECHI DE CERCURI DINTR-UN ACELAȘI PLAN. Să remarcăm în primul rînd că inversul unui fascicul cu puncte de bază este, evident, un fascicul de același tip. Afirmația este valabilă și pentru un fascicul cu punct limită (fiindcă el poate fi definit ca fascicul ortogonal unui fascicul cu puncte de bază), precum și pentru un fascicul de cercuri tangente. Printr-o inversiune $(\mathcal{J}_0)$ al cărei pol este unul din punctele lui Poncelet (punct de bază sau punct limită), un fascicul de cercuri devine fascicul de drepte concurente sau paralele, sau fascicul de cercuri concentrice.

Acestea fiind spuse, fie (C_1), (C_2) o pereche de cercuri dintr-un același plan; să le tăiem cu unul oarecare (Γ) dintre cercurile fasciculului ortogonal. Inversiunea $(\mathcal{J}_0)$ conservă biraportul λ al celor

4 puncte de intersecţie conciclice, şi imaginea simplă obţinută arată că acest biraport nu depinde de cercul (Γ) ales în fasciculul ortogonal. Or, λ se conservă la orice inversiune $(\mathcal{J})$. Aceasta înseamnă, prin urmare, că λ este un invariant analagmatic ataşat perechii (C_1), (C_2).

Vom exprima λ în geometria metrică euclidiană folosind ca cerc (Γ) diametrul comun. Fie A_1, B_1 şi A_2, B_2 intersecţiile acestui diametru respectiv cu (C_1) şi (C_2) şi C_1, C_2 centrele cercurilor. Avem, folosind notaţiile uzuale,

$$\overline{C_1C_2} = d,\ \overline{C_1A_1} = -\overline{C_1B_1} = R_1,\ \overline{C_2A_2} = -\overline{C_2B_2} = R_2,$$

$$\lambda = \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2B_1}} : \frac{\overline{B_2A_1}}{\overline{B_2B_1}} = \frac{d^2 - (R_2 - R_1)^2}{d^2 - (R_2 + R_1)^2}.$$

Însă o pereche de cercuri nu poate avea mai mult de un invariant la inversiune fiindcă, evident, polul şi puterea fiind arbitrare, alegerea lui R_1' nu poate determina pe d' şi pe R_2'. Or, în cazul în care (C_1) şi (C_2) se intersectează, cunoaştem deja un invariant: unghiul V al celor două cercuri. Trebuie deci să verificăm că între λ şi V există o relaţie independentă pe perechea de cercuri. Într-adevăr, pentru cercurile secante avem

$$|R_2 - R_1| < d < R_2 + R_1,\quad \cos V = \frac{R_2^2 + R_1^2 - d^2}{2R_1R_2},$$

de unde

$$\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2} = \frac{1 - \cos V}{1 + \cos V} = \lambda.$$

Vedem — fapt clar şi din ordinea punctelor pe cercul ortogonal — că $\lambda < 0$ este condiţia ca cercurile să se intersecteze. Cercurile ortogonale corespund la $\lambda = -1$.

c) ÎN SPAŢIUL CU TREI DIMENSIUNI, numim *cerc ortogonal la o sferă* un cerc ortogonal sferei în cele două puncte comune; planul cercului este deci ortogonal sferei (el trece prin centrul ei) şi orice sferă care trece prin cerc este ortogonală sferei date.

Numim *inel ortogonal* o pereche de cercuri astfel încît orice sferă care trece prin unul din ele este ortogonală celuilalt. Planele lor sînt atunci perpendiculare şi se intersectează după dreapta centrelor. Aceasta este tăiată de cercuri după o diviziune armonică.

Toate aceste configuraţii se păstrează prin inversiune.

Pe de altă parte, proprietăţile analagmatice ale unei figuri plane rămîn valabile pentru *figuri sferice*, fiindcă orice *figură sferică* dă o imagine plană prin inversiunile al căror pol este pe sferă. O asemenea inversiune defineşte o *aplicaţie a sferei pe un plan* (înzestrat cu un punct la infinit), aplicaţie definită, de asemenea, şi printr-o perspectivă. Această aplicaţie se numeşte *proiecţie stereografică* a sferei pe plan. (Ea este folosită la hărţile geografice sau astronomice.)

În particular, *două cercuri ale unei aceleiaşi sfere au un invariant analagmatic* λ egal cu biraportul celor 4 puncte pe care le determină pe orice cerc al sferei care le este ortogonal. Dacă cercurile se intersectează, λ este o funcţie de unghiul lor.

Tot astfel, *două sfere au un invariant analagmatic*; el se obţine cu ajutorul unui cerc ortogonal comun, şi calculul făcut în plan rămîne valabil.

d) TRANSFORMARE ANALAGMATICĂ GENERALĂ

DEFINIŢIE: O transformare punctuală biunivocă se numeşte *transformare analagmatică* dacă orice cerc are ca imagine un cerc, cu conservarea unghiurilor cercurilor concurente, triedrele astfel formate fiind sau toate de acelaşi sens, sau toate de sensuri contrare cu imaginile lor. Fie (T) o astfel de transformare.

1) Să demonstrăm mai întîi că *o asemenea transformare, dacă ea există, este definită prin trei perechi de puncte omoloage* A, A'; B, B'; C, C'.

Într-adevăr, fie M un punct al figurii (F); prin inversiunea de pol A, sfera $ABCM$ devine un plan, iar cercurile (ABM), (ACM), (ABC) devin drepte. Analog, să facem pe (F') să sufere o inversiune de pol A'. Cercurile $A'B'M'$ şi $A'C'M'$ devin drepte ale planului $A'B'C'$, şi oricare ar fi punctul M, poziţia punctului M' în acest plan este determinată de cunoaşterea unghiurilor dreptelor imagini ale lui ABC, ABM şi ACM.

2) *Orice produs de inversiuni este o transformare* (T); dacă numărul de inversiuni este par, sensul unghiurilor se conservă, iar dacă acest număr este impar, sensul se schimbă. Vom demonstra acum reciproca acestei teoreme.

3) *a*) Să notăm în primul rînd că, deoarece (din punctul de vedere pe care ne plasăm acum) simetria planară este o inversiune, o translaţie sau o rotaţie trebuie considerate drept un produs de

două inversiuni, iar o deplasare elicoidală drept un produs de patru inversiuni. Pe de altă parte, știm că o omotetie este un produs de două inversiuni de aceiași poli.

b) Ne rămîne să arătăm că *un produs* (T) *de inversiuni permite transformarea a trei puncte distincte oarecare* A, B, C *în trei puncte distincte* A', B', C'.

Să orientăm arbitrar planele ABC și $A'B'C'$. Dacă transformarea (T) există, dreptele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ sînt imagini ale unor cercuri (ABK), (BCK), (CAK) concurente într-un punct K a cărui imagine este punctul de la infinit. Aceste cercuri se taie două cîte două după unghiuri egale cu cele ale triunghiului $A'B'C'$ (definite modulo π), așa că punctul K este în planul ABC.

Or, dacă ABC nu este asemenea cu $A'B'C'$, există în planul ABC un punct K care satisface aceste condiții: într-adevăr, o inversiune de pol A arată că cercurile (ABK) și (ACK) se taie sub unghiul dorit dacă K aparține unui cerc cunoscut care trece prin B și C; la fel pentru a doua condiție, iar a treia rezultă automat.

O inversiune de pol K dă atunci pentru A, B, C niște imagini A_1, B_1, C_1 care formează un triunghi asemenea cu triunghiul $A'B'C'$. Dar știm că o similitudine sau o antisimilitudine este produsul unei rotații și al unei omotetii (vezi capitolul precedent). În final, vedem că (T) *există și este un produs de* 4 *sau* 5 *inversiuni.*

În concluzie, *orice transformare analagmatică este produsul a* 4 *sau* 5 *inversiuni.* În particular, produsul a n inversiuni poate fi redus la un produs de 4 sau de 5 inversiuni. Firește, în cazuri excepționale, acest număr poate fi mai mic; atunci însă putem considera că două inversiuni succesive sînt aceleași și se distrug. Să notăm, de asemenea, că nu există unicitate în această descompunere, așa cum nu există, de exemplu, în descompunerea unei translații sau a unei rotații în două simetrii planare.

Grupul transformărilor analagmatice este deci generat de mulțimea inversiunilor, mulțime care nu formează un grup.

CAPITOLUL 3

NOȚIUNI DE GEOMETRII METRICE NEEUCLIDIENE

Noi am construit spațiul punctual ca model al unui spațiu vectorial: fiind alese o bază și un punct origine O, orice vector era în corespondență biunivocă cu un punct M al spațiului, iar noțiunea de vectori echipolenți era primordială. O asemenea expunere ne-a condus totuși la studierea unor spații *fără* noțiunea de paralelism (geometrie proiectivă și geometrie analagmatică), și *fără* noțiunea de distanță.

Dar spațiul metric euclidian poate fi construit și axiomatic, în așa fel încît noțiunea de paralelism să apară mai tîrziu; ne putem da atunci seama de caracterul, nu artificial, dar simplificator al postulatului lui Euclid.

Ne limităm la spații cu două dimensiuni.

I. Preliminarii

A) **Proprietăți fundamentale** [A]

O mulțime convenabil aleasă de axiome introduce structura mulțimii punctelor și dreptelor, precum și relația de echivalență între perechi de puncte care caracterizează *egalitatea distanțelor*, de unde — noțiunea de egalitate a figurilor. O bună axiomatizare enumeră un șir de axiome, toate independente, și în număr pe cît posibil mai redus, dar suficient pentru construcția pe care o avem în vedere. Așa a fost construită, în particular, axiomatizarea lui

Hilbert (redusă și mai mult de J. Favard), sau cea a lui G. Choquet care pleacă de la noțiunea de izometrie. Pornind de la un astfel de sistem, o elaborare minuțioasă — cu atît mai lungă cu cît baza este mai restrînsă — permite să se obțină *rezultatele fundamentale, dintre care, cele mai utile pentru noi sînt următoarele*:

a)

1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

2. Orice dreaptă este o mulțime de puncte așa cum am descris-o sub numele de „dreapta reală": fiind aleasă o origine O precum și un sens pozitiv, $\overline{OM} = x$ stabilește o corespondență biunivocă între punctele M și numerele reale x.

b)

1. Orice dreaptă împarte planul în două regiuni nevide; două drepte care au un punct comun, îl împart în 4 regiuni.

Axioma lui Pasch. *Orice dreaptă care întîlnește o latură a unui triunghi* (*segment* care unește două vîrfuri), *întîlnește și o a doua latură, dar nu o întîlnește pe a 3-a, dacă nu trece printr-un vîrf.*

2. Între perechile de puncte din plan există o relație de echivalență: „egalitatea distanțelor" $AB = CD$. Pe dreptele AB și CD, din egalitățile $AM = x \cdot AB$ și $CP = x \cdot CD$ rezultă egalitatea $AM = CP$.

Inegalitatea triunghiului $AB + BC \geqslant AC$ este adevărată oricare ar fi A, B, C.

3. Este definită o relație de echivalență prin „egalitate de unghiuri", în așa fel încît să se asigure cele trei cazuri de egalitate a triunghiurilor.

Simetria în raport cu un punct, precum și simetria în raport cu o dreaptă, transformă orice triunghi într-un triunghi egal. Un unghi, un triunghi isoscel, au o axă de simetrie. (Această existență a bisectoarei pentru orice unghi permite o măsură a unghiului, de exemplu în sistemul de numerație cu baza doi, toate unghiurile plate fiind egale.)

c)

Ca o consecință a lui **a**) și **b**), prin orice punct A și prin simetricul acestuia A' în raport cu o dreaptă d trece o dreaptă și numai una singură, dacă A nu este pe d: este perpendiculara (unică) coborîtă din A pe d. Consecință: orice oblică este mai lungă decît perpendiculara.

B) Geometriile metrice a lui Euclid și a lui Lobacevski

Plecînd de la enunțurile precedente, să studiem problema sumei unghiurilor unui triunghi, ceea ce ne va conduce la problema paralelismului. Să numim A, B, C unghiurile triunghiului ABC.

1. Deficitul unui triunghi

Să considerăm figura fundamentală (fig. 1) obținută prelungind cu $MD = AM$ mediana AM a unui triunghi ABC.

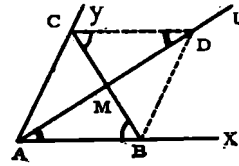


Fig. 1

Să numim Bx, Cy, Du semidreptele care prelungesc segmentele AB, AC, AD. Deoarece M este între B și C, semidreapta Mu este în regiunea $yCBx$, prin urmare tot acolo se află și punctul D, precum și segmentul CD, de unde $\widehat{BCD} < \widehat{BCy}$.

Dar, pe baza simetriei în raport cu M, $\widehat{BCD} = B$.

Prin urmare, *în orce triunghi, un unghi exterior este mai mare decît orice unghi interior neadiacent.*

Alt enunț. *Suma a două unghiuri ale unui triunghi este mai mică decît un unghi plat.*

CONSECINȚE

a) Fie un punct A nesituat pe o dreaptă $x'x$, și un punct O al acestei drepte; să ducem dreapta $X'X$ transportînd unghiuri alterne-interne egale (fig. 2), semidreapta AX fiind — în raport

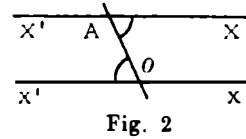


Fig. 2

cu dreapta AO — de aceeași parte ca Ox. AX nu poate avea un punct comun cu Ox, și nici AX' cu Ox'. Prin urmare, *fiecare*

punct O al lui $x'x$ are asociată o dreaptă $X'X$ fără puncte comune u $x'x$ care trec prin A.

b) Figura 1 arată că fiecărui triunghi ABC i se poate asocia un triunghi CAD ale cărui unghiuri au valorile $B + C$, D și $A - D$: suma celor trei unghiuri este aceeași, dar deoarece două unghiuri ale triunghiului format au ca sumă unghiul A, aceste unghiuri sînt mai mici decît A; mai mult, cel mai mic dintre ele este mai mic sau cel mult egal cu jumătatea lui A.

Să repetăm această operație: Formăm succesiv triunghiuri de unghiuri:

A_1, B_1, C_1 cu

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2} A, \quad B_1 < A, \quad A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C;$$

A_2, B_2, C_2 cu

$$A_2 \leqslant \frac{1}{2^2} A, \quad B_2 < \frac{1}{2} A, \quad A_2 + B_2 + C_2 = A + B + C; \text{ etc.},$$

A_n, B_n, C_n cu

$$A_n \leqslant \frac{1}{2^n} A, \; B_n < \frac{1}{2^{n-1}} A, \; A_n + B_n + C_n = A + B + C.$$

Or, oricare ar fi un unghi ε, putem determina un întreg N astfel încît, pentru orice $n > N$, să avem

$$\frac{1}{2^{n-2}} A < \varepsilon,$$

de unde

$$A_n < \frac{\varepsilon}{2}, \; B_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$A + B + C < \varepsilon + C_n < \varepsilon + 1 \text{ unghi plat}, \; \forall \varepsilon.$$

Prin urmare, $A + B + C$ nu poate avea o valoare mai mare decît un unghi plat. De unde enunțul:

Suma unghiurilor oricărui triunghi este mai mică sau cel mult egală cu un unghi plat.

Vom nota $S(ABC)$ suma unghiurilor triunghiului ABC. Diferența $d(ABC) = 1$ unghi plat $- S(ABC)$, care verifică

$$0 \leqslant d(ABC) < 1 \text{ unghi plat},$$

se numește *deficitul* triunghiului.

REMARCĂ. Orice triunghi are cel puţin două unghiuri ascuţite, fie ele B şi C; punctul A se află deci în banda limitată de perpendicularele pe BC duse prin B şi prin C. Aceasta înseamnă că înălţimea AH este un segment interior triunghiului. Vom folosi ceva mai departe concluzia: *Orice triunghi poate fi descompus* (în cel puţin un mod) *într-o reuniune de două triunghiuri dreptunghice adiacente*, adică triunghiuri care au două laturi în prelungire şi o latură comună.

c) STUDIUL DEFICITULUI. Fie două triunghiuri adiacente KMP, KMQ; din egalitatea

$$S(KMP) + S(KMQ) = S(KPQ) + 1 \text{ unghi plat},$$

rezultă

$$d(KMP) + d(KMQ) = d(KPQ).$$

Deducem de aici că *deficitul unui triunghi reuniune de triunghiuri adiacente două cîte două este egal cu suma deficitelor acestor triunghiuri*. Aceasta înseamnă că aceste numere — dacă nu sînt nule — constituie o măsură; ele sînt *proporţionale cu ariile* triunghiurilor.

În particular, dacă un triunghi PQR acoperă un triunghi ABC, avem $d(PQR) > d(ABC)$, şi dacă *o reuniune de triunghiuri adiacente constituie o acoperire a unui triunghi ABC, suma deficitelor acestor triunghiuri este mai mare decît $d(ABC)$*, egalitatea nefiind posibilă decît în cazul deficitelor nule.

Presimţim deja că am ajunge la o contradicţie dacă am reuşi să pavăm planul cu triunghiuri egale, fiindcă deficitul unui triunghi foarte mare ar trebui să fie foarte mare, iar pe de altă parte el nu poate depăşi un unghi plat.

2. Pavaj cu triunghiuri egale

Figura 1 conţine triunghiurile egale ABC şi DCB. Să o completăm prin simetrie în raport cu mijlocul lui BD. Or, BB_1, simetricul lui CD, nu prelungeşte pe AB decît dacă $d(ABC) = 0$. Acesta este singurul caz general în care asigurăm, prin acest procedeu, o acoperire a întregului plan în vecinătatea, de exemplu, a lui B. De unde interesul de a examina mai întîi acest caz.

Cazul 1. EXISTĂ UN TRIUNGHI ABC DE DEFICIT NUL. Obţinem pavajul din fig. 3. Dar cum să demonstrăm fără teoria paralelelor că el poate ajunge pînă în orice punct al planului? Putem evita dificultatea graţie rezultatului cunoscut despre unicitatea perpen-

diculare pe o dreaptă dusă dintr-un punct. Fiecare triunghi dreptunghic pe care știm să-l includem în triunghiul ABC cu ajutorul uneia din înălțimi va avea și el deficitul nul, așa că putem să-l folosim pentru a face pavajul (fig. 3').

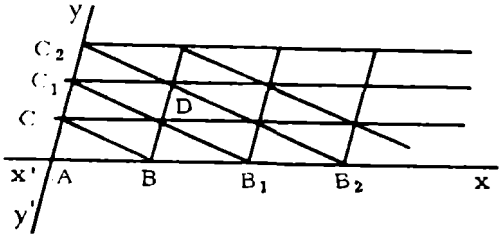


Fig. 3

Prin fiecare punct K al planului trec perpendicularele KH, KH' la $x'x$ și $y'y$. Or, conform proprietății lui Arhimede a dreptei reale, există doi întregi n și p astfel încît

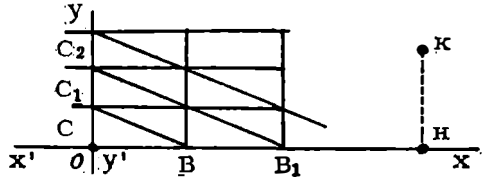


Fig. 3'

$$nOB \leqslant OH < (n+1)OB, \quad pOC \leqslant OH' < (p+1)OC$$

așa că H și H' sînt depășiți, și la fel și perpendicularele HK și $H'K$ pe $x'x$ și $y'y$.

Deoarece toate triunghiurile pavajului — fiind egale cu OBC — au un deficit nul, și deoarece pentru a acoperi orice triunghi din plan este suficient un număr finit de asemenea triunghiuri, conchidem că orice triunghi are un deficit nul. De unde enunțul fundamental:

Dacă un triunghi are deficitul nul, toate triunghiurile au deficitul nul.

CONSECINȚĂ. În fig. 2, dreapta $X'X$ nu depinde de punctul O ales pe $x'x$ (fig. 2').

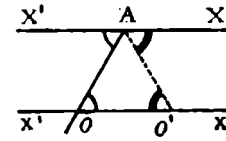


Fig. 2'

Cazul 2. NICI UN TRIUNGHI NU ARE DEFICITUL NUL. Pavarea întregului plan cu triunghiuri egale nu este posibilă, fiindcă deficitul unui triunghi acoperit cu un număr foarte mare de triunghiuri de pavaj ar trebui să depăşească un unghi plat.

3. Noţiunea de paralelism

O altă metodă ne este sugerată de fig. 2': să studiem, în cele două cazuri, ce se obţine dacă punctul O' de pe $x'x$ se îndepărtează nelimitat, de exemplu în sensul Ox.

Să alegem un şir de puncte P, P_1, P_2,..., P_n, ... în aşa fel încît fiecare triunghi $AP_{n-1}P_n$ să fie isoscel, $P_{n-1}P_n = P_{n-1}A$.

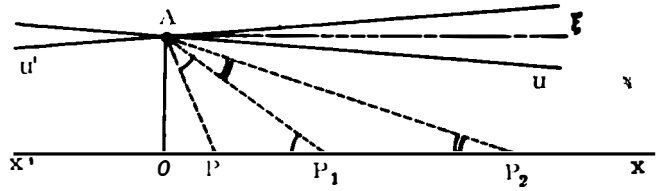


Fig. 4

Oblicele sînt din ce în ce mai lungi şi $OP_n > nOP$ tinde în mod evident către infinit. Orice punct Q de pe Ox este depăşit, şi dacă Q este între P_{n-1} şi P_n, avem $OP_{n-1}A > OQA > OP_nA$ (teorema unghiurilor exterioare). Dar aceeaşi teoremă dă

$$\widehat{OPA} \geqslant \frac{1}{2}\widehat{OP_1A} \geqslant \frac{1}{2^2}\widehat{OP_2A} \geqslant \ldots \geqslant \frac{1}{2^n}\widehat{OP_nA}.$$

Prin urmare, oricare ar fi unghiul ε, există un întreg N astfel încît

$$n > N \Longrightarrow \widehat{OP_nA} < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, măsura unghiului ascuţit $\widehat{OAP_n}$ creşte cu n, rămînînd mai mică decît un unghi drept; există deci o măsură

limită $\varphi \leqslant 1$ *dr.* Despre semidreapta Au care este astfel încît $\widehat{OAU} = \varphi$ spunem că „trece prin punctul de la infinit al lui Ox", sau că *„este paralelă cu* Ox".

Fie $A\xi$ semidreapta perpendiculară în A pe OA de partea considerată; semidreapta Au este sau confundată cu $A\xi$, sau în unghiul $\widehat{P_iA\xi}$, oricare ar fi întregul i.

Cazul 1. DEFICITELE TRIUNGHIURILOR SÎNT NULE. Ştim că $A\xi$ este confundată cu AX şi că $\widehat{P_iAX} = \widehat{OP_iA} \to 0$; prin urmare Au este confundat cu AX din fig. 2. La fel pentru Ox'. Prin urmare, semidreptele paralele cu $x'x$ sînt în prelungire şi constituie o dreaptă, *singura dreaptă care trece prin A şi care nu are nici un punct comun la distanţă finită cu* $x'x$.

Acest rezultat constituie *postulatul lui Euclid.* Din el deducem teorema lui Tales, teoria triunghiurilor asemenea din care, în triunghiul dreptunghic prevăzut cu o înălţime, teorema lui Pitagora. Toată geometria lui Euclid este construită pe aceste fundamente.

Cazul 2. DEFICITELE NU SÎNT NULE. Dreptele AX_i din fig. 2 care corespund punctelor P_i nu sînt atinse, prin urmare semidreapta Au este exterioară unghiurilor $\widehat{\xi AX_i}$. Aceasta înseamnă că *unghiul* $\widehat{OAu}$ *este mai mic decît un unghi drept.* Semidreptele Au şi Au' paralele respectiv cu Ox şi cu Ox' nu sînt în prelungire. Dreptele care poartă aceste semidrepte formează două unghiuri opuse la vîrf, de bisectoare $\xi' A\xi$. Toate dreptele care trec prin A şi sînt interioare acestor unghiuri sînt fără punct comun cu $x'x$; cele care sînt interioare unghiurilor adiacente ale acestora intersectează $x'x$.

II. Geometria lui Lobacevski

Este geometria construită pornind de la ipotezele acestui al doilea caz. Îi vom demonstra acum teoremele ei introductive.

a) Al 4-lea caz de egalitate a triunghiurilor

Să remarcăm mai întîi că din teorema deficitelor rezultă un *al 4-lea caz de egalitate a triunghiurilor*: *Dacă două triunghiuri au cele trei unghiuri egale două cîte două, ele sînt egale.* O vom

demonstra sub forma ei contrapusă: în două triunghiuri ABC și $A'B'C'$:

$$[A = A',\ B = B',\ AB \neq A'B'] \Longrightarrow [C \neq C'].$$

Într-adevăr, fie: $AB_1 = A'B'$ pe AB, cu B și B_1 de aceeași parte a lui A.

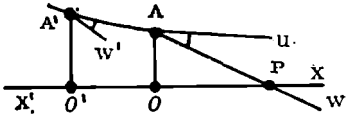
$AC_1 = A'C'$ pe AC, cu C și C_1 de aceeași parte a lui A.

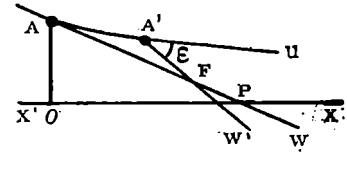
Triunghiul AB_1C_1 este egal cu triunghiul $AB'C'$, prin urmare $B = B_1$ și dreptele BC și B_1C_1 nu se intersectează (teorema unghiului exterior al unui triunghi). Prin urmare BCC_1B_1 este convex, suma unghiurilor sale este mai mică decît 2 unghiuri plate, de unde rezultă $C \neq C_1 = C'$; putem chiar conchide

$$[A = A',\ B = B',\ AB > A'B'] \Longrightarrow [C < C'].$$

b) **Drepte paralele**

Fie o dreaptă $x'x$ și, conform fig. 4, semidreapta Au dusă printr-un punct oarecare A și paralelă cu semidreapta Ox. Pe baza proprietăților de izotropie a planului, unghiul $\widehat{OAu}$ nu poate depinde decît de distanța $OA = d$. Vom nota $\widehat{OAu} = \varphi(d)$ și vom studia ceva mai departe această funcție.





Fie A' un punct arbitrar al *dreptei* care poartă semidreapta Au. Vom arăta că și semidreapta $A'u$ este paralelă cu semidreapta $O'x$. (Numim O' proiecția lui A' pe $x'x$.)

1) Dacă A' este pe prelungirea semidreptei Au, atunci, oricît de mic ar fi unghiul ε, putem trasa Aw și $A'w'$ astfel încît $\widehat{uAw} = \widehat{u'A'w'} = \varepsilon$ de partea în care se află $x'x$. Știm că Aw intersectează pe $x'x$, dar că nu intersectează pe $A'w'$. Dacă ε este suficient de mic, mai mic decît $\widehat{AA'O}$, $A'w'$ pătrunde în triunghiul AOP fără să taie pe AP, deci taie pe OP. Așadar $A'u$ este realmente semidreapta limită asociată punctului A'.

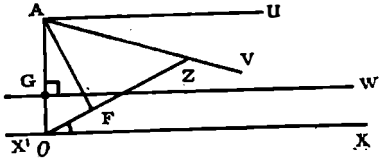
2) Dacă A' este pe semidreapta Au, atunci oricît de mic ar fi ε, putem lua pe $A'w'$ un punct F între Au și $x'x$; AF taie $x'x$ într-un punct P și $A'F$ pătrunde în OAP în punctul F, prin urmare intersectează pe OP. $A'u$ este și acum dreapta limită asociată punctului A'.

Vom spune că *dreapta care poartă semidreapta Au și dreapta $x'x$ sînt paralele în sensul $x'x$.*

REMARCĂ. De notat importanța ipotezelor și a proprietăților topologice — adică referitoare la împărțirea în regiuni. Am folosit de două ori axioma lui Pasch și o vom utiliza și în continuare. Trebuie notat că împărțirea în regiuni este la fel de esențială și pentru construirea axiomatică a proprietăților fundamentale definite în A, proprietăți comune geometriei euclidiene și celei a lui Lobacevski.

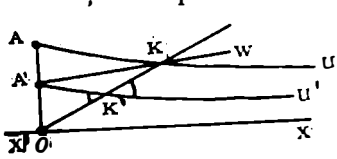
Teorema 1. *Relația de paralelism este o relație de echivalență*, cu condiția să se considere că o semidreaptă este paralelă cu ea însăși.

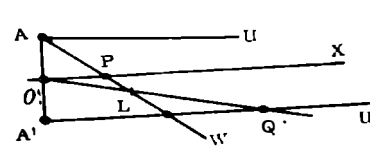
1) *Relația este simetrică;* Fie semidreapta Au paralelă cu Ox, O fiind proiecția lui A pe $x'x$. Trebuie dovedit că Ox este paralelă



cu Au, cu alte cuvinte că orice semidreaptă Oz conținută în AOx taie pe Au, oricît de mic ar fi $\widehat{xOz} = \varepsilon$. Fie AF perpendiculară pe Oz; acesta este un segment conținut în $uAOz$ și mai mic decît oblica AO; prin urmare, dacă luăm $AG = AF$, G este între A și O. Să ridicăm perpendiculara Gw pe OA și să ducem Av astfel încît figura $wGAv$ să fie egală cu figura $zFAu$. Av taie pe Ox, prin urmare, taie și pe Gw; în consecință Fz taie pe Au. ($Q.E.D.$).

2) *Relația este tranzitivă*: $AA'O$ fiind perpendiculară pe $x'x$, fie Au și $A'u'$ paralele la Ox. Presupunem mai întîi că A' este între





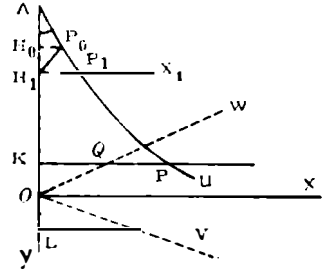
A și O. Este clar — pe baza unicității paralelei duse printr-un punct la semidreapta Ox — că dreptele Au și $A'u'$ nu au puncte comune. Este deci suficient să arătăm că orice dreaptă $A'w$ din

unghiul $u'A'A$ întîlnește pe Au, oricît de mic ar fi $u'A'w = \varepsilon$. Or, fie K' un punct al lui $A'u'$; știm că, atunci cînd K' se îndepărtează nelimitat, unghiul $OK'A'$ tinde către zero și, de asemenea, că semidreapta care prelungește pe OK' taie pe Au într-un punct K; prin urmare $\widehat{K'A'K}$, care este mai mic decît $\widehat{OK'A'}$, tinde către zero și devine mai mic decît ε. Teorema este deci demonstrată cînd O nu este pe segmentul AA'.

Dacă presupunem acum că O este între A și A', să arătăm că orice semidreaptă Aw din unghiul $A'Au$ întîlnește pe $A'u'$. Știm că ea întîlnește Ox într-un punct P; prin urmare, putem considera un punct L al semidreptei Pw situat între Ox și $A'u'$. Semidreapta care prelungește pe OL taie deci pe $A'u'$ într-un punct Q; în consecință, Aw — care pătrunde în triunghiul $OA'Q$ în L — taie și ea segmentul $A'Q$. Prin urmare, Aw intersectează pe $A'u'$ (Q.E.D.).

Teorema 2. *Oricare ar fi un unghi ascuțit dat, există o semidreaptă perpendiculară pe o latură și paralelă cu cealaltă.*

Fie $yAu = \alpha$ unghiul ascuțit dat. Dintr-un punct oarecare P_0 al lui Au să coborîm perpendiculara P_0H_0 pe Ay, apoi să con-



struim triunghiul $H_0P_0H_1$ simetric triunghiului H_0P_0A în raport cu H_0P_0, după care să ridicăm perpendiculara H_1x_1 pe Ay. Dacă această dreaptă taie Au într-un punct P_1, construim din nou simetricul triunghiului dreptunghic H_1AP_1 în raport cu această perpendiculară și așa mai departe. Avem

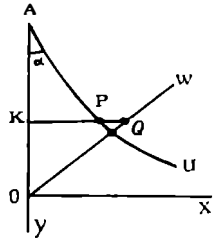
$$d(AH_0P_0) < \frac{1}{2}\, d(AH_1P_1) < \frac{1}{2^2}\, d(AH_2P_2) < \ldots < \frac{1}{2^n}\, d(AH_nP_n),$$

prin urmare

$$d(AH_nP_n) > 2^n d(AH_0P_0).$$

Conchidem că operația se oprește, prin urmare că există o perpendiculară H_nx_n la Ay care nu întîlnește Au.

Or, dacă perpendiculara într-un punct K al lui Ay taie Au, la fel se întîmplă cu perpendiculara în orice punct al segmentului AK, iar dacă perpendiculara într-un punct L al lui Ay nu întîlnește Au, la fel se întîmplă cu perpendiculara în orice punct al semidreptei Ly. Există deci un punct O, frontieră comună a mulțimii punctelor K și a mulțimii punctelor L. Fie Ox perpendiculara în acest punct O la Ay. Să studiem această semidreaptă.



Fie Ov o semidreaptă din yOx. Ea nu întîlnește Au fiindcă un punct comun s-ar proiecta pe Oy într-un punct L și ar apare o contradicție.

Fie Ow o semidreaptă din AOx; să demonstrăm că ea taie Au. Într-adevăr, fie Q un punct de pe Ow, și K proiecția lui pe Ay; știm că semidreapta KQ întîlnește Au într-un punct P. În aceste condiții, sau P este pe segmentul KQ și atunci Pu întîlnește OQ, sau Q este pe segmentul KP și atunci Ow întîlnește AP. În ambele cazuri Ow întîlnește Au.

Prin urmare, Ox este paralela la Au dusă prin O, ceea ce demonstrează teorema.

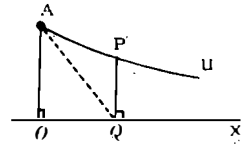
Pe baza notației deja introduse și introducînd $OA = d$, avem relația $\alpha = \varphi(d)$, și tocmai ce am demonstrat că există o corespondență biunivocă între d și α; prin urmare, funcția φ este monotonă (adică variază totdeauna în același sens). Or, figura demonstrează că dacă d scade, α trebuie să crească. Obținem tabelul

d	0	$\nearrow$	$+\infty$
α	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Teorema 3. *Dacă un punct P de pe o semidreaptă Au paralelă la Ox se îndepărtează în sensul de paralelism, distanța lui pînă la Ox scade.*

Într-adevăr, deoarece suma unghiurilor patrulaterului $OAPQ$ este mai mică decît 2 unghiuri plate, avem

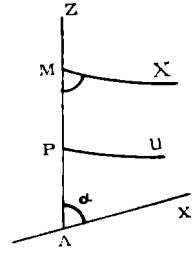
$$QPu > OAP, \text{ deci } QP < OA.$$



c) Curbă limită, sau oriciclu

Ca şi în geometria euclidiană, o circumferinţă are şi aici proprietăţile obişnuite de simetrie, de unde — o măsură a arcelor în acord cu măsura unghiurilor la centru. (Însă, firește, teorema unghiurilor înscrise nu mai există.) Mediatoarele tuturor coardelor se intersectează în centru.

Vom construi acum o curbă care este astfel încît mediatoarele tuturor coardelor ei sînt paralele între ele; aceasta va fi o curbă limită a circumferinţelor cînd centrul este aruncat la infinit pe



o semidreaptă; ea se numește *oriciclu* (sau *curba limită*, subînţelegînd „a cercurilor").

Fie Ax şi Az două semidrepte care formează un unghi *ascuţit* oarecare α. Să luăm pe Az lungimea $AM = 2d$, astfel încît $\varphi(d) = \alpha$. Mediatoarea Pu a lui Am este paralelă cu Ax şi cu paralela acesteia, MX.

Dînd lui α toate valorile ascuţite, vom fi demonstrat că locul lui M este curba căutată, dacă vom demonstra teorema:

Teorema 4. *Dacă, într-un triunghi, două mediatoare sînt paralele, a treia este şi ea paralelă cu ele.*

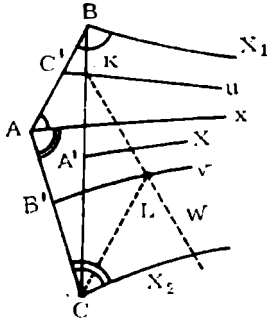
Să remarcăm mai întîi că dacă două mediatoare au un punct comun, a treia trece prin el (ca în geometria euclidiană); prin

urmare, dacă două mediatoare $B'v$, $C'u$ ale unui triunghi ABC sînt paralele, a treia mediatoare $A'X$ nu le întîlneşte. Dar este ea oare paralelă cu ele?

$$\beta = BAx = ABX_1 = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right), \quad \gamma = CAx = ACX_2 = \varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$

PRIMUL CAZ DE FIGURĂ. Ax între BX_1 şi CX_2.

Ipoteza este echivalentă cu



$$A = \beta + \gamma = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right) + \varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$

Fie C acela dintre punctele B şi C care este de aceeaşi parte cu A' în raport cu Ax.

$C'u$ taie pe BC în K între B şi A'; orice semidreaptă Kw dusă din K în CKu taie $B'v$, într-un punct L. Deoarece dreapta $A'X$ nu poate intersecta pe $B'v$, ea poate întîlni segmentul CL al triunghiului KCL, prin urmare întîlneşte KL. În felul acesta, oricare ar fi dreapta Kw considerată, ea întîlneşte $A'X$: aceasta înseamnă că $A'X$ este într-adevăr paralelă cu $C'u$.

Avem deci, în acest caz

$$\alpha = X_2CB = X_1BC = \varphi\left(\frac{BC}{2}\right)$$

şi

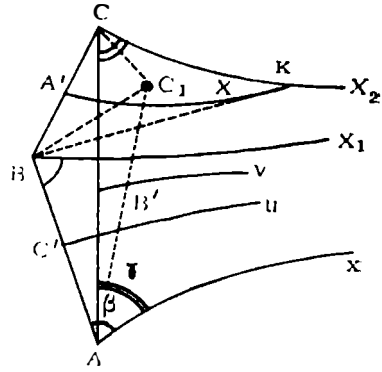
$$B = \beta - \alpha = \varphi\left(\frac{BA}{2}\right) - \varphi\left(\frac{BC}{2}\right), \; C = \gamma - \alpha = \varphi\left(\frac{CA}{2}\right) - \varphi\left(\frac{BC}{2}\right).$$

AL DOILEA CAZ DE FIGURĂ. Să presupunem BX_1 între Ax şi CX_2.

Să presupunem $\beta > \gamma$; vom avea

$$A = \beta - \gamma = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right) - \varphi\left(\frac{AC}{2}\right).$$

Dacă $A'X$ n-ar fi paralelă cu semidreptele BX_1 și CX_2, ea ar fi de acea parte a paralelei duse prin A care este astfel încît $A'X$ n-ar întîlni nici pe $B'v$, nici pe $C'u$: ea ar întîlni deci pe CX_2 într-un punct K și am avea



$$BCX_2 > \varphi\left(\frac{BC}{2}\right) > X_1BC,$$

deci

$$B > \beta + \varphi\left(\frac{BC}{2}\right),$$

adică

$$B > \varphi\left(\frac{BA}{2}\right) + \varphi\left(\frac{BC}{2}\right).$$

Prin urmare, dacă luăm

$$BC_1 = BC$$

astfel încît

$$ABC_1 = \varphi\left(\frac{BA}{2}\right) + \varphi\left(\frac{BC}{2}\right),$$

triunghiul ABC_1 ar fi de tipul primului caz de figură și am avea

$$BAC_1 = \varphi\left(\frac{AB}{2}\right) - \varphi\left(\frac{AC_1}{2}\right) > \beta - \gamma.$$

Or,

$$\varphi\left(\frac{AB}{2}\right) = \beta,$$

prin urmare

$$\varphi\left(\frac{AC_1}{2}\right) < \gamma = \varphi\left(\frac{AC}{2}\right),$$

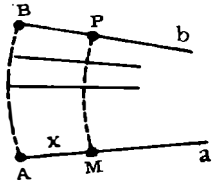
de unde

$$AC_1 > AC.$$

Dar $BCC_1 = BC_1C$, deci $AC_1C > ACC_1$, de unde $AC_1 < AC$. S-a ajuns la o contradicție. Înseamnă deci că $A'X$ este într-adevăr paralelă cu celelalte semidrepte, și teorema este demonstrată.

Corolar. *Curba admite în orice punct o tangentă perpendiculară pe MX.*

Măsura arcelor de oricicle. Ca și în geometria euclidiană, circumferințele sînt superpozabile pe ele însele prin alunecare; putem lua pe ele arce egale, și putem obține măsurile lor, proporționale cu unghiurile la centru. În geometria euclidiană, similitudinea demonstrează că lungimea unui arc de circumferință este proporțională cu



raza; acest rezultat nu mai este valabil în geometria lui Lobacevski. În această geometrie, studiul care este mai simplu de făcut este cel al arcelor de oricicle, fiindcă toate oriciclele sînt superpozabile, și putem lua pe un oriciclu un arc egal cu un arc al unui alt oriciclu.

Să considerăm două arce de oricicle AB și MP cuprinse între aceleași normale. Un sistem de paralele care secționează arce egale pe AB, secționează arce egale și pe MP, așa că raportul arcelor MP și AB nu poate depinde decît de lungimea rectilinie $AM = BP = x$ (lungimi egale, din considerente de simetrie).

Aa fiind dat, să notăm $MP = s(x)$, prin urmare $AB = s(0)$. Dacă luăm pe Aa, în sensul de paralelism, lungimi egale

$$AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n = a,$$

avem

$$\frac{s(a)}{s(0)} = \frac{s(2a)}{s(a)} = \ldots = \frac{s(na)}{s[(n-1)a]}.$$

de unde, prin înmulţire

$$\frac{s(na)}{s(0)} = \left[\frac{s(a)}{s(0)}\right]^n,$$

prin urmare, pentru n întreg

$$s(na) = s(0)\left[\frac{s(a)}{s(0)}\right]^n.$$

Dar să introducem $pa = b$, unde p este un întreg oarecare; avem de asemenea

$$s(b) = s(0)\left[\frac{s\left(\frac{b}{p}\right)}{s(0)}\right]^p,$$

adică

$$s\left(\frac{b}{p}\right) = s(0)\left[\frac{s(b)}{s(0)}\right]^{1/p}.$$

Deducem de aici, oricare ar fi b şi oricare ar fi întregii n şi p, pentru orice valoare raţională $x = n/p$,

$$s(bx) = s(0)\left[\frac{s(b)}{s(0)}\right]^x.$$

Prin continuitate, această formulă rămîne valabilă oricare ar fi numărul real x. În fine, să alegem ca unitate de lungime pe b arbitrar şi să notăm

$$\frac{s(b)}{s(0)} = \frac{1}{k},$$

număr care depinde de unitatea de lungime b şi despre care ştim că este pozitiv şi mai mic decît 1. Formula devine

$$k > 1, \quad s(x) = s(0)k^{-x}.$$

Am continuat expunerea pînă la această formulă pentru a arăta apariţia exponenţialelor în geometria lui Lobacevski, adică a formulelor în care măsura unei lungimi este exponentul unei puteri a cărei bază este un număr care depinde de unitatea de lungime. Prin urmare, dacă schimbăm unitatea de lungime, relaţia se schimbă, contrar celor ce se întîmplă în geometria euclidiană. (Aşa cum am arătat, omogenitatea formulelor în aceasta din urmă rezultă din existenţa figurilor asemenea.)

Să notăm că figura precedentă $ABPM$ are cele patru unghiuri drepte; ea înlocuieşte dreptunghiul.

Consideraţii de geometrie în spaţiu permit introducerea funcţiilor trigonometrice (vezi *Pangeometria* lui Lobacevski), şi se demonstrează că funcţia fundamentală $\alpha = \varphi(d)$ pe care o introduce teoria paralelelor verifică

$$\operatorname{cotg} \varphi(x) = \frac{1}{2}(k^x - k^{-x}),$$

unde k depinde în continuare de unitatea de lungime.

Dacă x tinde către 0, $\varphi(x)$ tinde către $\frac{\pi}{2}$: geometria lui Lobacevski este *local echivalentă* cu geometria euclidiană.

III. Modelul lui Poincaré pentru geometria lui Lobacevski (în plan)

Demonstraţiile făcute în § II sînt penibile şi par artificiale. Şi totuşi ele sînt cu totul comparabile cu cele din geometria euclidiană, dacă nu admitem faptele intuitive referitoare la dispunerea figurilor şi pornim de la axiomele lui Hilbert. Aici însă dificultatea merge mai departe şi ne lipsesc similitudinile. În expunerea de mai sus am urmărit de aproape prezentarea dată de LOBACEVSKI (mort în 1856) care nu putea avea noţiunea de grup de transformări. Or tocmai folosirea acestor grupuri este cea care asigură simplitatea şi comoditatea modelului creat de Henri Poincaré.

Un *model* este un sistem de imagini ale elementelor teoriei în cauză, sistem în care fiecare relaţie a teoriei are o imagine. Modelul poate prezenta, în afară de aceasta, şi alte structuri care, pentru un studiu intrinsec al teoriei, nu trebuie neapărat luate în considerare. Vom introduce acum un model scufundat în geometria metrică euclidiană, şi vom folosi această geometrie pentru demonstraţii (neintrinsece), aşa cum am folosit relaţiile afine pentru a demonstra teoreme de geometrie proiectivă. Un semnal tipografic (litere cursive, asterisc) va semnala că o figură este sau nu este considerată ca aparţinînd geometriei euclidiene.

a) Într-un plan, o dreaptă (X) determină două regiuni (e) şi (e'). Una din ele, fie ea (e), va fi pentru noi spaţiul (E) al geometriei noastre.

Grupul fundamental va fi cel al produselor de inversiuni al căror pol este pe X și a căror putere este pozitivă. Arcul de cerc de inversiune cuprins în (e) va fi numit *dreaptă*, iar inversiunea va fi numită *simetrie* în raport cu această *dreaptă*.

Pentru a putea enunța: „Prin două puncte trecc o *dreaptă* și numai una" trebuie să acceptăm ca *drepte* particulare dreptele (D_0) perpendiculare pe X, axă a unei *simetrii* care este o simetrie.

Conform acestui punct de vedere analagmatic, păstrăm noțiunea de unghi din geometria euclidiană.

Se vede imediat că două *drepte* sau se intersectează într-un punct, sau nu au puncte comune, sau au un punct comun J pe (X) unde ele formează un unghi nul: spunem despre asemenea *drepte* că sînt *paralele* spre J. Aceasta este o relație de echivalență. Teorema 2 a geometriei lui Lobacevski este exactă.

Printr-un punct A trec două *paralele* la o *dreaptă* dată (D); ele fac între ele un anumit unghi și separă *dreptele* care trec prin A în mulțimea celor care taie pe (D) și mulțimea celor care nu taie pe (D).

Punctele în care (D) taie (X) se numesc punctele *la infinit* ale lui (D). Pentru a spune că orice *dreaptă* are două puncte *la infinit* trebuie, din cauza *dreptelor* particulare (D_0), să adăugăm lui (X) un punct la infinit, care este și el *la infinit*.

Este imediat că suma unghiurilor unui *triunghi* este mai mică decît un unghi plat.

Mediatoarea unui *segment* de *dreaptă* este axa *simetriei* care intervertește extremitățile.

Să examinăm teorema 4: Un *triunghi* ABC ale cărui *mediatoare* D_{AB} și D_{AC} sînt paralele spre J este, în planul euclidian, un triunghi înscris într-un cerc tangent în J la (X), prin urmare a treia *mediatoare* este paralelă cu celelalte două spre J.

Vedem că *oriciclele* vor fi cercurile tangente la (X); ele au un punct la *infinit*.

b) Pentru ca modelul să fie valabil, ne rămîne să introducem noțiunea de distanță între două puncte.

Evident, dacă două perechi de puncte A, B și A', B' sînt omoloage într-o *simetrie*, trebuie să spunem că ele sînt *echidistante*; vom scrie $AB \doteq A'B'$. Atît doar că, deoarece *simetriile* nu formează un grup, va trebui să demonstrăm că relația noastră este realmente o relație de echivalență, fiindcă faptul acesta nu este evident.

Să introducem mai întîi *cercurile*. Locul punctelor M astfel încît $AM \doteq AB$ este cercul care trece prin B al fasciculului ale cărui puncte limită sînt A şi simetricul α al lui A în raport cu X, punct situat în (e'), fiindcă *dreptele* care trec prin A sînt cercurile care trec prin A şi α. Vom spune că acesta este *cercul* de *centru* A, care trece prin B.

Să remarcăm acum că două *cercuri* omoloage într-o *simetrie* în raport cu o dreaptă (D) sînt, în planul euclidian, omotetice în raport cu centrul cercului (D), şi că punctele *centre* ale *cercurilor* sînt omoloage în această omotetie. Reciproc, această omotetie a *cercurilor* împreună cu *centrele* lor asigură *simetria*, deci *egalitatea razelor*. Or, omotetiile al căror centru este pe (X) şi al căror raport este pozitiv formează un grup. Aceasta asigură *tranzitivitatea* relaţiei $\doteq$.

Deoarece reciprocitatea

$$[AB \doteq A'B'] \Longrightarrow [A'B' \doteq AB]$$

este evidentă, rămîne să verificăm *simetria*:

$$AB \doteq BA.$$

Să considerăm deci două *cercuri*: (a) de *centru* A, care trece prin B, şi (b) de *centru* B, care trece prin A. În planul euclidian, dreapta AB taie pe X în S, şi cercurile respectiv în B' şi A'. Relaţiile

$$SA^2 = SB \cdot SB' \quad \text{şi} \quad SB^2 = SA \cdot SA'$$

dau

$$\frac{SA}{SB'} = \frac{SB}{SA} = \frac{SA'}{SB},$$

ceea ce demonstrează că omotetia de centru S şi de raport SB/SA care transformă fasciculul de cercuri ale cărui puncte limită sînt A şi α, în cel ale cărui puncte limită sînt B şi β, transformă de asemenea pe (a) în (b). Aceste două *cercuri* au deci razele *egale*.

c) Pornind acum de la o *semidreaptă* AJ şi de la un *segment* AB, putem lua, pe AJ, într-un acelaşi sens, un şir de *segmente egale*

$$AB \doteq BM_1 \doteq M_1M_2 \doteq \ldots$$

Obținem o infinitate de puncte M între A și J. M tinde către J în sensul că sfîrșește prin a fi de aceeași parte cu J în raport cu orice *dreaptă*. O *dreaptă* este deci arhimedeană. Între punctele ei există o relație de ordine și, dacă B este între A și C, avem $AC = AB \overset{\bullet}{+} BC$, printr-o definiție evidentă a adunării, notate cu semnul $\overset{\bullet}{+}$.

Ne rămîne să verificăm *inegalitatea triunghiului*. (De reținut că axioma lui Pasch este verificată.)

Fie un *cerc* (a) de *centru* A și un punct B. *Cercurile* de *centru* B, ca și *cercul* (a), sînt fiecare global invariante la *simetria* în raport cu *dreapta* care trece prin A și B. Această *dreaptă* (D) taie (a) în P și Q, care sînt punctele de contact cu (a) ale *cercurilor* de *centru* B tangente la (a). Să presupunem B exterior lui (a), adică $AB > AP = AQ$.

Cercurile de centru B care taie (a) într-un punct M au o *rază* intermediară între BQ și BP. Dacă P este între A și B,

$$BP < BM < BQ,$$

dar avem

$$BP = AB - AP \quad \text{și} \quad BQ = BA + AQ,$$

prin urmare

$$BA - AM < BM < BA + AM,$$

care este inegalitatea triunghiului investigată.

d) O *deplasare* sau o *antideplasare* este un produs de *simetrii*. Se demonstrează fără dificultate cazurile de *egalitate* a *triunghiurilor*. Avem deci toate elementele necesare pentru a traduce geometria lui Lobacevski, în particular, pentru a continua cele spuse despre măsura unui arc de oriciclu.

Exemplul teoremei 4 arată clar că, pentru demonstrații, noul model al geometriei este mai comod decît cel vechi. Însă din punctul de vedere al noțiunii noastre de spațiu, considerat drept model al lumii fizice, singurul interesant este — firește — primul model, cel al lui Lobacevski.

Amintim — pentru comparație cu geometria pe care o vom introduce acum — că a intervenit o lungime fundamentală: cea pe care am luat-o drept unitate.

IV. Geometrie sferică, model al unei geometrii a lui Riemann

Vom studia o geometrie cu două dimensiuni care admite ca model — printre alte modele posibile — geometria sferică din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni — dacă se consideră că cercurile mari joacă rolul de drepte.

Pot fi date şi modele plane pentru această geometrie, de exemplu cu ajutorul unei proiecţii stereografice (inversiune al cărei pol se află pe sferă). Vom semnala principalele proprietăţi printre care ar trebui alese un sistem de axiome caracteristice, dacă am vrea să construim această geometrie într-un mod autonom.

Numim (E) spaţiul nostru cu două dimensiuni şi (S) modelul sferic în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni $\mathfrak{R}^3$. (S) este mulţimea punctelor definite plecînd de la un centru O prin $OM = R$, lungime R care va interveni ca lungime absolută a lui (E). De preferinţă însă vom introduce lungimea $L = \pi R$. Ca şi (S), (E) este orientabil.

I) Numim *drepte* ale lui (E) mulţimile de puncte care au ca imagini cercurile mari ale lui (S), adică urma pe (S) a planelor care trec prin centrul O, şi păstrăm pe aceste drepte metrica cunoscută pe (S), precum şi noţiunea de egalitate a figurilor.

Toate dreptele sînt egale între ele, şi superpozabile una pe alta prin alunecare; ele împart spaţiul (E) în două regiuni convexe, dar proprietăţile indicate la începutul acestui capitol, [§ A, **a**], nu mai sînt valabile:

1) *Două drepte se taie întotdeauna în două puncte* pe care le numim puncte „asociate" şi ale căror imagini sînt diametral opuse pe (S). Fie A, A' o astfel de pereche: printr-o asemenea pereche trec o infinitate de drepte, fiindcă orice dreaptă care trece prin A, trece şi prin A'. Trebuie deci precizat: prin două puncte *neasociate* trece o dreaptă şi numai una.

2) O dreaptă nu mai este „dreaptă reală" definită prin $AM = xAB$, unde x parcurge întreaga mulţime a numerelor reale; într-adevăr, cu metrica adoptată, o dreaptă este o curbă închisă de lungime $2L$; prin urmare, pe dreapta orientată de origine A aleasă, un punct va fi în corespondenţă biunivocă cu o clasă de resturi a unei congruenţe modulo $2L$. Dacă am vrea să păstrăm dreapta nelimitată, ar trebui să ne imaginăm o dreaptă care se înfăşoară nelimitat peste ea însăşi în cele două sensuri, şi E ar avea ca model o sferă acoperită de o infinitate de straturi, ale

căror conexiuni ar trebui precizate. Asemenea spații au fost introduse de Riemann, dar noi nu vom vorbi de ele aici.

Deoarece dreptele nu sînt infinite și se intersectează totdeauna, nu se pune problema paralelelor: nu vor exista deci dificultăți în a face o *geometrie locală*, procedînd în așa fel încît în figura considerată să nu intervină simultan un punct și asociatul acestuia: aceste perechi nu vor apare decît cînd vom reuni mai multe figuri din (E), precum și în raționamentele făcute în spațiul $\mathcal{R}^3$. Grație acestei restricții, proprietățile [A (**b** și **c**)] vor rămîne în vigoare, în particular — existența și unicitatea perpendicularei coborîte dintr-un punct pe o dreaptă; această teoremă fundamentală arată cît de important este să se asocieze fiecărei drepte perechea ei de poli: Dacă A și A' este perechea de poli a unei drepte a, orice dreaptă care trece prin A și A' este perpendiculară pe a și are polii pe a.

O dreaptă apare în felul acesta ca un caz limită al unei circumferințe, cînd raza acesteia, presupusă tot timpul mai mică decît $L/2$, tinde către $L/2$.

B) Triunghiuri

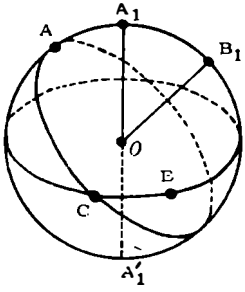
a) DEFINIȚIE. Două drepte împart (E) în 4 regiuni numite *fuse* care au două laturi egale cu L și două unghiuri egale. Trei drepte împart E în 8 regiuni (și nu în 7, ca în planul euclidian). Fiecare regiune se numește *un triunghi* al lui E. Pe S, el este deci urma unui triedru al lui $\mathcal{R}^3$. Laturile triunghiului sînt segmente de dreaptă de lungime mai mică decît L (arce secționate de fețele triedrului), iar unghiurile sînt cuprinse între 0 și π (ele sînt măsurate de diedrele triedrului). Sînt valabile cele trei cazuri obișnuite de egalitate a triunghiurilor.

Dacă elementele unui triunghi ABC sînt a, b, c, A, B, C, să notăm că elementele triunghiurilor formate de aceleași plane — triunghiuri asociate două cîte două prin egalitate sau antiegalitate — sînt

$$\begin{bmatrix} a, & b, & c \\ A, & B, & C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a, & L-b, & L-c \\ A, & \pi-B, & \pi-C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L-a, & b, & L-c \\ \pi-A, & \pi-B, & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L-a, & L-b, & c \\ \pi-A, & \pi-B, & C. \end{bmatrix}$$

Simetria care apare între lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor se explică dacă asociem acestor 8 triunghiuri cele 8 noi triunghiuri determinate de perechile de poli ale dreptelor care



formează triunghiurile date. Fie A_1, A_1' perechea de poli a lui BC; să-l distingem pe acela, A_1, care se află în semispaţiul în care se află A: avem $AA_1 < L/2$. Definim în mod analog B_1 (deosebit de B_1') şi C_1. Din inegalităţile $BB_1 < L/2$ şi $CC_1 < L/2$ rezultă că A este de acea parte a lui B_1C_1 în care se află A_1, şi analog pentru B şi pentru C; deoarece ştim că A, B, C sînt tocmai polii laturilor lui $A_1B_1C_1$, conchidem că relaţia între triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ este reciprocă: aceste triunghiuri formează *o pereche de triunghiuri suplimentare*. Geometria în $\mathfrak{R}^3$ dă elementele triunghiului $A_1B_1C_1$ suplimentar lui ABC:

$$a_1 = L\left(1 - \frac{A}{\pi}\right),\ b_1 = L\left(1 - \frac{B}{\pi}\right),\ c_1 = L\left(1 - \frac{C}{\pi}\right),$$

prin urmare, pe baza reciprocităţii,

$$A_1 = \pi\left(1 - \frac{a}{L}\right),\ B_1 = \pi\left(1 - \frac{b}{L}\right),\ C_1 = \pi\left(1 - \frac{c}{L}\right).$$

Deoarece egalitatea a două triunghiuri este echivalentă cu egalitatea triunghiurilor lor suplimentare, din al treilea caz de egalitate aplicat triunghiurilor suplimentare (egalitatea laturilor) rezultă un *al patrulea caz de egalitate a triunghiurilor în* (E): Două triunghiuri sînt egale sau antiegale dacă au cele trei unghiuri egale două cîte două.

b) INEGALITĂŢI REFERITOARE LA ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI. Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca trei lungimi a, b, c, mai mici decît L, să fie laturile unui triunghi se obţin din discutarea intersecţiei a două circumferinţe: Fie $BC =$

$= a$ latura cea mai mare: circumferinţele de centre B şi C, şi de raze c şi b, se taie în condiţiile date de împărţirea în regiuni pe E şi de convexitatea circumferinţelor:

$$a < b + c < 2L - a$$

(egalităţile exprimînd coliniaritatea punctelor). Aceasta atrage după sine aceleaşi inegalităţi dacă a nu este latura cea mai mare.

Prima dintre aceste inegalităţi este *inegalitatea triunghiului*; ea justifică noţiunea adoptată ca *distanţă* între două puncte.

Aplicînd aceste inegalităţi triunghiului suplimentar, deducem pentru unghiuri: $\pi - A < B + C < \pi + A$; în particular, $A + B + C > \pi$.

c) ARIA UNUI TRIUNGHI. Tocmai ce am văzut că suma unghiurilor unui triunghi este mai mare decît două (unghiuri) drepte, contrar situaţiei din geometria lui Lobacevski. Dacă revedem demonstraţia făcută în cadrul acesteia din urmă, constatăm că demonstraţia teoremei despre unghiul exterior cu ajutorul medianei rămîne valabilă, cu condiţia însă ca punctul D să fie în regiunea convenabilă, ceea ce impune ca mediana AM să fie mai mică decît $L/2$. Această restricţie împiedică deducerea în continuare a consecinţei referitoare la existenţa dreptelor fără puncte comune (existenţă pe care o ştim imposibilă). Cît despre punctul *b*) al acelui studiu, el ar cere ca dreapta să fie infinită.

Se numeşte *exces al triunghiului* diferenţa $\delta = A + B + C - \pi$. Exact ca pentru deficitul în geometria lui Lobacevski, excesul unui triunghi reuniune a două triunghiuri adiacente este egal cu suma exceselor acelor triunghiuri, aşa că *aria este proporţională cu excesul.*

Dar geometria sferei în $\mathcal{R}^3$ ne arată că *aria totală a spaţiului* (E) *este finită* şi are valoarea $4\pi R^2 = 4L^2/\pi$. Or, (E) este acoperit de 8 triunghiuri ale căror vîrfuri sînt A, B, C şi asociatele lor; ştim că suma totală a unghiurilor acestor triunghiuri este 12π, prin urmare suma exceselor este

$$12\pi - 8\pi = 4\pi.$$

Coeficientul de proporţionalitate este deci cunoscut şi aria triunghiului ABC este

$$\frac{L^2}{\pi^2}(A + B + C - \pi)$$ (*Formula lui Albert Girard*, cca 1620).

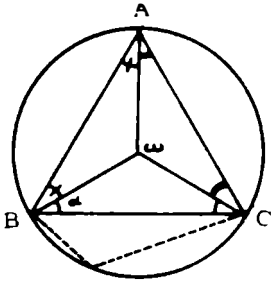
CONSECINȚĂ: *Teorema lui Lexell* (cca. 1770). Fiind date două vîrfuri B, C ale unui triunghi, să se găsească locul vîrfului A astfel încît aria triunghiului să fie constantă.

Să demonstrăm mai întîi lema următoare:

Arcul BAC al cercului circumscris unui triunghi ABC, reunit cu simetricul său în raport cu BC, este locul punctelor M astfel încît

$$B + C - M = B + C - A = 2\alpha \ (\alpha > 0 \text{ sau } \alpha < 0).$$

Demonstrația se face ca în geometria euclidiană cu ajutorul unghiurilor de la baza triunghiurilor isoscele. Unghiul α determină centrul ω al cercului circumscris (al aceluia, de exemplu, care, în (E), are raza mai mică decît $L/2$).



Fie deci date punctele A, B, C, excesul fiind și el dat:

$$\delta = A + B + C - \pi.$$

Deducem de aici, pentru triunghiul $AB'C'$ (B' și C' sînt asociatele lui B și C):

$$B' + C' - A = \pi - \delta.$$

Locul lui A este deci format din *două arce ale cercurilor* care trec prin B' și C'. (De notat că aria este nedeterminată dacă A este în B' sau în C'.)

d) FORMULE TRIGONOMETRICE. Formula fundamentală a fost obținută ca aplicație a noțiunii de produs scalar a doi vectori (Cartea I, cap.5). Ea se scrie acum

$$\cos\frac{\pi a}{L} = \cos\frac{\pi b}{L}\cos\frac{\pi c}{L} + \sin\frac{\pi b}{L}\sin\frac{\pi c}{L}\cos A \qquad (1)$$

și, trecînd la triedrul suplimentar,

$$\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos \frac{\pi a}{L}. \tag{2}$$

Calculul permite să se deducă de aici

$$\frac{\sin \pi a/L}{\sin A} = \frac{\sin \pi b/L}{\sin B} = \frac{\sin \pi c/L}{\sin C}. \tag{3}$$

Pentru triunghiurile ale căror laturi sînt mici,

$$\cos \frac{\pi a}{L} \simeq 1 - \frac{\pi^2 a^2}{L^2}, \quad \sin \frac{\pi a}{L} \simeq \frac{\pi a}{L}, \quad \frac{\pi^2 b^2}{L^2} \cdot \frac{\pi^2 c^2}{L^2} \simeq 0;$$

prin urmare, (1) și (3) dau

$$a^2 \simeq b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} \simeq \frac{b}{\sin B} \simeq \frac{c}{\sin C}.$$

Pentru (2) avem

$$\cos A = \cos (B + C) + \sin B \sin C \left[1 - \cos \frac{\pi a}{L} \right] \simeq \cos(B+C),$$

de unde, pentru unghiuri cuprinse între 0 și π,

$$A + B + C \simeq \pi.$$

Geometria studiată este local echivalentă cu geometria euclidiană.

Am descris, în cele de mai sus, mai multe geometrii care au numeroase asemănări între ele. Am plecat totdeauna de la figuri definite global, cum sînt dreptele. Dintre aceste geometrii, cele care erau metrice, erau local echivalente cu geometria euclidiană. În particular, pentru două puncte A și B foarte apropiate, AB^2 se exprimă prin teorema lui Pitagora, cu ajutorul unui sistem convenabil de coordonate.

RIEMANN, din contra, *pleacă* de la această concluzie.

El construiește geometrii plecînd de la o metrică definită local și pe care o extinde la spații foarte variate, prin procedeele calculului integral. Unele din aceste geometrii sînt folosite în teoriile metrice ale relativității generalizate și în teoriile fizicii moderne. Aici însă studiul lor ne interesează mai ales pentru a putea înțelege ce anume are particular geometria euclidiană.

PARTEA A III-A

CONICELE

După drepte şi circumferinţe, curbele cele mai remarcabile în geometria plană sînt conicele. Studiul lor oferă puncte de vedere variate şi foloseşte toate teoriile precedente. El constituie pentru noi un veritabil cîmp de aplicaţii.

I. Definiţie în conul de revoluţie

Numim *conică* (în acord cu punctul de vedere istoric şi cu etimologia) *orice secţiune plană a unui con de revoluţie*. Dacă planul trece prin vîrf, conica este degenerată într-un punct, sau într-un ansamblu de două drepte, sau într-o dreaptă dublă (cazul unui plan tangent).

Un con de revoluţie (S) va fi determinat prin vîrful său S, axa sa z şi unghiul ascuţit α pe care axa z îl face cu generatoarele G. Adesea îl vom considera, de asemenea, circumscris unei sfere.

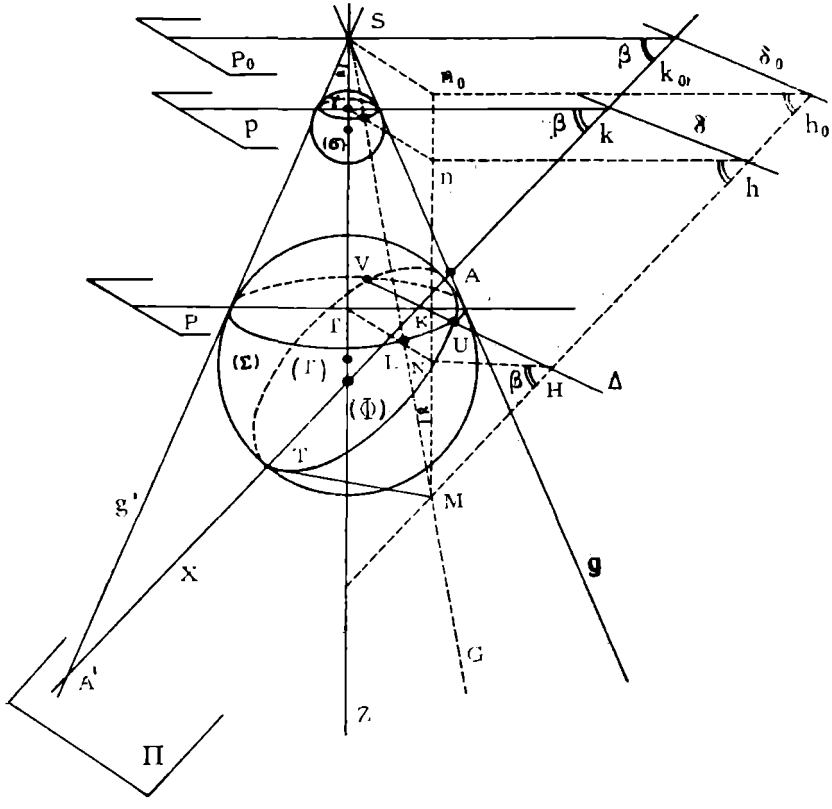
Planul de secţionare Π va fi determinat printr-o dreaptă pe care o vom alege, şi prin unghiul ascuţit β pe care-l face cu un plan perpendicular pe axa Sz a conului. (Acest unghi va fi luat în valoare absolută, dar sensul lui va fi presupus stabilit o dată pentru totdeauna.)

Curba (C) de intersecţie este definită ca loc al punctului M în care o generatoare G taie planul Π. Scopul nostru constă în primul rînd în a defini această curbă prin relaţii metrice.

1) Planul Π este determinat de dreapta δ_0 de intersecție cu planul p_0 dus prin S, perpendicular pe axa z.

Să proiectăm pe M în n_0 pe p_0, și în h_0 pe δ_0. Această operație pune în evidență două plane: zMn_0 și Mh_0n_0. Să traducem definițiile:

$$M \in (S) \Leftrightarrow \frac{Mn_0}{MS} = \cos\alpha \left.\right\}; \quad M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \Pi \\ \dfrac{MS}{Mh_0} = \dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}. \end{cases}$$
$$M \in (\Pi) \Leftrightarrow \frac{Mn_0}{Mh_0} = \sin\beta \left.\right\}$$



Enunțul 1. *Conica* (C) *este locul punctelor planului* Π *al căror raport al distanțelor la vîrf și la dreapta* δ_0 *este constant*, egal cu $\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = e$ (*excentricitatea* conicei).

2) Fiind dată o sferă (σ) înscrisă în con, fie p planul cercului său (γ) de contact. Să determinăm pe Π prin intersecția sa δ cu acest plan. Generatoarea G este tangentă la sferă în punctul l (situat pe γn).

$$\left.\begin{array}{l} M \in (S) \Longleftrightarrow \dfrac{Mn}{Ml} = \cos \alpha \\ M \in (\Pi) \Longleftrightarrow \dfrac{Mn}{Mh} = \sin \beta \end{array}\right| ; \quad M \in (C) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} M \in \Pi \\ \dfrac{Ml}{Mh} = \dfrac{\sin \beta}{\cos \alpha} = e. \end{array}\right.$$

Enunțul 2. *Conica* (C) *este locul punctelor planului* Π *al căror raport al distanțelor tangențiale la sfera* (σ) *către distanțele la dreapta* δ *este constant, egal cu* e.

3) Printre sferele înscrise în con, există unele care taie planul Π. Fie una din ele, (Σ), care taie Π după un cerc (Φ). Există atunci două tangente la sferă duse din M care sînt în planul Π.

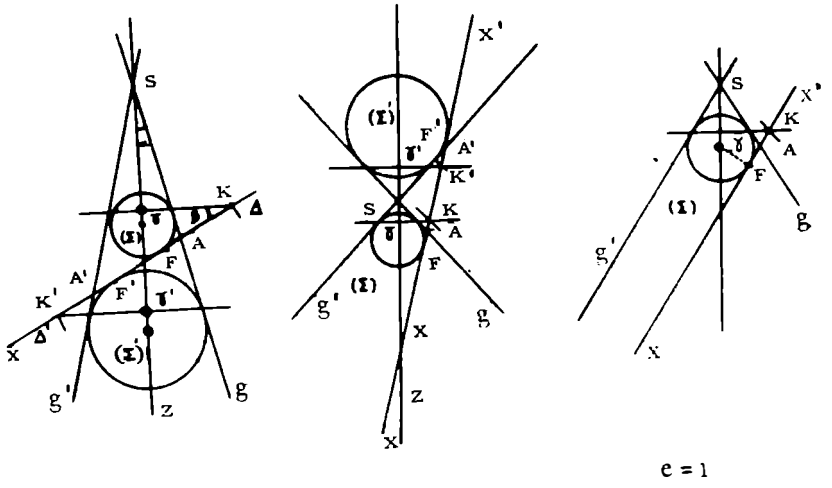
Enunțul 3. *În planul de secționare, conica este locul punctelor al căror raport al distanțelor tangențiale la cercul* (Φ) *către distanțele la dreapta* Δ *este constant, egal cu* e.

Să notăm că dacă cercurile (Γ) și (Φ) ale sferei se taie în două puncte U și V, dreapta Δ este dreapta UV, iar conica trece prin aceste puncte și este tangentă în aceste puncte la cercul (Φ). În toate cazurile, cercul (Φ) se numește *cerc focal* al conicei, iar Δ este *directoarea* asociată lui.

4) Mulțimea sferelor înscrise se obține plecînd de la una din ele printr-o omotetie de centru S și de raport variabil. Pentru a discuta existența cercului de intersecție (Φ), să considerăm secțiunea figurii cu planul ei de simetrie, plan determinat de Sz și proiecția acestuia, X, în planul Π. Conul este tăiat după două generatoare g, g', iar planul Π după dreapta X. Aceasta taie g și g' în două puncte A, A' ale conicei. Aceste puncte, intersecții ale curbei cu o axă de simetrie, se numesc *vîrfuri*.

O sferă înscrisă taie sau nu planul Π după cum cercul ei mare de secțiune cu planul figurii taie sau nu pe X. Apar (în general)

două sfere remarcabile, tangente la planul Π: la aceste sfere, cercul mare considerat este tangent la laturile triunghiului SAA':



1) $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$, adică $e < 1$ [Un cerc înscris / Un cerc exînscris în $\hat{S}$

2) $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$, adică $e > 1$ [Două cercuri exînscrise în $\hat{A}$ și A'.

3) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, adică $e = 1$ [Dreapta X este paralelă cu g' (de exemplu); un singur cerc.

În felul acesta, există cel puțin o sferă tangentă la planul Π. Punctul ei de contact F se numește *focarul* conicei; el este asociat unei directoare Δ. Or MF este tangentă la sferă; lungimea ei este distanța tangențială din enunțul general, de unde enunțul particular:

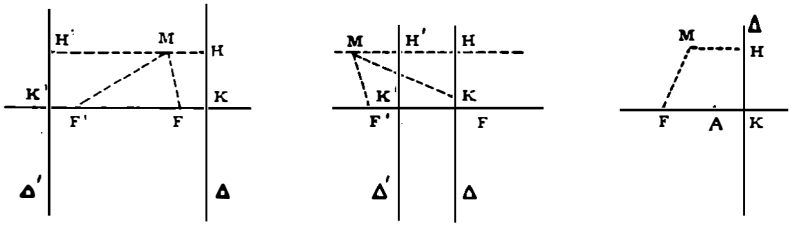
Enunțul 4. *În planul de secționare, conica este locul punctelor al căror raport al distanțelor la punctul F și la dreapta Δ este constant, egal cu e.*

5) În cazul $e = 1$, acesta nu dă decît o singură pereche (F, Δ) pentru a determina conica. Conica aceasta se numește *parabolă*.

Proiecția ei pe planul de simetrie este semidreapta Ax care conține F, prin urmare curba este formată dintr-o singură ramură care se întinde pînă la infinit.

În cazul $e < 1$, curba se proiectează după segmentul AA'; curba este un oval cuprins în întregime între directoarele paralele Δ și Δ'. Ea se numește *elipsă*.

În cazul $e > 1$, curba se proiectează după două semidrepte Ax, $A'x'$; ea este formată din două ramuri care se întind la infinit; ea se numește *hiperbolă*.



În cazul $e \neq 1$, să considerăm simultan cele două relații caracteristice

$$\frac{MF}{MH} = e, \tag{4}$$

$$\frac{MF'}{MH'} = e. \tag{4'}$$

Distanța între paralelele Δ și Δ' este o constantă a conicei:

$$\begin{cases} HH' = MH + MH' \text{ pentru elipsă, deci } MF + MF' = e \cdot HH' & (5) \\ HH' = |MH - MH'| \text{ pentru hiperbolă, deci} \\ \qquad |MF - MF'| = e \cdot HH' & (5') \end{cases}$$

Se obișnuiește să se noteze $2a$ constanta care apare: $2a = e \cdot HH'$. De unde

Enunțul 5. *În planul ei, elipsa este o mulțime de puncte a căror sumă a distanțelor la F și F' este egală cu $2a$.*

În planul ei, hiperbola este o mulțime de puncte a căror diferență a distanțelor la F și F' este egală cu $2a$. Fiecare ramură corespunde unui semn al lui $MF - MF'$.

Este oare necesară aici o reciprocă, pentru a conchide că curba este locul geometric definit de (5), sau de (5'), deoarece (4) [sau (4')] este consecinţă a lui (5) sau a lui (5')?

Un răspuns afirmativ se poate deduce din examinarea formei curbelor definite prin 4) şi prin 5); rezultă imediat că prima nu poate constitui numai o parte a celei de a doua. Dar garanţia echivalenţei condiţiilor 4) şi 5) o vom obţine formînd ecuaţia acestor curbe.

Să mai consemnăm că obţinem un enunţ mai general dacă considerăm cele două cercuri focale (φ) şi (φ'). Deoarece dispunerea curbei faţă de cele două directoare nu mai este pusă în evidenţă, ne vom mulţumi cu un enunţ imprecis: *Curba este o mulţime de puncte a căror sumă sau a căror diferenţă a distanţelor tangenţiale la două cercuri* (φ) *şi* (φ') *este constantă.*

Unul din punctele de interes ale enunţului 5) este că face să apară o *a doua axă de simetrie* a elipsei şi a hiperbolei: mediatoarea lui FF', şi, implicit, şi *un centru de simetrie*: mijlocul O al lui FF'. Acest fapt neaşteptat va fi explicat de studiul proiectiv al curbei.

REMARCĂ. Tot ceea ce s-a spus mai sus, începînd de la punctul 2) este valabil şi dacă conul este înlocuit cu un *cilindru de revoluţie*: este suficient să facem $\alpha = 0$, prin urmare $e = \sin \beta$; secţiunea este în general eliptică. Secţiunile paralele cu generatoarele sînt parabole degenerate: *perechi de drepte paralele.*

6) RECIPROCE. *a*) Reciproca esenţială priveşte enunţurile 3) sau 4) care definesc curbele în planele lor (fig.1).

Fiind date, într-un plan, un cerc (Φ) (*sau un punct* F) *şi o dreaptă* Δ, *precum şi un număr pozitiv* e, *să se arate că există un con de revoluţie care trece prin curba definită prin*

$$\frac{\text{dist. tang. } M, (\Phi)}{\text{dist. } M, \Delta} = e \left(\text{sau, echivalent, } \frac{MF}{\text{dist. } M, \Delta} = e\right).$$

Există o infinitate de perechi de unghiuri ascuţite α şi β care verifică $e = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$ (pentru $e < 1$, se alege mai întîi β; dacă s-a dat $e > 1$, se alege mai întîi α).

Valoarea lui β determină planul P. Printre sferele fasciculului al cărui cerc de bază este (Φ) (sau care sînt tangente în F la planul P), există totdeauna cel puţin una care taie P sub unghiul

$\pi/2 - \alpha$; conul căutat este circumscris acestei sfere de-a lungul cercului Γ după care ea taie planul P.

[Această sferă va putea fi construită și folosind secțiunea cu planul de simetrie și o inversiune al cărei pol este pe (Φ)].

Prin urmare, în felul acesta, *orice curbă definită prin* 3) *sau* 4) *este o conică.*

Această conică este totuși descompusă, dacă se dă F și o dreaptă Δ care trece prin F.

b) Determinarea unui con de revoluție care trece prin conica definită prin

$$MF + MF' = 2a \quad sau \quad |MF - MF'| = 2a.$$

Secțiunea cu planul de simetrie (fig.2) conține două puncte A și A' ale curbei (vîrfurile axei focale) și un triunghi SAA' care trebuie construite pornind de la punctele de contact F și F' ale cercurilor tangente. În cazul elipsei, S este arbitrar pe hiperbola definită prin $|SA - SA'| = FF'$, ale cărei focare sînt A și A', iar vîrfurile F și F'. În cazul hiperbolei, S este arbitrar pe elipsa definită prin $SA + SA' = FF'$, ale cărei focare sînt A, A' iar vîrfurile F și F'. Problema este deci totdeauna posibilă.

A apărut o configurație interesantă formată din două conice: o elipsă și o hiperbolă; relația între aceste conice este reciprocă. Ele se numesc pereche de *conice focale.*

Pentru parabolă, studiul este — în mod necesar — oarecum diferit: Figura arată că S este echidistant de A și de dreapta perpendiculară pe $x'x$ dusă prin punctul simetric lui A în raport cu F. În felul acesta, locul lui S se află în planul de simetrie al parabolei date, și este o parabolă egală al cărei focar este vîrful parabolei date, iar vîrful — vechiul focar. Cele două parabole se numesc și ele *parabole focale.*

II. Conicele în geometria analitică. Grad

1) TRADUCEREA DEFINIȚIILOR 3 ȘI 4

Reperul fiind ortonormal, fie că punctul F are niște coordonate oarecare x_0, y_0, iar ecuația dreptei Δ este dată sub forma normală

$$x \cos \alpha + y \sin \beta - \delta = 0;$$

curba loc al punctelor care verifică

$$\frac{MF}{\text{dist. } M, \Delta} = e$$

are atunci ecuaţia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta)^2.$$

Analog, dacă s-a dat un cerc (Φ) de ecuaţie $P(x, y) = 0$ (coeficienţii lui x^2 şi y^2 în P fiind 1), ecuaţia este

$$[P(x, y)]^2 = e^2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta)^2.$$

Să alegem reperul în aşa fel încît să simplificăm aceste ecuaţii. În definiţia prin focarul F şi directoarea Δ, să luăm pe F ca origine a coordonatelor, şi perpendiculara pe Δ ca axă x; ecuaţia lui Δ va fi $x = d$. Ecuaţia conicei este

$$x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2. \qquad (I)$$

Să notăm că, în cazul parabolei $e = 1$, ecuaţia se reduce la

$$y^2 = -2d\left(x - \frac{d}{2}\right),$$

şi că dacă luăm ca origine vîrful notînd, aşa cum se obişnuieşte, $|d| = p$, ea devine, cu un sens pozitiv convenabil ales pe axa x,

$$y^2 = 2px. \qquad (I')$$

Aceasta este *ecuaţia redusă a parabolei*. p se numeşte *parametrul* parabolei: este distanţa de la focar la directoare. Deoarece nu depinde decît de această unică lungime, toate parabolele sînt asemenea între ele.

2) TRADUCEREA RELAŢIEI 5 SAU 5′

Dacă introducem cele două focare — o facem pentru a pune în evidenţă simetriile elipsei, sau ale hiperbolei. Luăm deci ca origine a coordonatelor centrul conicei, şi ca axă x, axa focală. Focarele au deci drept coordonate F: $[x = c > 0,\ y = 0]$, şi F': $[x = -c,\ y = 0]$.

Notăm

$$FM = r, \quad FM' = r',$$

de unde

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad r'^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

deci

$$r^2 - r'^2 = -4cx.$$

În coordonatele bipolare, ecuațiile de definiție sînt

$$r + r' = 2a \text{ (elipsă) sau } |r - r'| = 2a \text{ (hiperbolă).}$$

Studiem deci sistemele:

$$r > 0, r' > 0, r^2 = (x - c)^2 + y^2 \qquad (1)$$

cu

$$\begin{cases} r + r' = 2a \\ r - r' = -\frac{2cx}{a} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} r - r' = 2a \\ r + r' = -\frac{2cx}{a} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} r' - r = 2a \\ r' + r = +\frac{2cx}{a}, \end{cases}$$

adică cu

$$\begin{cases} r = a - \frac{cx}{a} \\ r' = a + \frac{cx}{a} \\ -\frac{a}{c} < \frac{x}{a} < \frac{a}{c} \end{cases} (i) \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r = a - \frac{cx}{a} \\ r' = -\left(a + \frac{cx}{a}\right) \\ \frac{x}{a} < -\frac{a}{c} \end{cases} (i') \quad \text{sau} \quad \begin{cases} r = -\left(a - \frac{cx}{a}\right) \\ r' = a + \frac{cx}{a} \\ \frac{x}{a} > \frac{a}{c} \end{cases} (i'')$$

Egalitatea (1) dă atunci, în toate cazurile,

$$y^2 = a^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (II)$$

Prin urmare, ecuația (II) este aceeași pentru elipsă și pentru hiperbolă, dar trebuie asigurată existența punctelor care satisfac condițiile scrise:

Primul caz, elipsa:

$$\frac{c}{a} < 1 \text{ cere } \left|\frac{x}{a}\right| < 1.$$

Condiția este comparabilă cu (i), dar nu și cu (i') sau cu (i'').

Cazul al doilea, hiperbola:

$$\frac{c}{a} > 1 \quad \text{cere} \quad \left|\frac{x}{a}\right| > 1.$$

Condiția este compatibilă cu (i') și (i''), dar nu și cu (i).

Caz particular $c = a$: Locul se reduce la segmentul FF' în condițiile (i), și la semidreptele Fx și $F'x'$ în condițiile (i') și (i'').

Prin urmare, ecuația (II) traduce $MF + MF' = 2a$ în cazul $a > c$; ea traduce $|MF - MF'| = 2a$ în cazul $a < c$.

Aceste condiții erau de altfel, în mod evident, necesare, fiindcă ele traduc inegalitatea triunghiului în MFF'.

3) ECHIVALENȚA CELOR DOUĂ ECUAȚII (I) ȘI (II)

Să plecăm de exemplu de la (II) și, prin translația reperului, să ducem originea în focarul F:

$$x = X + c, \quad y^2 = [a^2 - (X + c)^2]\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right),$$

adică

$$y^2 + X^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(X - \frac{a^2 - c^2}{c}\right)^2.$$

Regăsim (I) punînd

$$\frac{c}{a} = e \quad \text{și} \quad \frac{a^2 - c^2}{c} = d.$$

Echivalența între cele două definiții este perfect demonstrată.

4) CONSECINȚE

a) Am întîlnit în calcule expresia *distanței de la punctul generic* M *la focarul* F *(sau* F'*) ca funcție rațională de gradul întîi în abscisa punctului.* Acest fapt este cu totul remarcabil, fiindcă formula lui Pitagora dă, în general, o expresie irațională. În esență, tocmai această proprietate este cea care este exprimată în definiția prin focar-directoare sub forma

$$r = e(x - d),$$

sau sub forma

$$r = e(d - x),$$

adică, de fapt, sub forma

$$r = e \mid x - d \mid.$$

b) Definiția bipolară este mai puțin favorabilă transpunerii în geometria analitică, dar ea permite să se conchidă imediat în unele probleme, cum este de pildă următoarea: *locul centrelor cercurilor* (γ) *tangente la două cercuri date în plan*, sau: *tangente la un cerc și trecînd printr-un punct*. Această a doua problemă este mult mai simplă decît prima, fiindcă configurația figurii nu admite decît două cazuri: punct dat exterior sau interior circumferinței. Ea permite construcții simple referitoare la elipsă sau hiperbolă. Dacă cercul este înlocuit cu o dreaptă, problema conduce la o parabolă. Conica obținută are un focar F în punctul dat, iar celălalt, F', în centrul cercului dat; axa ei focală $2a$ este egală cu raza cercului. Acesta se numește *cercul director* relativ la F'; cercurile (γ) definesc o corespondență biunivocă între punctele conicei și cele ale cercului director considerat.

c) Pentru a pune în evidență, în ecuația (II), natura conicei, introducem o lungime b definită prin

$b^2 = a^2 - c^2$ pentru elipsă, $b^2 = c^2 - a^2$ pentru hiperbolă.

Ecuația elipsei capătă atunci *forma redusă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (II')$$

Se vede ușor că b este distanța față de centru a punctelor elipsei situate pe axa nefocală. (Vîrfurile B și B').

$2a$ se numește *axa mare*, $2b$ este *axa mică*, iar $2c$ — *distanța focală*.

Ecuația redusă a hiperbolei este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (II'')$$

Lungimea b apare, de data aceasta, nu pe axa de simetrie nefocală — care nu taie curba — ci în figura completată cu dreptele de ecuații

$$Y = \frac{b}{a} x \quad \text{și} \quad Y = -\frac{b}{a} x.$$

Ne dăm seama de importanța acestor drepte dacă comparăm prima dreaptă cu arcul de ecuație

$$x > 0, \quad y = + b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Diferența între ordonate este

$$y - Y = b\left[\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right] = b \cdot \frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}$$

și tinde către 0 cînd x tinde către infinit. Facem același studiu schimbînd succesiv semnele lui x și y. Prin urmare, *cele* 2 *drepte al căror ansamblu are ca ecuație*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

sînt asimptotele hiperbolei. Ele sînt perpendiculare dacă $a = b$ (hiperbolă echilateră). Atunci $c = a\sqrt{2}$.

Asimptotele sînt diagonalele dreptunghiului cu aceleași simetrii ca hiperbola, ale cărei vîrfuri A și A' sînt mijloacele laturilor paralele cu $y'y$, lungimea acestor laturi fiind $2b$. Prin urmare, lungimea acestor diagonale este distanța focală $FF' = 2c$. Pentru hiperbola echilaterală acest dreptunghi este un pătrat.

5) TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ

Orice curbă plană a cărei ecuație este de gradul doi este o conică.

Ecuația generală în reper ortonormal

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

poate fi simplificată prin schimbări de coordonate: mai întîi, o rotație a axelor poate face să dispară termenul în xy. Într-adevăr, o asemenea rotație se exprimă prin

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta; \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta.$$

Să anulăm coeficientul termenului în XY:

$$(C - A) \sin 2\theta + 2B \sin 2\theta = 0.$$

Găsim totdeauna o valoare pentru θ (definită pînă la $\pi/2$) care satisface condiția.

Ecuația a devenit atunci

$$A_1x^2 + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F = 0.$$

A_1 și C_1 nu sînt ambii nuli, dacă ecuația este realmente de gradul doi. Să presupunem $C_1 \neq 0$. Atunci o translație care schimbă originea ordonatelor Y poate anula coeficientul termenului în y, și ecuația se reduce la

$$y^2 = nx^2 + px + q$$

$n \neq 0$: o schimbare a originii absciselor x conduce la $y^2 = nx^2 + s$

- $s \neq 0$: elipsă sau hiperbolă, în funcție de semnul lui n. Nici un punct, pentru $n < 0$, $s < 0$.
- $s = 0$: Două drepte concurente, pentru $n > 0$. Un punct, pentru $n < 0$.

$n = 0$:

- $p \neq 0$: O schimbare a originei absciselor x conduce la $y^2 = 2px$: parabolă.
- $p = 0$: $y^2 = q$, două drepte paralele sau confundate, sau caz de imposibilitate.

Găsim deci totdeauna o conică, propriu-zisă sau degenerată, cînd *există* puncte care satisfac ecuația, dar se poate întîmpla ca asemenea puncte să nu existe. Numai introducerea de puncte imaginare în plan permite interpretări cu totul generale, asociind orice ecuație de gradul doi cu o conică, și reciproc.

În cazul unui reper neortonormal, o ecuație de gradul doi reprezintă tot o conică, fiindcă o schimbare oarecare a bazei nu modifică gradul.

Exemple de aplicații

a) CONICA — CURBĂ UNICURSALĂ. Fiind dat un punct $A(x_0, y_0)$ al unei conice, orice dreaptă δ care se rotește trecînd prin A taie din nou curba într-*un* punct care descrie curba. Să luăm ca *parametru* coeficientul unghiular m al dreptei δ. Ecuația de gradul

doi în abscisele (de exemplu) ale intersecţiilor dreptei cu curba *se descompune* în

$$x - x_0 = 0$$

şi o ecuaţie de gradul întîi care dă abscisa punctului generic M, de unde — ordonata acestuia, ca *funcţii raţionale de parametru*. Aceasta caracterizează o *curbă unicursală*. Această corespondenţă biunivocă între numărul real m şi punctul M este, în mod evident, deseori mai practică decît corespondenţa între M şi perechea de coordonate ale acestuia. Ea înlocuieşte corespondenţa din spaţiu între M şi generatoarea G a conului.

b) Fie două puncte A şi B din plan; *intersecţia unei drepte Au şi a unei drepte Bv, variabile astfel încît coeficienţii lor unghiulari sînt legaţi printr-o relaţie omografică este o conică.*

Într-adevăr, eliminarea lui m şi m' între

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad y - y_1 = m'(x - x_1) \text{ şi } m' = \frac{am + b}{a'm + b'}$$

dă o ecuaţie de gradul doi

$$(y - y_1)[a'(y - y_0) + b'(x - x_0)] = (x - x_1)[a(y - y_0) + b(x - x_0)].$$

Conica trece prin punctele A şi B. (Cititorul va studia posibilităţile de degenerare în drepte.)

Ştim că condiţia impusă între m şi m' este echivalentă cu egalitatea birapoartelor a 4 drepte Au şi a asociatelor lor Bv. Prin urmare, în ciuda reperului ales, teorema aparţine geometriei proiective (vezi mai departe IV).

III. Proprietăţi afine ale conicelor cu centru

Din ecuaţiile reduse ale conicelor cu centru, se vede că o afinitate ortogonală de axă paralelă cu axa focală şi de raport a/b transformă elipsa în *cerc*, şi hiperbola în *hiperbolă echilateră*. La fel, în cazul unei afinităţi ortogonale de axă paralelă cu axa nefocală şi de raport b/a.

În felul acesta, elipsa derivă din cercul de diametru AA' care uneşte vîrfurile axei focale, cerc numit *cerc principal*. El dă elipsa printr-o proiecţie ortogonală pe un plan care face cu planul

cercului unghiul θ definit prin $\cos\theta = b/a$. Elipsa însă dă, printr-o asemenea proiecție un cerc egal cu cercul (BB') al cărui diametru este axa mică a elipsei (cerc numit deseori *cercul secundar*).

Hiperbola echilateră, de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$, merită să fie studiată fiindcă, așa cum orice studiu afin al elipselor poate fi făcut pe cerc, tot așa orice studiu afin al hiperbolelor poate fi făcut pe hiperbola echilateră. (Folosim singularul fiindcă toate *hiperbolele echilatere sînt asemenea între ele* — așa cum sînt și cercurile — deoarece ele nu depind decît de o singură lungime.)

HIPERBOLA ECHILATERĂ. Ecuația $x^2 - y^2 = a^2$ devine, după rotația axelor cu un unghi $\pi/4$:

$$XY = k^2, \quad \text{sau} \quad Y = \frac{k^2}{X}.$$

Recunoaștem graficul unei funcții omografice. Cîteva enunțuri sînt imediate:

α) *Curba este locul punctelor situate în două unghiuri opuse la vîrf, și al căror produs al distanțelor pînă la două drepte perpendiculare este constant.* Dreptele sînt asimptotele curbei. Se vede ușor că dacă acceptăm toate cele 4 unghiuri, două hiperbole sînt asociate. Într-o formulare afină care se extinde la toate hiperbolele: *mulțimea celor două hiperbole asociate este locul punctelor M astfel încît paralelogramul de diagonală OM care are două laturi purtate de asimptote are o arie constantă.*

β) Dacă o secantă M_1M_2 taie asimptotele în U și V, din egalitatea

$$x_1y_1 = x_2y_2,$$

deducem

$$\left[\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}\right] \Longleftrightarrow \left[\frac{\overline{UM_1}}{\overline{UM_2}} = \frac{\overline{VM_2}}{\overline{VM_1}}\right],$$

care exprimă că M_1M_2 și UV au același mijloc. De unde — enunțul în geometria afină: *Orice secantă a unei hiperbole taie curba și asimptotele după două segmente care au același mijloc.* Acest enunț este foarte util pentru o construcție prin puncte, cînd se cunosc asimptotele și un punct al curbei.

γ) Ca o consecință a simetriilor pe care le prezintă o mulțime de două drepte, teorema care urmează joacă — pentru hiperbola echi-

laterală — rolul pe care-l juca teorema despre simetriile ortogonale în cazul cercului: *orice dreaptă care trece prin centru este axă de simetrie*, în general — oblică. Această teoremă este deci valabilă pentru elipse și pentru hiperbole.

δ) Asociind două hiperbole așa cum am spus, obținem romburi circumscrise pentru hiperbolele echilatere, așa cum obținem pătrate pentru cercuri, de unde — *paralelograme circumscrise de arie constantă* pentru elipse oarecare și pentru perechile de hiperbole asociate. (*Paralelogramele lui Apollonios.*) Dreptele duse prin centru se numesc *diametre*.

REMARCĂ. Geometrii greci făceau studiul conicelor într-un mod analog, cu ajutorul ecuației (II) demonstrate direct pornind de la con, ecuație care, scrisă sub forma

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \mid (x - a)\ (x + a) \mid$$

dă

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \overline{mA} \cdot \overline{mA}',$$

dacă m este proiecția lui M pe axa focală.

Această relație dă pentru cerc

$$y^2 = - \overline{mA} \cdot \overline{mA}'$$

iar pentru hiperbola echilateră

$$y^2 = + \overline{mA} \cdot \overline{mA}'.$$

IV. Conicele în geometria proiectivă

Pe baza definiției în conul de revoluție și a reciprocei demonstrate, știm că orice conică este perspectiva unui cerc. *Toate proprietățile proiective ale cercurilor sînt deci și proprietăți ale conicelor.* Proprietatea fundamentală este exprimată de *teoria polilor și polarelor*: Orice punct are asociată o dreaptă numită polara sa, care conține conjugatele armonice ale punctului în raport cu coardele secționate de curbă pe dreptele duse prin punct. Reciprocitatea polară se extinde la punctele polarei care nu corespund unei coarde reale; faptul a fost demonstrat pentru cerc cu ajutorul

unor cercuri auxiliare ortogonale, metodă neproiectivă din care nu păstrăm aici decît concluziile. Numai teoria punctelor imaginare dă o explicație satisfăcătoare.

În particular, o anumită dreaptă q din planul cercului are ca imagine dreapta de la infinit q' din planul conicei; polul Q' al acesteia din urmă este deci *un centru de simetrie pentru conică*; este imaginea polului Q al lui q în raport cu cercul. Totuși, dacă q este tangentă la cerc, Q este pe această dreaptă q, așa că centrul este aruncat la infinit; acesta este cazul *parabolei* care trebuie considerată ca fiind tangentă la dreapta de la infinit, centrul fiind punctul de contact.

Din punct de vedere metric, existența unei axe de simetrie ortogonale și a unui centru de simetrie atrage după sine existența unei a doua axe de simetrie care trece prin centru și este perpendiculară pe prima: așa se explică existența acestei a doua axe.

Polara unui punct oarecare al dreptei de la infinit trece prin centrul de simetrie și este o axă de simetrie oblică: existența acestor *diametre* (axe de simetrie oblică sau ortogonală ale unei curbe) a fost descoperită în studiul afin.

Cum se enunță sub formă proiectivă proprietatea unghiului înscris de la cerc? Luînd 4 puncte pe un cerc, fasciculul celor 4 drepte duse prin aceste puncte din punctul generic al cercului rămîne egal cu el însuși; în particular, biraportul lui este constant. Putem deci enunța:

Teorema lui Chasles. *Biraportul a 4 drepte care unesc patru puncte fixe ale unei conice cu punctul generic al curbei este constant.*

Să notăm că acest biraport nu are nici valoarea 0, nici 1, nici infinit.

RECIPROCĂ. *Fiind date, într-un plan, patru puncte A, B, C, D, locul punctelor M din plan astfel încît fasciculul $M(A, B, C, D)$ are un biraport λ dat* ($\lambda \neq 0$ și $\lambda \neq 1$) *este o conică care trece prin cele patru puncte.*

Deoarece este vorba de geometrie proiectivă, înseamnă că dacă folosim geometria analitică, este inutil să luăm un reper ortonormal. Pe de altă parte, două dintre puncte pot fi presupuse la infinit (situație care este realizabilă prin perspectivă). Să presupunem deci C la infinit într-o direcție x, D la infinit într-o direcție y, și fie O punctul astfel încît OA are direcția x, iar OB direcția y. Luăm O ca origine, iar ca bază, $\mathbf{OA} = \mathbf{i}$ și $\mathbf{OB} = \mathbf{j}$. Fie x, y coordonatele lui M.

Dreptele MA, MB, MC, MD taie Ox în punctele de abscise 1, m, x, ∞, abscisa m fiind dată de condiția de coliniaritate

$$\frac{m-0}{x-0} = \frac{0-1}{y-1},$$

adică

$$m = \frac{-x}{y-1}.$$

Unul din birapoartele fasciculului este deci

$$\lambda = \frac{x-1}{x-m} = \frac{(x-1)(y-1)}{xy}.$$

λ fiind dat, ecuația locului este de gradul doi:

$$(\lambda - 1)xy + x + y - 1 = 0.$$

Locul este deci o conică. Ea trece prin $A(x = 1, y = 0)$, prin $B(x = 0, y = 1)$ și, de asemenea, prin C și prin D.

O conică este deci definită de 4 puncte și de biraportul λ.

Consecință fundamentală

Orice curbă plană perspectivă a unei conice este o conică.

Într-adevăr, este suficient să determinăm conica prin 4 puncte A, B, C, D și prin biraportul corespunzător, pentru a obține o definiție proiectivă a curbei.

Studiul aprofundat al conicelor este deci inseparabil de teoriile geometriei proiective.

V. Punct de vedere tangențial

O curbă este considerată din punct de vedere tangențial dacă ea este definită ca *înfășurătoare a tangentelor sale.*

Fiecare din definițiile conicelor permite demonstrarea existenței unei tangente în fiecare punct al curbei și studierea ei. Ies în evidență, în felul acesta, diferite proprietăți.

1. În conul de revoluție, tangenta apare ca fiind intersecția planului curbei cu planul tangent la con în lungul generatoarei care trece prin punctul conicei. În particular, în cazul unei secțiuni hiperbolice, tangentele în punctele de la infinit, adică *asimptotele*, sînt intersecțiile planului Π al curbei cu planele tangente de-a lungul

generatoarelor paralele cu II. Ele sînt deci paralele cu aceste generatoare. Vedem, în particular, că unghiul asimptotelor care conţine curba este în mod necesar mai mic decît unghiul de deschidere 2α al conului (α fiind unghiul generatoarelor cu axa de revoluţie).

2. Conform definiţiei unei tangente, cînd studiem curba în planul ei, facem să se rotească o dreaptă în jurul punctului M_0 al curbei. Intervine deci punctul de vedere care tratează conica drept o curbă unicursală.

Dacă curba este definită printr-un focar F, directoarea corespunzătoare Δ şi excentricitatea e, definiţia arată imediat că o secantă MM_0 taie Δ pe una din bisectoarele unghiului $\widehat{M_0FM}$; dacă M este vecin cu M_0, este vorba de bisectoarea exterioară. Făcînd pe M să tindă către M_0, deducem de aici că tangenta în M_0 există şi că *segmentul de tangentă cuprins între punctul de contact şi directoare este văzut din focar sub un unghi drept.*

Dacă am definit curba prin cele două focare şi lungimea $2a$, studiul tangentei se poate face luînd derivatele vectorilor (Cartea a III-a, cap. 3, § IV). Am văzut că *tangenta în M_0 este una din bisectoarele unghiului $\widehat{FM_0F'}$.*

Dintr-un punct de vedere mai geometric, este comod să definim conica printr-un focar F şi cercul director centrat în celălalt focar F'. (Este cercul de rază $2a$ pe care l-am introdus în § II, 4, *b*.) Cercurile (γ_0) şi (γ), centrate respectiv în M_0 şi M şi care ating cercul director în U_0 şi U, au o axă radicală care tinde către FU_0 cînd M tinde către U_0, iar tangenta apare ca fiind mediatoarea lui FU_0. Obţinem enunţul: *Tangentele la o conică sînt mediatoarele segmentelor care unesc un focar cu punctele cercului director centrat în celălalt focar.* Pentru hiperbolă, tangenta este asimptotă dacă FU_0 este tangentă la cercul director. La o parabolă, cercul director este înlocuit de directoare.

Deoarece există o corespondenţă biunivocă între punctele U_0 ale cercului director şi punctul M_0 al conicei, prin urmare — şi între U_0 şi tangenta în M_0, *conica este înfăşurătoarea dreptei definite ca fiind mediatoarea lui FM_0.*

3. Afinitatea permite şi ea să se deducă existenţa tangentei la o conică cu centru, precum şi proprietăţile acesteia din cele ale tangentelor la cerc (pentru elipsă) sau la hiperbola echilateră (pentru hiperbole). Pentru acestea din urmă, din proprietatea

secantelor (demonstrată în § III, β) referitoare la coardele secţionate de curbă şi de perechea de asimptote, rezultă că *punctul de contact al unei tangente este mijlocul segmentului secţionat de asimptote.*

4. Conform definiţiei ca secţiune a unui con, printr-un punct al planului, nesituat pe conică, trec sau 2 tangente la conică sau nici una. Această proprietate este asociată prin dualitate cu proprietatea: o dreaptă netangentă taie curba sau în două puncte, sau în nici unul. Din acest punct de vedere punctual, spuneam că o conică este de gradul doi. *Din punct de vedere tangenţial, spunem că o conică este de ordinul doi.* Aşa cum o conică considerată din punct de vedere punctual poate degenera în două drepte secante sau paralele, sau chiar într-o dreaptă dublă, trebuie să considerăm şi degenerescenţe tangenţiale în două puncte sau într-un punct dublu. Se demonstrează atunci că orice curbă de ordinul doi este o conică. Nu facem însă decît să semnalăm acest punct de vedere care, pentru a fi dezvoltat, cere o teorie a înfăşurătoarelor (geometrie infinitezimală).

CONCLUZIE

Am introdus studiul conicelor pe diferite căi. Dar ele pot fi întîlnite şi în multe alte studii, în particular în probleme de *cinematică* (am semnalat, la sfîrşitul studiului deplasărilor, descrierea elipsei cu ajutorul benzii de hîrtie; o regăsim şi ca curbă hipocicloidală, făcînd un cerc să se rostogolească pe un altul în anumite condiţii). Conicele sînt deosebit de importante în *dinamică* (traiectoriile planetelor — conform legilor lui Kepler — ca o consecinţă a atracţiei mutuale a planetei şi Soarelui după legea lui Newton). Ele intervin de asemenea în *optică*. (Focarele sînt puncte în care converg razele de lumină, în anumite condiţii etc.)

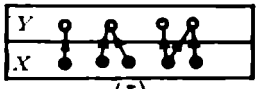
Toate aceste aplicaţii justifică introducerea studiului acestor curbe (precum şi a suprafeţelor numite *cuadrice*) în cursurile de matematică. Ele creează ocazii de a aplica metode variate şi dau loc la nenumărate exerciţii interesante. Dar şi alte curbe sînt interesante, pe care le studiem în geometrie (în general metrică) sintetică sau analitică, pentru aplicaţiile lor tehnice sau, pur şi simplu, cu titlu de exerciţii ieşite din comun. După ce se determină cărei geometrii îi aparţine studiul propus, se recurge la „instrumentele" introduse de noi: relaţiile şi transformările acelei geometrii.

ANEXĂ

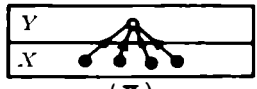
Am adunat aici cîteva observații suplimentare și o serie de exerciții; primele ilustrează aspectele zise „moderne" ale expunerii noastre: ele pregătesc studiul structurilor care fac obiectul unui studiu de nivel superior. Celelalte sînt date cu titlu de exemple. Ele propun o metodă de investigare și de expunere pentru tipurile cele mai importante de probleme clasice întîlnite în manualele folosite deja de mulți ani în ultima clasă a liceelor franceze.

SINTAXĂ: DESPRE ORDINEA CUANTIFICATORILOR

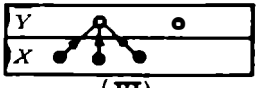
Exercițiu. Reprezentăm relația de ordine $\prec$ printr-o săgeată ascendentă. Să se examineze cele 4 situații indicate de modelele grafice de mai jos:



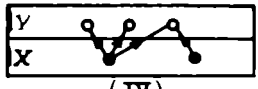
(I)



(II)



(III)



(IV)

Afirmațiile care urmează sînt oare exacte pentru unele din aceste situații?

a) $\forall x,\ (\exists y : x \prec y)$ *b*) $\exists y : (\forall x : x \prec y)$

c) $\exists x,\ (\forall y : x \prec y)$ *d*) $\forall y : (\exists x : x \prec y)$

REMARCĂ. Putem conveni să omitem parantezele, dar este mai clar dacă le păstrăm.

SUPLIMENT. Să se dea exemple din situațiile deja studiate, de exemplu în mulțimea întregilor, cu relația de ordine „divide".

GENERALITĂȚI DESPRE MULȚIMI

I. Notă despre simbolul cu care se reprezintă o mulțime:

Se folosește deseori acolada pentru:
Enumerarea elementelor: $\{a, b, c, d\}$
Șir de p elemente: $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$
Șir infinit de elemente: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$
Definirea elementului generic: $\{x : x \leqslant 3\}$

Exercițiul 1. Să se reprezinte în plan mulțimea punctelor

$$\{u = (x, y) : 0 < x < 1, x < y\}.$$

Exercițiul 2. Să se identifice următoarele mulțimi, incluse în Z:

a) $\{3\}$ *b)* $\{x : x \neq x\}$ *c)* $\{x : x \geqslant 3, x \leqslant 3\}$

d) $\{x : x > 0\}$ *e)* $\{x : x = 2q, \ q \in N\}$ etc.

II. Tabel de apartenențe

Fiecare linie a tabelului indică compatibilitatea apartenenței, sau neapartenența unui element la o submulțime

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \cap \complement B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
$\in$	$\notin$	$\notin$		
$\notin$	$\in$	$\notin$		
$\notin$	$\notin$	$\notin$		

Să se completeze tabelul de mai înainte. Să se introducă alte submulțimi. Să se verifice cu ajutorul acestor tabele afirmațiile:

$$[A = B] \Longleftrightarrow [(A \cap \mathbf{C}B) \cup (\mathbf{C}A \cap B) = \varnothing]$$
$$[B = \varnothing] \Longleftrightarrow [(A \cap \mathbf{C}B) \cup (\mathbf{C}A \cap B) = A]$$
$$\left.\begin{matrix} X = (A \cap \mathbf{C}B \cap D) \cup (\mathbf{C}A \cap B \cap D) \\ Y = (A \cup B) \cap D \cap \mathbf{C}(A \cap B) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [X = Y].$$

Să se verifice, de asemenea, aceste rezultate pe diagrama lui Euler. În fine, să se demonstreze aceste rezultate plecînd de la axiome, prin calcule de algebră booleană (Cartea I, cap. 6).

EXERCIȚIU. Definim în $\mathfrak{P}(E)$ următoarele două operații: diferența $A \setminus B = A \cap \mathbf{C}B$.
diferența simetrică $A \,\Delta B = (A \cap \mathbf{C}B) \cup (B \cap \mathbf{C}A)$.

Să se studieze proprietățile fiecăreia din aceste operații (comutativitatea, asociativitatea) și acțiunea lor asupra operațiilor $\mathbf{C}$, $\cap$, $\cup$.

III. Relații de echivalență și relații de ordine

Exercițiul 1. Printre relațiile următoare între elemente ale mulțimii întregilor, care sînt relațiile de echivalență

1) $a - b$ este par, 2) $a - b$ este impar,

3) ab este par, 4) $a - b < 1$ etc.

Exercițiul 2. (*teoretic*). Să se demonstreze că o relație simetrică și tranzitivă este o relație de echivalență.

Exercițiul 3. Se consideră mulțimea regiunilor determinate într-un triunghi ABC de segmentele BB' și CC', unde B' aparține segmentului AC, iar C' segmentului AB. Se ordonează această mulțime prin incluziune. Să se facă o diagramă.

Exercițiul 4. Într-o mulțime E de n numere, notăm Sup E elementul cel mai marc și Inf E elementul cel mai mic.

1) Considerăm următoarele două relații

$$a \mathfrak{S} b = \text{Sup } (a, b) \text{ și } a \mathfrak{I} b = \text{Inf } (a, b).$$

Să se verifice dubla distributivitate.

2) Un tabel dreptunghiular de numere cuprinde p linii L_1, L_2, ... , L_p și q coloane $C_1, C_2, \ldots, C_q$. Să se compare

$$x = \text{Sup } (\text{Inf } L_1, \text{ Inf } L_2, \ldots, \text{Inf } L_p)$$

și

$$y = \text{Inf } (\text{Sup } C_1, \text{Sup } C_2, \ldots, \text{Sup } C_q).$$

Exercițiul 5. O mulțime E este înzestrată cu două relații de echivalență $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}'$. Clasele de echivalență sînt respectiv C_1, C_2, ..., și C_1', C_2', ... Spunem că $\mathcal{R}'$ este o relație *mai fină* decît $\mathcal{R}$ dacă

$$\forall i, \exists j : C_i' \subseteq C_j'.$$

a) Să se deseneze pe o diagramă două partiții comparabile prin această relație. Este vorba de o ordine totală, sau de una parțială, în mulțimea relațiilor de echivalență care pot fi definite pe E?

b) Să se dea exemple printre clasele de resturi definite în mulțimea întregilor (Cartea I, cap.1, § 2).

Exercițiul 6. Relațiile următoare sînt oare relații de ordine? Dacă da, ordinea este totală sau parțială?

a) Mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, pentru relația

$$M_1 \prec M_2 \iff \begin{cases} x_1 < x_2 \\ y_1 < y_2. \end{cases}$$

b) Mulțimea funcțiilor continue definite pe (a, b), pentru relația

$$f(x) \prec g(x) \iff \forall x_0 \in (a, b),\ f(x_0) < g(x_0).$$

c) Aceeași mulțime, relația

$$f(x) \prec g(x) \iff \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) < g(x_0).$$

d) Aceeași mulțime, relația

$$f(x) \prec g(x) \iff \exists x_0 :\ [\forall x, f(x_0) < g(x_0)].$$

e) Aceeași mulțime, relația

$$f(x) \prec g(x)$$

dacă aria regiunii cuprinse între axa x, graficul funcției și dreptele $x = a$ și $x = b$ este mai mică pentru f decît pentru g.

Exercițiul 7. Este vorba de o submulțime A a unei mulțimi E înzestrate cu o relație de ordine. Să se compare noțiunile apropiate următoare:

1) m este un *majorant* al lui A dacă $m \in E$, $\forall a \in A$, $a \leqslant m$. Vom numi $\mathfrak{M}$ mulțimea majoranților lui A.

2) α este *elementul cel mai mare* al lui A

$$\alpha \in A, \forall a \in A, a \leqslant \alpha.$$

3) μ este un *element maximal* al lui A

$$\mu \in A, \nexists\, a \in A : a > \mu,$$

altfel spus:

$$\mu \in A, a \in A, [a \geqslant \mu \Longrightarrow a = \mu]$$

sau, sub altă formă: „orice element al lui A comparabil cu μ este mai mic sau egal cu μ".

4) *Marginea superioară b a lui A.* Este majorantul cel mai mic

$$\mathfrak{M} \neq \varnothing, \quad b \in \mathfrak{M}, \quad \forall m \in \mathfrak{M}, \quad m \geqslant b.$$

Să se transforme aceste definiții considerînd relația de ordine inversă.

a) Să se facă comparația cînd E este total ordonată, de exemplu în R, considerînd

$$A = \{a : 0 < a < 1\},$$

sau

$$A = \{a : 0 \leqslant a \leqslant 1\}.$$

b) Să se facă comparația pe exemplul *a*) din exercițiul 6, dacă A este mulțimea punctelor ale căror coordonate verifică

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

Se va face apel la un grafic.

DESPRE MULȚIMEA ÎNTREGILOR NATURALI

I. Notă despre definiția mulțimii întregilor naturali

Noi am ales un sistem de axiome suficient de cuprinzător pentru ca el să poată da, încă de la început, toate proprietățile utile, impunînd mulțimii o serie de restricții succesive. Este însă interesant să cunoaștem un sistem de axiome care definește N cu maximum de concizie:

Sistemul de axiome al lui Péano

Mulțimea N este definită prin

1) Orice element $x \in N$ are un asociat unic x' numit *succesorul* său;

2) Un element notat 1 nu are predecesor (element căruia el i-ar fi succesor).

3) Orice submulțime $A \subseteq N$ care verifică

$$\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x' \in A$$

este mulțimea N însăși.

Această ultimă axiomă justifică raționamentul prin recurență, instrument esențial în studiul lui N.

Alt sistem de axiome

1) Există în N o relație de ordine totală care verifică axioma de bine ordonare.

2) Orice element, cu excepția unuia din ei, notat 1, are un predecesor.

Aceste axiome permit raționamentele prin „coborîrea lui Fermat".

Plecînd de la aceste axiome, se definește adunarea lui 1. Rămîne să fie demonstrate proprietățile care, în lucrarea de față, ne-au servit drept axiome.

II. Introducerea mulțimii Z

Am introdus Z plecînd de la N prin simetrizare. Să se arate că Z este izomorfă cu mulțimea Σ cît a mulțimii N^2 a perechilor (a, b) de elemente din N, prin relația de echivalență:

$$\mathcal{R} : [(a, b) \equiv (a', b')] \Longleftrightarrow [a + b' = b + a']$$

dacă Σ este înzestrată cu structura definită prin

$$(a, b) + (a', b') \equiv (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \cdot (a', b') \equiv (aa' + bb', ab' + ba').$$

Să se demonstreze axiomele şi proprietăţile cu care am înzestrat mulţimea Z.

Adăugînd lui N numărul 0, să se arate importanţa perechilor $(a, 0)$ şi $(0, b)$.

Să se compare cu introducerea fracţiilor plecînd de la N.

Să se compare cu introducerea mulţimii numerelor complexe plecînd de la R (Cartea a III-a, cap. 7, § IV).

III. Întregii lui Gauss

Exerciţiul 1. Definim o mulţime E de elemente $\mu = (a, b)$, a şi $b \in Z$, înzestrată cu două operaţii. Axiomele sînt următoarele:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (a, b) \equiv (a', b') \iff [a = a',\ b = b'] \\ \text{II} & (a, b) + (a', b') \equiv (a + a', b + b') \\ \text{III} & (a, b) \cdot (a', b') \equiv (aa' + bb',\ ab' + ba'). \end{array}$$

1) Să se verifice proprietăţile $[A]$ (Cartea I, cap. 1, § IV) pentru cele două operaţii, precum şi distributivitatea. Să se determine elementele neutre ω şi η.

2) Să se demonstreze că E este un inel astfel încît

$\mu_1\mu_2 = \omega \iff \mu_1 \equiv \omega$ sau $\mu_2 \equiv \omega$ (*sau* neexclusiv) (inel de integritate). (Se ştie, în Z, că $3b^2 - a^2 \neq 0$.)

3) Să se găsească inversul lui $\mu = (2, 1)$. Să se demonstreze că E nu este un corp.

REMARCĂ. Pentru a face calculele folosind stereotipurile din practica numerelor reale, se va putea introduce $\mu = a + b\sqrt{3}$.

Exerciţiul 2. Acelaşi studiu pe mulţimea F care verifică aceleaşi axiome, înlocuind însă în III numărul 3 cu numărul 2.

Putem oare defini o corespondenţă biunivocă între E şi F care respectă cele două operaţii (izomorfism de inel)?

(Răspunsul este negativ.)

SUPLIMENT. Să se modifice situaţia (se înlocuieşte 3 cu 4; se înlocuieşte Z cu Q).

DESPRE RĂDĂCINILE PĂTRATE

Exerciţiu fundamental. Fie Q mulţimea numerelor raţionale de elemente $a, a', b, b', \ldots$ şi fie r şi r' două elemente ale lui Q^+ care nu sînt pătrate ale unor elemente din Q. Scriem

$$\rho = \sqrt{r},\ \rho' = \sqrt{r'},\ \rho \notin Q,\ \rho' \notin Q.$$

Să se demonstreze unicitatea expresiei complexe $a + \rho$:

$$[a + \rho = a' + \rho'] \iff [a = a',\ r = r'].$$

(Demonstraţie: se izolează ρ şi se ridică la pătrat.)
Cu ce condiţie avem $a + b\rho = a' + b'\rho'$?

Aplicaţie

1) Să se verifice

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2) Se dă u şi $v \in Q$, $\sqrt{v} \notin Q$. Să se determine x şi $y \in Q$ astfel încît

$$\sqrt{u + \sqrt{v}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Condiţia de posibilitate. Să se verifice că aceleaşi numere satisfac

$$x > y,\ \sqrt{u - \sqrt{v}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Să se folosească rezultatul pentru a studia

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{r}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}.$$

Exerciţiu. Să se verifice că dacă se calculează latura c_n a poligoanelor regulate convexe cu n laturi înscrise într-un cerc de rază R, găsim

$$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad c_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}},$$

$$c_{15} = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6(3 - \sqrt{5})}\right].$$

Putem oare evita radicalii suprapuși?

Exercițiu cu rădăcini cubice. Să se sesizeze direct o soluție (x, y) a ecuației

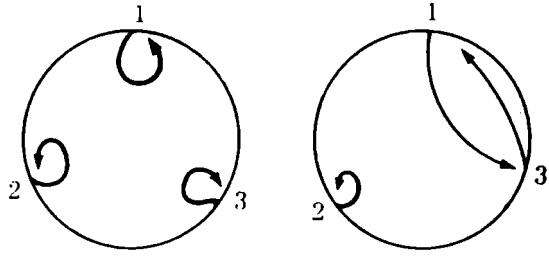
$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}, \quad x \in Q, \quad y \in Q.$$

Cît face

$$z = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}?$$

EXEMPLU DE GRUP FINIT
GRUPUL PERMUTĂRILOR DE TREI OBIECTE

Exercițiul 1. Trei obiecte a, b, c pot fi plasate în trei poziții numerotate 1, 2, 3. O permutare este o aplicație a mulțimii pe ea însăși, reprezentabilă prin scheme de tipul



$i(a,b,c)=(a,b,c)$ $\quad u(a,b,c)=(c,b,a)$

1) Să se deseneze schemele tuturor permutărilor. Vom numi i — *transformarea identică*, u, v, w — permutările care schimbă două elemente (*transpoziții*), r și r' — permutările în care fiecare element de poziție numerotată n ia poziția numerotată $n + 1$ sau $n - 1$ (modulo 3) (*permutări ciclice*).

2) În mulțimea permutărilor, definim operația *produs* ca fiind permutarea compusă a două permutări succesive.

Să se prezinte tabla înmulțirii sub forma unui tabel cu două intrări. Să se verifice că

$$u^2 = v^2 = w^2 = i,$$

$$rr' = r'r = i, \quad r^3 = i, \quad r'^3 = i.$$

Produsul este oare comutativ?

Să se verifice structura de grup a mulțimii permutărilor. Are oare orice element o rădăcină pătrată? Să se rezolve

$$x^2 = i \quad \text{și} \quad x^3 = i.$$

3) *Model geometric.* Suprapunerea unui triunghi echilateral pe el însuși (r și r' sînt rotații, u, v, w sînt simetrii axiale).

4) *Construcție axiomatică.* Să se arate că tabla înmulțirii este determinată prin axiomele următoare:

Există 6 elemente i, r, r', u, v, w. Operația este asociativă. i este elementul neutru. Este permisă simplificarea la stînga și la dreapta. Sînt cunoscute următoarele 5 egalități:

$$u^2 = i, \; v^2 = i, \quad uv = r, \quad vu = r', \quad vr = w.$$

5) Să se arate, pe modelul geometric, că conjuncția celor două condiții

$$rr' = i, \quad r'r = i$$

nu este suficientă pentru a demonstra $r^2 = r'$.

Alt exercițiu. Același studiu pentru 4 elemente. Să se creeze modele cu 2 și 3 dimensiuni.

EXEMPLE DE INELE

Exercițiul 1. Fie A mulțimea multiplilor m ai unui întreg a

$$a \in N, \; m = qa, \; q \in Z.$$

Adunarea și înmulțirea definite în Z induc în submulțimea A o structură de inel. Există oare un element neutru pentru adunare? Dar pentru înmulțire?

Exercițiul 2. Să se demonstreze că dacă un inel este un corp, el satisface

$$ab = 0 \implies [a = 0 \text{ sau } b = 0],$$

(se va înmulți la stînga cu a^{-1}, sau la dreapta cu b^{-1}).

Reciproc, dacă un inel satisface condiția de mai sus (*inel de integritate*) și dacă el nu are decît un număr finit de elemente,

el este un corp. (Pornind de la $a \neq 0$, se formează produsele ax, $x \in A$).

Exercițiul 3. *Exemplu de inel în mulțimea $\mathfrak{F}$ a funcțiilor* numerice definite pe $[0, 1]$. Fie

$$x \searrow \underline{f} \nearrow f(x) \text{ și } x \searrow \underline{g} \nearrow g(x).$$

Definim următoarele două operații:

$$s = f + g \text{ definită prin } x \searrow \underline{s} \nearrow f(x) + g(x)$$

$$p = fg \text{ definită prin } x \searrow \underline{p} \nearrow f(x)g(x).$$

Care sînt elementele neutre ale acestor operații? Să se demonstreze că elementul neutru al adunării poate fi descompus în produs de factori nenuli.

(Gîndiți-vă la funcții nule pe un segment inclus în $[0, 1]$ și nenule pe segmentul complementar.) $\mathfrak{F}$ nu este un inel de integritate.

EXERCIȚII CU CONGRUENȚE

Să numim A un polinom în x ai cărui coeficienți aparțin lui Z și $A(x)$ valorile lui numerice pentru $x \in Z$. Considerăm congruențe de modul m, întreg mai mare decît 1.

1) Să se verifice că $x_1 \equiv x_2 \Longrightarrow A(x_1) \equiv A(x_2)$.

2) Pentru a rezolva $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$, cîte valori x trebuie încercate pentru a fi sigur suficiente?

Să se arate că A poate fi redus astfel încît să nu aibă decît coeficienți egali cu $0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Numim d gradul polinomului astfel redus.

3) Ne putem limita la presupunerea că m este prim. Într-adevăr:

a) Dacă $m = m_1 \cdot m_2$, unde m_1 și m_2 sînt primi între ei, vom determina pe u, apoi pe v prin

$$A(u) \equiv 0 \pmod{m_1} \text{ și } A(u + m_1 v) \equiv 0 \pmod{m_2}.$$

Soluțiile lui $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$ sînt $x = u + m_1 v$.

b) Dacă $m = p^h$, soluțiile lui $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$ formează o submulțime a soluțiilor lui $A(x) \equiv 0 \pmod{p}$.

4) Dacă m este prim, $A(x) \equiv 0 \pmod{m}$ admite cel mult d soluții.

Exemplul 1. Să se rezolve $x^2 \equiv a \pmod 5$ pentru diferite valori ale lui a.

Exemplul 2. Să se rezolve

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) \equiv 0 \pmod{81}$$

(există 39 soluții).

POLINOMUL ȘI FUNCȚIA POLINOM

Litera S reprezintă suma celor trei termeni deduși din termenul scris prin permutări ale lui a, b, c.

Exercițiul 1. Să se simplifice polinomul

$$P(x) \equiv \mathsf{S}_a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)},$$

1) Gradul aparent.
2) Să se calculeze $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.
3) Să se compare P cu polinomul $Q(x) \equiv x$.
4) Să se verifice dezvoltînd expresia dată.

Exerciții analoage. Trebuie aflat $Q(x)$ pentru:

EXEMPLUL 2

$$P(x) \equiv \mathsf{S} \frac{(b+c)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

EXEMPLUL 3

$$P(x) \equiv \mathsf{S} \frac{(b^2+c^2)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Exercițiu teoretic. Să se demonstreze că nici un polinom nu este funcție periodică. (Definiție, Cartea a III-a, cap. 4.)

Distanțe într-un spațiu punctual

În mulțimea punctelor M, o funcție $(M_1, M_2) \searrow \overset{d}{\nearrow} d(M_1, M_2)$ este o distanță dacă, pentru toate perechile de puncte, d este un număr pozitiv, nul numai cînd punctele nu sînt distincte, indepen-

dent de ordinea celor două numere și satisfăcînd inegalitatea triunghiului:

$$\forall M_1, M_2, M_3, \quad d(M_1, M_3) \leqslant d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3).$$

a) Să se verifice că, dacă d este o distanță, atunci și

$$d' = \frac{d}{1 + d}$$

este o distanță. Să se deducă, de aici, și alte distanțe.

b) Presupunînd că spațiul punctual are asociat un spațiu vectorial cu 2 dimensiuni, să se verifice că

$$\delta(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

este o distanță.

c) Exercițiu pe distanța definită prin

$$d(M_1, M_2) = \operatorname{Sup}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|).$$

(Vor fi deosebite două tipuri de segmente: (1) $\left|\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right| < 1$ și (2) $\left|\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right| > 1$. După aceea vor fi studiate triunghiurile ale căror laturi sînt, toate, de același tip, apoi triunghiurile care nu satisfac această condiție.)

d) Se folosește distanța precedentă în planul reperat în bază ortonormală și se păstrează noțiunea uzuală de arie. Să se demonstreze că, pentru orice poligon $\mathfrak{P}$ fără punct dublu interior dreptunghiului $\mathfrak{R}$ de laturi $x = \pm a$, $y = \pm b$, raportul dintre aria $\mathcal{A}$ și perimetrul $\mathfrak{L}$ definit cu ajutorul distanței în cauză verifică

$$\text{(I)} \qquad \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{L}} < a + b - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

METODĂ. 1) Se va transforma $\mathfrak{P}$ în $\mathfrak{P}_1$ prin următoarea operație f: se construiește $\mathfrak{R}_1'$, dreptunghiul minim care conține $\mathfrak{P}$ și ale cărui laturi au direcțiile de coeficienți unghiulari $+1$ și -1, și se trunchiază, dacă este cazul, $\mathfrak{R}_1'$ pentru a păstra $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{R}_1' \cap \mathfrak{P}$.

2) Se simetrizează în raport cu $x'x$, $\mathfrak{P}_1$ devenind $\mathfrak{P}_2$, înlocuind punctele (x_1, y_1) și (x_1, y_1') cu punctele

$$\left(x_1, + \frac{1}{2}|y_1' - y_1|\right) \quad \text{și} \quad \left(x_1, - \frac{1}{2}|y_1' - y_1|\right).$$

3) Se face din nou operația f pentru a transforma $\mathcal{Q}_2$ în $\mathcal{Q}_3$, ceea ce păstrează simetria în raport cu $x'x$.

4) În fine, se simetrizează în raport cu $y'y$.

Se va arăta că transformările precedente nu pot decît să mărească $\frac{a}{\ell}$ și că acest din urmă poligon verifică (I).

REMARCĂ. Proprietatea demonstrată a servit la simplificarea demonstrației teoremei lui Selberg cu privire la șirul numerelor prime.

NOȚIUNEA DE CONVEXITATE A UNEI SUBMULȚIMI

I. Definiție

Amintim că, în spațiul punctual asociat unui spațiu vectorial, un *segment* M_1M_2 este mulțimea punctelor M definite prin

$$\mathbf{M_1M} = k\mathbf{M_1M_2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1,$$

sau, la fel de bine,

$$\mathbf{OM} = \lambda\mathbf{OM_1} + (1 - \lambda)\mathbf{OM_2}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Spunem că o submulțime $\mathcal{E}$ este *convexă* dacă:

$$\forall M_1, \forall M_2 \in \mathcal{E}, \; M \in M_1M_2 \longrightarrow M \in \mathcal{E}.$$

Convenim că $\varnothing$ și $\{M\}$ sînt convexe.

a) Să se dea exemple în geometria afină sau metrică.

b) Să se demonstreze că o intersecție nenulă de submulțimi convexe este convexă.

c) Sînt date n puncte aparținînd lui $\mathcal{E}$, afectate de coeficienți de același semn. Să se demonstreze că baricentrul aparține lui $\mathcal{E}$. Cum putem defini cea mai mică mulțime convexă care conține n puncte date?

II. Distanța de la un punct $K \notin \mathcal{E}$ pînă la mulțimea convexă $\mathcal{E}$.

(*Geometrie metrică*.)

RECAPITULARE. Distanța de la K la $\mathcal{E}$ este, notînd cu $d(AB)$ distanța dintre două puncte A, B,

$$h = \operatorname{Inf} d(KM), \quad M \in \mathcal{E}.$$

a) Dacă există un punct $H \in \mathcal{S}$, $d(KH) = h$, acest punct este unic.

b) Presupunînd că H există, fie δ perpendiculara în H pe KH.

1) $\delta \cap \mathcal{S}$ este punctul H, sau un segment al lui δ, sau δ însăşi.

2) Nici un punct al lui $\mathcal{S}$ nu este de aceeaşi parte cu K a lui δ.

c) H este pe frontiera lui $\mathcal{S}$. Dacă această frontieră este o curbă care are o tangentă în H, această tangentă este δ.

III. Aplicaţii la analiză

Fie arcul AB, grafic al unei funcţii continue $x \searrow \underline{\quad f \quad} \nearrow y$ în $[a,b]$. Spunem că un punct $K(x_0, y_0)$ este *deasupra* graficului dacă $y_0 > f(x_0)$.

1) Fie trei puncte U, V, W de abscise $u < v < w$.

[V deasupra lui UW] $\Longleftrightarrow$ [Panţa lui $UV >$ Panta lui UW]

2) Introducem

$$p_{1,2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Să se enunţe proprietatea care se scrie

$$\forall x_1,\ \forall x_2 \in [a, b],\ \forall x \in [x_1,\ x_2],\quad f(x) > f(x_1) + p_{1,2}(x - x_1).$$

a) Să se demonstreze că această condiţie exprimă, cu o convenţie cu privire la alegerea sensului pozitiv pe axa y, convexitatea mulţimii punctelor cuprinse între arcul AB şi coarda AB.

b) Fie n valori x

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b,$$

şi n numere de acelaşi semn

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Să se demonstreze că punctul

$$G\left(x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n},\right.$$

$$\left. y_G = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right).$$

este interior lui $\mathcal{S}$.

c) Funcţia f este presupusă derivabilă. Să se demonstreze că

$$[x_1 < x_2] \Rightarrow [f'(x_1) > p_{1,2} > f'(x_2)].$$

Să se deducă de aici semnul derivatei a doua, presupunînd că aceasta există.

d) Despre o funcţie care are proprietatea în cauză spunem că este *convexă* în $[a, b]$. Să se definească analog o funcţie *concavă*, precum şi una convexă (sau concavă) în sens larg, înlocuind semnul $<$ prin $\leqslant$, sau $>$ prin $\geqslant$.

Să se studieze din acest punct de vedere funcţiile liniare, trinoamele de gradul doi, şi funcţiile de tipul

$$y = |ax + b| + |a'x + b'| + |a''x + b''| \quad \text{etc.}$$

De notat că noţiunea de funcţie convexă este foarte importantă pentru calculul integral şi pentru statistică: de exemplu, punctul G din *b*) indică un fenomen „mediu", dacă fiecare punct al graficului reprezintă o stare a fenomenului studiat.

SISTEME DE INEGALITĂŢI NUMERICE: PROGRAMARE LINIARĂ

Sisteme de inegalităţi. În spaţiul R^n al punctelor

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

1) Să se demonstreze că mulţimea punctelor care verifică o inegalitate liniară

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < k$$

este convexă.

2) Să se deducă de aici că mulţimea definită de conjuncţia de inegalităţi liniare este convexă (sau vidă).

3) Aceeaşi problemă pentru conjuncţia de inegalităţi liniare şi de ecuaţii liniare.

Exemple numerice şi modele geometrice pentru $n = 1$, 2 sau 3.

Programare liniară. Măsura mărimilor face să intervină spaţii vectoriale; între măsuri apar expresii liniare. Să dăm un exemplu foarte simplu care permite un studiu grafic plan.

ENUNŢ. Într-un atelier se proiectează să se coasă costume şi rochii dintr-o aceeaşi ţesătură. Se cunoaşte pentru fiecare obiect,

lungimea necesară (în metri), timpul de lucru (în ore) și beneficiul (în franci):

	LUNGIMI	DURATE	BENEFICIU
Pentru un costum	$l = 5$	$d = 4$	$b = 10$
Pentru o rochie	$l' = 3$	$d' = 5$	$b' = 9$

Sînt disponibili 60 m de țesătură și 80 de ore de lucru. Cum se obține beneficiul maxim?

Indicații de rezolvare. Se reprezintă în abscisă numărul x de costume și în ordonată numărul y de rochii; se marchează regiunile definite de

$$R_1 : (x \geqslant 0), \quad R_2 : (y \geqslant 0)$$

$$R_3 : (5x + 3y \leqslant 60), \quad R_4 : (4x + 5y \leqslant 80).$$

Să considerăm mulțimea dreptelor

$$\Delta \quad (10x + 9y = \lambda)$$

astfel încît

$$E = \Delta \cap (R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4).$$

Fie Δ_m acea dreaptă a cărei distanță pînă la origine, $\delta = \lambda/\sqrt{181}$, este maximă. Să se arate că ea trece printr-un vîrf A.

Punctul căutat, cu coordonate întregi, este nu cel mai vecin cu A în E, ci cel prin care trece dreapta Δ cea mai vecină cu Δ_m.

SUPLIMENT. Să se modifice enunțul în așa fel încît Δ_m să conțină un segment frontieră a lui E.

MULȚIMI CARE DEPIND DE UN PARAMETRU

O mulțime $\mathcal{A}$ depinde de un parametru λ dacă este în corespondență biunivocă cu mulțimea R sau cu una din submulțimile acesteia.

$$\lambda \in R \leftrightarrow a \in \mathcal{A}.$$

O mulţime $\mathcal{A}$ depinde de n parametri dacă este în corespondenţă biunivocă cu

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n \leftrightarrow a \in \mathcal{A}.$$

O submulţime a lui $\mathcal{A}$ este definită de p condiţii, dacă parametrilor le-au fost impuse p ecuaţii independente. Cazul nu este simplu decît dacă aceste ecuaţii permit să se definească într-un mod univoc p parametri, plecînd de la restul de $n - p$ parametri rămaşi independenţi.

I. Familie de curbe cu un parametru

Exerciţiul 1. O familie $\mathcal{Q}$ de parabole P_m este constituită din graficele unor funcţii trinoame care depind de un parametru la puterea a doua:

$$m \in R \leftrightarrow T_m \equiv (m^2 + 1)x^2 + 2(m^2 + 2m + 2)x + \\ + m(m + 4) \leftrightarrow P_m.$$

1) Să se determine curbele P_m care trec printr-un punct $A(x_0, y_0)$. Discuţia despre numărul de soluţii pune în evidenţă un punct K şi o parabolă Q.

2) Să se demonstreze că Q este înfăşurătoarea familiei $\mathcal{Q}$ (cu alte cuvinte că $\forall m$, P_m este tangent la Q şi $\forall K \in Q$, $\exists m$ astfel încît K este punct de contact al lui Q şi P_m).

Exerciţiul 2. Analog celui precedent:

$$T_\theta \equiv 2x^2 - 4x \cos\theta + \cos 2\theta - \cos\theta.$$

1) Se introduce un parametru $u = \cos\theta$. Precizaţi submulţimile parcurse de θ şi u pentru a asigura corespondenţele biunivoce.

2) Curbele C_θ care trec printr-un punct $A(x_0, y_0)$. Discuţie.

3) Curbele care trec prin punctul

$$B(x_1 = \lambda \sin\theta, \quad y_1 = 2 - \cos\theta),$$

λ fiind dat. (Se va introduce $\lambda = \operatorname{tg}\alpha$.)Discuţie.

(Se va înţelege că rezultatele 2) şi 3) *nu* sînt contradictorii!).

II. Exemplu geometric

Exercițiu: Familie de similitudini plane. Sînt date două drepte perpendiculare d și d' care se intersectează în O. Se notează

$$(d, d') = +\pi/2 \pmod{\pi}.$$

Se consideră mulțimile

Γ: mulțimea cercurilor γ (centru C, rază R) tangente în O la d'.

Γ': mulțimea cercurilor γ' (centru C', rază R') tangente în O la d.

$\mathcal{C}$: mulțimea $\Gamma \times \Gamma'$ a perechilor (γ, γ').

Δ: mulțimea dreptelor centrelor δ (drepte CC').

$\mathcal{S}$: mulțimea similitudinilor S (centru M, unghi α, raport k) care transformă γ în γ'.

$\mathfrak{M}$: mulțimea punctelor M, centre de similitudini S, diferite de O.

Λ: mulțimea locurilor λ ale punctelor M care corespund unei perechi (γ, γ').

$\mathfrak{M}_0$; $\mathfrak{M}_1$; $\mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_2'$; $\mathfrak{M}_3$; mulțimea punctelor M care corespund la $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = +\pi/2$, $\alpha = -\pi/2$, α oarecare.

$\mathfrak{M}_4$ și $\mathfrak{M}_5$: mulțimea punctelor M care corespund la $k = 1$, respectiv la k oarecare.

De cîți parametri depinde fiecare din aceste mulțimi? Să se precizeze aplicațiile pe care le definește situația considerată între fiecare din aceste mulțimi și $\mathcal{C}$, indicînd construcția geometrică a unui element cînd se cunoaște (γ, γ'), și invers.

Se va nota cu b' și b bisectoarele lui (d, d'), și cu T', T'' punctele definite de $(T', T'') = \lambda \cap (b' \cup b'')$. Pentru a studia $\mathfrak{M}_3$, poate fi util să se considere, în fiecare similitudine, consecventul și antecedentul lui O.

EXERCIȚII DE GEOMETRIE AFINĂ ȘI PROIECTIVĂ

(*Simple exemple*)

Exercițiul 1. *Date:* două drepte d și d' și două puncte A și B. Se consideră

1) Dreapta $\delta \ni A$, $P = d \cap \delta$, $Q = d' \cap \delta$.

2) Dreapta $\delta' \ni Q$, $\delta' \parallel AB$.
Să se studieze mulţimea punctelor $M = PB \cap \delta'$.

Scurtă prezentare a două rezolvări (de notat că M depinde de un parametru):

Prima abordare: *geometrie afină*

Omotetie $\mathcal{H}$ de centru P

Ideea: se consideră antecedentul O' al lui O. Se va vedea ce anume rămîne fix.
Concluzia — prin perspectivă de centru B.

A doua abordare: *geometrie proiectivă, apoi afină*.

Se generalizează înlocuind $\delta' \parallel AB$ cu $\delta' \ni C$, punct fix coliniar cu AB. Se trimite, prin perspectivă, dreapta ABC la infinit, şi se termină în geometrie afină (omotetie de centru O).

Exerciţiul 2. Într-un triunghi ABC, fie M mijlocul medianei BK şi D punctul $AM \cap BC$. În ce raport împarte punctul D latura BC?

Prima abordare: se proiectează pe BC paralel cu AM.
A doua abordare: se proiectează pe BC paralel cu AC.
A treia abordare: se proiectează pe BK paralel cu AC.
A patra abordare: se proiectează pe BC paralel cu AB.
A cincea abordare: se consideră M drept baricentrul lui A, B, C afectaţi de coeficienţi convenabili.
A şasea abordare: se consideră punctele la infinit ale dreptelor figurii şi se trimite la infinit dreapta AMD, sau dreapta AB.
A şaptea abordare: calcul vectorial (geometrie analitică) plecînd de la $\mathbf{AB} = \mathbf{i}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{j}$, sau $\mathbf{BA} = \mathbf{u}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{v}$.
Se va generaliza.

OBSERVAŢII CU PRIVIRE LA NOŢIUNEA DE RECIPROCĂ

Un enunţ cuprinde următoarele părţi:

1) Descrierea unei situaţii S; este vorba de elemente ale unor mulţimi definite.

2) Ipoteze $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

3) Concluzii $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

Reciprocă internă. O reciprocă internă situației păstrează S. Unele din concluziile C devin ipoteze, în locul unora din ipotezele H. Se întreabă dacă ipotezele eliminate devin concluzii.

Reciprocă externă. Este definită o nouă situație S' plecînd de la unele din vechile ipoteze H și de la unele din concluziile C. Se cere să se stabilească dacă această nouă situație este aceeași ca cea veche: sistemul de axiome al lui S' este oare echivalent cu sistemul de axiome ale lui S înzestrat cu ipotezele H?

Exemplu elementar (o singură ipoteză, o singură concluzie).

ENUNȚ. 1) S: este vorba de un cerc Γ de centru O, de două puncte A și B de pe acest cerc, și de un punct M. Notăm

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}) = 2\alpha, \pmod{2\pi}.$$

2) Ipoteze: $M \in \Gamma$.

3) Concluzie: $(MA, MB) = \alpha, \pmod{\pi}$.

Reciprocă internă. Se păstrează S; se permută ipoteza și concluzia. Concluzia celor două enunțuri:

În situația S, $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi} \Longleftrightarrow M \in \Gamma$.

Reciprocă externă.

1) Este vorba de două puncte A, B și de un unghi $\alpha \pmod{\pi}$.

2) Să se conchidă că există un cerc Γ astfel încît

$$(MA, MB) = \alpha, \pmod{\pi} \Longleftrightarrow M \in \Gamma.$$

Exercițiu. *Studiu direct.* Fiind date două drepte paralele D, Δ și un punct F, este vorba de transformarea $M \overset{\mathfrak{G}}{\nearrow} M'$ astfel încît M' este imaginea lui F în omotetia de centru M care transformă D în Δ. Numim C' imaginea unei curbe C.

Să se studieze C' dacă C este *a*) o dreaptă, *b*) un cerc de centru F. (Aceste chestiuni conțin o reciprocă internă, fiindcă se pune problema de a afla C' astfel încît $M \in C \Longleftrightarrow M' \in C'$.)

Reciprocă externă. Orice conică poate fi definită ca fiind o imagine a unui cerc printr-o asemenea transformare.

SUPLIMENT. Să se folosească această transformare pentru un studiu al conicelor (intersecția cu o dreaptă, tangente, asimptote etc.).

Să se descopere originea acestui enunț plecînd de la definiția conicelor în conul de revoluție (sferă înscrisă, tangentă la planul de secționare).

NOTĂ DESPRE REZOLVAREA PROBLEMELOR

Studiul structurilor foarte generale (cum sînt cele de grup, inel, corp, spaţiu vectorial, geometrie afină, sau proiectivă, sau metrică euclidiană) permite o dirijare a investigaţiilor particulare, de îndată ce în ele au fost identificate aceste structuri.

Studiul unei situaţii particulare care constituie o problemă clasică poate lua două forme de bază, cunoscute sub numele de „rezolvarea figurilor" şi „construcţia figurilor".

Am vrea să punem în evidenţă unitatea de metodă posibilă în expunerile acestor probleme.

A) Studiul axiomatic al unei situaţii

În expunerea noastră, am studiat situaţiile elementare cele mai importante prin *metoda axiomatică*. Să formulăm explicit în ce constă ea:

1) *Analiză.* O situaţie este cunoscută intuitiv, din experienţa fizică sau matematică, în mod incomplet, sau nu pe deplin coordonat. O analiză a situaţiei pune în evidenţă o serie de proprietăţi ale mulţimilor care intervin (relaţii, aplicaţii). Să notăm că, voind să introducem numerele, sau spaţiul euclidian, ne-am fi putut limita pur şi simplu, la a face apel la experienţa cititorului contemporan.

2) *Construirea structurii situaţiei.* Se alege o mulţime de proprietăţi considerate drept esenţiale, enunţate explicit, ceea ce constituie *mulţimea axiomelor*; după aceea se studiază consecinţele acestora, pentru a redescoperi celelalte proprietăţi observate, şi pentru a descoperi altele.

3) *Discuţie.*

a) Compatibilitate. Trebuie garantată *existenţa* elementelor mulţimii, adică noncontradicţia.

b) Trebuie discutată *unicitatea* mulţimii construite, pînă la un izomorfism (*categoricitatea mulţimii axiomelor*): astfel, într-un exerciţiu, am văzut că există inele neizomorfe, prin urmare axiomele de inel formează un sistem noncategoric; pentru a-l preciza, trebuie să i se adauge condiţii suplimentare.

O atitudine foarte apropiată de aceasta se adoptă şi în studierea unor probleme de mai mică anvergură.

B) **Rezolvarea unei figuri.**

O situaţie este definită printr-un *enunţ*. Acesta introduce mulţimi care depind de *parametri numerici*, aşa că fiecare element este definit de un număr, sau de o mulţime de numere. Presupunînd cunoscută o mulţime de asemenea numere (*datele* $a, b, \ldots, l$), se cere să se *expliciteze calculul* celorlalte numere (*necunoscutele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

1) *Analiză*. Trebuie puşi în evidenţă şi denumiţi parametrii. Sînt deosebiţi apoi parametrii independenţi, după care relaţiile sînt traduse prin inegalităţi (inecuaţii) sau egalităţi (ecuaţii): mulţimea $\mathcal{C}$ a condiţiilor.

2) *Rezolvare*. După ce au fost deosebite datele de necunoscute, se alege o mulţime de ecuaţii şi inecuaţii pentru a efectua *rezolvarea*. Rezolvat, sistemul permite calculul succesiv al necunoscutelor:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = f_1(a,b,c,\ldots,l) \\ x_2 = f_2(a,b,\ldots,l,x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(a,b,\ldots,l,x_1,\ldots,x_{n-1}) \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} g_1(a,\ldots,l) < x_1 < h_1(a,\ldots,l) \\ g_2(a,\ldots,l,x_1) < x_2 < h_2(a,\ldots l,x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

3) *Discuţie*. Se verifică că soluţia *există* într-adevăr (noncontradicţie) şi că ele satisfac toate condiţiile neutilizate ale enunţului (*compatibilitatea* acestor condiţii).

În afară de aceasta, se discută *unicitatea* soluţiei.

Concluziile introduc relaţii între date, pentru a deosebi diferitele posibilităţi ale situaţiei.

C) **Construcţia unei figuri**

Nu totdeauna mulţimile introduse de enunţ sînt, toate, parametrizate numeric. Presupunînd cunoscut un sistem de elemente (datele), se cere *construcţia* celorlalte (necunoscutele).

1) Se precizează care sînt relaţiile prin egalităţi sau inegalităţi numerice, şi prin corespondenţe de tipuri cunoscute între mulţimile în cauză.

2) Deosebind datele de necunoscute, se alege din condiţiile stabilite o mulţime astfel încît să se poată „construi" necunoscutele pornind de la date; se foloseşte regula logică: „conjuncţiei

condiţiilor îi corespunde intersecţia mulţimilor; disjuncţiei neexclusive a condiţiilor — reuniunea mulţimilor".

Sensul termenului „a construi" în geometria clasică: regula de construire este redusă la o succesiune ordonată de operaţii de intersecţie de drepte, cercuri, plane, sfere determinate prin 2, 3, 4 puncte. (În felul acesta, nu se poate ieşi din geometria analitică de gradul întîi sau doi.) (Cf. Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, 1950). Aceasta asigură existenţa elementelor în sensul platonician.

3) *Discuţie.* (Ca la punctul B.)

Exemple

B') **Rezolvarea unei figuri.** În practică, se poate opera în general prin triangulaţie, şi se „rezolvă" din aproape în aproape. Pentru a profita de supleţea calculului trigonometric, este în general comod să se ia ca necunoscute unul sau mai multe unghiuri.

De aici — importanţa, din acest punct de vedere, a problemelor aşa-zise cu „rezolvare de triunghiuri". Să luăm un exemplu la întîmplare, fără particularităţi, pentru a pune în evidenţă metoda.

ENUNŢ. Să se determine elementele unui triunghi ABC care satisface condiţia $\hat{B} = 2\hat{C}$, fiind date lungimea l a laturii BC şi valoarea k a raportului dintre înălţimea dusă prin A şi raza cercului exînscris în unghiul C.

REZOLVARE

1) Situaţie cunoscută. Elemente care intervin: a, b, c, $\hat{A}$, B, $\hat{C}$, h_a, r_c.

Sistem care traduce enunţul:

Existenţa unui triunghi

$$(1)\quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$(2)\ (3)\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a > 0,\ \hat{A} > 0,\ \hat{B} > 0,\ \hat{C} > 0$$

Determinarea elementelor care intervin

$$(4)\quad a = h_a\ (\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B)$$

$$(5)\quad a = r_c \left(\operatorname{cotg} \frac{C}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)$$

Acceptabilitate

$$(6)\quad B = 2\hat{C}$$

Datele:

$$a = l \tag{7}$$

şi k definit prin

$$h_a = kr_c. \tag{8}$$

2) *Rezolvare*:

Nici o simetrie. Eliminarea lungimilor. Necunoscuta principală:

$$u = \cos C \tag{10}$$

Sistemul rezolvat (sînt 9 ecuaţii, după introducerea lui u):

$$\begin{cases} (9)\ 2(k-1)u - (2-k) = 0 \\ (10)\ \cos C = u \\ (11)\ \hat{B} = 2\hat{C} \\ (12)\ \hat{A} = 3\hat{C} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1/2 < u < 1 \\ 0 < \hat{C} < \pi/3 \\ (7),\ (2),\ (3),\ (4,)\ (8). \end{cases}$$

3) *Discuţie*:

$$4/3 < k < 3/2, \qquad \text{o soluţie.}$$

REMARCĂ. Se poate căuta o rezolvare în care se ia ca necunoscute principale laturile, precum şi o construcţie geometrică.

C') **Exemplu de problemă de construcţie.** (Ar fi interesant să se modernizeze, în ceea ce priveşte clasificarea şi forma de prezentare, excelenta carte scrisă în 1866 de Petersen şi tradusă în limba franceză de O. Chemin: *Méthode pour les problèmes de construction géométrique*, Gauthier-Villars.)

ENUNŢ. Să se construiască un triunghi echilateral ABC cunoscînd distanţele α, β, γ de la vîrfuri la un punct dat O.

1) *Analiza situaţiei*.

Date. Punctul O şi trei lungimi. Idee: să se introducă trei cercuri.

$$\begin{cases} OA = \alpha \iff A \in \Gamma_a \\ OB = \beta \iff B \in \Gamma_b \\ OC = \gamma \iff C \in \Gamma_c. \end{cases}$$

Idee: triunghi echilateral $\iff$ rotaţie $\mathcal{R}$ $(A, \pm \pi/2)$.

Idee de simplificare: soluţie prototip alegînd un vîrf, de exemplu A, şi sensul unghiului (**AB, AC**).

2) *Descrierea construcției propuse*:
Se trasează cercurile Γ_a, Γ_b, Γ_c și se alege $A \in \Gamma_a$.
Se construiește Γ'_c, imaginea lui Γ_c prin $\mathcal{R}$.
$B \in \Gamma' \cap \Gamma_b$ și C este antecedentul lui B prin $\mathcal{R}$.
Existență: o singură condiție $\Gamma'_c \cap \Gamma_c \neq \varnothing$.
Acceptabilitate: punctele construite satisfac, într-adevăr, enunțul.

3) *Discuție*. Numărul de prototipuri și mulțimile de soluții.

SUPLIMENT. Reciprocă externă: se dă un triunghi echilateral ABC. Să se studieze mulțimea punctelor O care verifică $OA = OB + OC$.

RECAPITULARE ȘI EXERCIȚII DE CINEMATICĂ

(Cartea a III-a, cap. 4, IV)

1) *Recapitulare*. Sub forma ei matematică, cinematica punctului este studiul diferențial al unui punct din R^3 care depinde de un parametru numit *timp*.
Mișcarea lui M este definită prin funcția $t \xrightarrow{f} \mathbf{OM}$.
Traiectoria este curba mulțime a pozițiilor lui M.
Viteza este derivata $\mathbf{V} = (\mathbf{OM})'$.
Accelerația este $\Gamma = (\mathbf{V})' = (\mathbf{OM})''$
În raport cu sistemul de referință.

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{V} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$
$$\Gamma = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k}.$$

Într-un studiu intrinsec, se orientează geometric traiectoria, și se alege unul din punctele ei drept origine. M este definit prin abscisa lui curbilinie s, funcție de timpul t.
Tangentele fiind orientate în acord cu sensul ales pe traiectorie, ele poartă un vector unitar tangent $\mathbf{T}$ funcție de s și

$$\mathbf{V} = v\mathbf{T}.$$

În plan, $\mathbf{T}$ determină un vector normal $\mathbf{N}$ (nu studiem determinarea lui în spațiu, printre toți vectorii normali) și

$$(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = +\frac{\pi}{2}, \quad \Gamma = v'\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}.$$

OBSERVAȚIE CU PRIVIRE LA UNITĂȚI. Două unități fundamentale independente, de lungime și de timp; două unități derivate, de viteză și de accelerație. Se aleg lungimi pentru a reprezenta toate aceste unități.

Derivatele de ordin mai mare decît doi nu apar în mecanica clasică, dedusă din formula lui Newton $\mathbf{F} = m\Gamma$ care introduce forța $\mathbf{F}$ și masa m.

REMARCĂ. Pe traiectoria orientată, mișcarea se numește *directă* dacă se face în sensul pozitiv ($v > 0$) și *retrogradă* în cazul contrar. De notat că sînt folosite deseori *diagrame*, grafice de numere, cum sînt măsurile lui s, v, γ în funcție de timp.

Exercițiu teoretic

1) Doi vectori $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$ fiind funcții de timp, să se calculeze derivata produsului lor scalar. Cazul în care $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$.

2) $\mathbf{V}$ fiind viteza unui punct în mișcare, să se demonstreze

$$| v | \nearrow \iff |(\mathbf{V}, \Gamma)| < \frac{\pi}{2}.$$

Spunem în acest caz că mișcarea este *accelerată*; în cazul contrar ea se numește *întîrziată*.

Exercițiu clasic fundamental. *Mișcarea proiectilelor* (considerate drept puncte) în vid.

Sistem de referință ortonormal $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, acest din urmă vector fiind orientat în direcția verticalei ascendente din fizică. Unități: metrul, secunda.

Legea accelerației: $\Gamma = -g\mathbf{k}$, cu $g \simeq 9{,}8$.

Date inițiale: la $t = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$.

1) Să se arate că mișcarea este plană și, în general, parabolică.

2) v_0 fiind dat, să se determine α astfel încît traiectoria să treacă printr-un punct dat $K(x_1, y_1)$.

Exemplu de exercițiu simplu

DATE. O lungime a, o viteză unghiulară ω exprimată în radiani pe unitatea de timp. Mișcarea punctului M definită prin:

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad x = a \cos \omega t, \; y = a(\sin \omega t - \cos \omega t).$$

1) Să se determine viteza și accelerația. Să se exprime măsura lor și să se precizeze direcția lor. Mișcarea este accelerată sau întîrziată?

2) Ecuația carteziană a traiectoriei. Să i se identifice natura [Conicele, II (5)].

2) *Mișcarea unei figuri nedeformabile* (Cartea a IV-a, Partea a II-a, cap. 1, § 3, *D*). Am introdus noțiunea de mișcare tangentă la un moment dat, și am propus ca aplicație studiul mișcării „benzii de hîrtie" care face să apară elipsa. Să dăm și un alt exemplu.

Exercițiu. O figură rămîne nedeformabilă; două din dreptele ei trec respectiv prin două puncte fixe. Să se demonstreze că fiecare dreaptă a figurii *sau* trece printr-un punct fix ca și cele două drepte introduse, *sau* înfășoară un cerc. Să se definească traiectoria unui punct al figurii (curba numită *melcul lui Pascal*) și, prin considerarea mișcării tangente, să se determine tangenta la traiectorie în punctul ales.

PRINCIPIILE MATEMATICE ALE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE

Geometria descriptivă este o tehnică de reprezentare a figurilor din spațiu cu ajutorul a două proiecții ortogonale. Aceste proiecții sînt făcute pe două plane perpendiculare, unul din ele fiind rabatat pe celălalt pentru a obține într-un același plan *epura* care reunește cele două figuri proiectate.

Nu precizăm aici nici terminologia, nici procedeele tehnice. Indicăm numai principiile geometrice:

Fiecare punct este reprezentat prin perechea proiecțiilor sale, pereche aliniată pe o dreaptă de direcție fixă (linie de rapel). Cele două curbe proiecții ale unei curbe sînt determinate prin puncte pe care analiza teoretică reușește să le cupleze fără greșeală. Metoda generală constă în a determina aceste puncte secționînd figura cu o familie de suprafețe simple care mătură spațiul: plane de direcție dată sau, uneori, sfere care depind de un parametru. Dar, bineînțeles, dacă este vorba de determinarea unei drepte, sînt suficiente două puncte.

Punct de vedere teoretic:

1) Toate proprietățile *proiective* sau *afine* sînt păstrate în cele două proiecții.

2) O proprietate *metrică plană* se păstrează prin proiecție pe un plan paralel; o astfel de dispunere se poate realiza schimbînd planele de proiecție sau, ceea ce este în esență același lucru, deplasînd figura în raport cu aceste plane.

Regula de construcție este simplă dacă la *o* operație nu se schimbă decît *un* singur plan (respectînd ortogonalitatea), sau dacă nu se efectuează decît rotații în jurul unor axe perpendiculare pe unul din planele de proiecție.

3) O problemă metrică referitoare la o *figură plană* se rezolvă de preferință prin rabatere pe unul din planele de proiecție, rotație în jurul urmei planului figurii în planul pe care se face rabaterea. Figura rabatată derivă din proiecție prin afinitate, ceea ce permite să se opereze prin coliniarități după rabaterea unui prim punct.

4) O proprietate remarcabilă a proiecției ortogonale a unui *unghi drept* permite să se trateze problemele referitoare la dreptele perpendiculare pe un plan. Este vorba de două drepte D_1 și D_2 proiectate ortogonal în d_1 și d_2 pe un plan P. Dacă sîntem în situația particulară în care una din aceste drepte, fie ea D_1, este paralelă cu planul de proiecție, atunci

$$D_1 \perp D_2 \Longleftrightarrow d_1 \perp d_2.$$

Mai puțin frecvent în cadrul acestui studiu se folosește reciproca exterioară: Este vorba de D_1 și D_2 care se proiectează ortogonal în d_1 și d_2.

Atunci

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \perp D_2 \\ d_1 \perp d_2 \end{array}\right\} \rightharpoonup D_1 \text{ sau } D_2 \text{ paralelă cu planul pe proiecție (}\textit{sau}\text{ neexclusiv).}$$

Numai practica permite familiarizarea cu tehnica geometriei descriptive. Se recomandă să se rezolve probleme grafice de intersecție de drepte și plane, de unghiuri și de distanțe.

În cazul unei sfere sau al unui cerc, sîntem conduși la construirea unor elipse; „banda de hîrtie" se dovedește utilă pentru a obține rapid multe puncte, necesare pentru trasarea curbei.

INDEX

Acceleraţie 327
Acul lui Buffon 174
Afix 373
Albert Girard (Formula lui) 543
Alembert (Teorema lui d') 382
Algebric (Număr) 67
Analagmatic 513
Anarmonic (Raport) 431
Antideplasare 479
Antiparalelism 463
Apartenenţă 25
Aplicaţie a unei mulţimi 83
Apollonios (Paralelogramul lui) 562
Arc simplu 114
Argument (al unui număr complex) 374
Arhimede (Proprietatea lui) 47
Arie 162
Armonică (Diviziune) 439
Asimptotă 320
Asimptotică (Direcţie) 319
Asociativitate 34
Axă radicală 472

Baricentru 397
Bază a logaritmilor 238
Bază a unui spaţiu vectorial 74
Bernstein (Teorema lui) 234
Bijecţie 84
Bine ordonare 40
Biraport 431
Biunivocă (Corespondenţă) 42
Boole (Algebra lui) 149

Cantor (Mulțimea triadică a lui) 232
Cardinal (Număr) 42
Céva (Teorema lui) 399
Ciur (al lui Eratostene) 197
Clasă de echivalență 29
Clasă de resturi 186
Coeficienții binomiali 182
Complementara unei submulțimi 28
Completitudine (Axioma) 67
Complex (Număr) 367
Componenta unui vector 75
Comutativitate 34
Congruență 186
Continuu (Puterea) 230
Continuitate 101
Continuitate uniformă 105
Contravarianță 417
Coordonate 82
Corp 59
Creștere într-un interval 94
Creștere într-un punct 104
Creșteri finite (Teorema) 110
Curbură 317
Cvadriunghi 88

Deficitul unui triunghi 521
Demonstrație prin recurență 40
Dență 62
Deplasare 478
Derivată 102
Derivata a doua 317
Désargues (figura afină) 394
Désargues (figura proiectivă) 430
Deschis (interval) 68
Dimensiune 82
Directoarea unei conice 549
Distanța (pînă la o mulțime) 124
Distributivitate 44
Dreapta reală 81
Dualitate 476

e (Numărul) 240
Echipolență 71
Echipotență 231
Echivalență (Relație de) 28
Egalitate (caz de) 482
Elice circulară 496
Elicoidală (Deplasare) 491
Elicoidală (Mișcare) 496
Elipsă 551
Evenimente echiprobabile 171
Excentricitate 549
Exponențială 239

Fascicul de cercuri 471
Figură 88
Focal (Cerc) 549

Focale (Conice) 553
Focar al unei conice 550
Formă nedeterminată 307
Fracţie 56
Fracţie raţională 332
Funcţie de funcţie 85
Funcţie liniară 335
Funcţie numerică 91

Grafic 91
Grilaj (reţea) 192
Grup 59

Hiperbolă 551

Idealul unui inel 190
Identică (Aplicaţie) 87
Identitate 251
Incluziune 26
Incomensurabile (Mărimi) 216
Inel 59
Inegalitatea triunghiului 120
Infinit (Punct la, dreapta de la) 429
Injecţie 83
Inscriptibil (Cvadriunghi) 462
Interval 67
Intersecţie de mulţimi 27
Intervale (cuprinse unul în altul) 67
Intervertirea punctelor mediane 80
Invariant 89
Inversă (Aplicaţie) 84
Inversul unui număr 56
Inversiune 503
Izogonale (Direcţii) 463
Izometrie 478
Izomorfism 49

Împărţirea întregilor 183
Împărţirea polinoamelor 252
Închisă 33
Închis (interval) 68

Lexell (Teorema lui) 544
Limită 100
Liniară (Funcţie) 335
Liniară (Transformare) 417
Lobacevski (Geometria lui) 521
Logaritm 239
Lungimea unei curbe 165

Majorant 48
Margine inferioară sau superioară 67
Margini (Teorema) 106
Matrice 417
Menelau (Teorema lui) 408
Mărime 211
Măsură 155
Metrică 115

Mișcare 495
Mișcare tangentă 496
Modul (Mulțime) 73
Modulul unui număr complex 374
Moivre (Formula lui) 376
Monom 242
Monotonă (Funcție) 94
Mulțimi(Algebra) 149

Negativ 53
Neutru (Element) 44
Normală (Ecuația — a unei drepte) 455
Numărabilă (Mulțime) 228
Numerația 199

Omologie 437
Omotetie 405
Operatori (Corp de) 73
Operații 31
Opus 56
Ordin (al unei metrici) 418
Ordine (Relație de) 30
Oriciclu 531
Orientare 78
Ortocentric (Cvadriunghi) 466
Ortocentru 466
Ortonormală (Bază) 116
Oscilația unei funcții 109
Osculator (Cerc) 318

Parabolă 550
Paralelogram 80
Parametrul unei parabole 554
Pascal (Figura afină a lui) 395
Pascal (Figura proiectivă a lui) 430
Pascal (Triunghiul lui) 182
Pasul unei elici circulare 496
Patrulater 88
Patrulater complet 441
Perioadă 314
Permutări 87
Perspectivă 427
Pi (Numărul π) 146
Pitagora (Teorema lui) 120
Polară în raport cu o pereche de drepte 441
Polara în raport cu un cerc 469
Polinom 241
Pozitiv 53
Primitivă 341
Produs de aplicații 85

Produs de vectori 130
Produs direct de mulţimi 32
Ptolemeu (Formula lui) 388
Puterea unei mulţimi 228
Puterea unui punct în raport cu un cerc 466
Puterea unei inversiuni 503

Radian 146
Raţional (Număr) 59
Răsturnare 491
Real (Număr) 63
Recurenţă (Raţionament prin) 40
Reflexivitate 29
Reţea de cercuri 474
Reuniune 27
Riemann (Geometria lui) 539
Rolle (Teorema lui) 110
Rotaţie (Mişcare de) 495
Rotaţie în spaţiu 489
Rotaţie plană 480

Scalar (Produs) 131
Scalari (Corp de) 73
Scară (Funcţie în) 106
Semicontinuitate 113
Sferică (Geometrie) 539
Simetrică (Relaţie) 29
Simetrizare 48
Similitudine 498
Similitudine (Anti-) 501
Simson (Dreapta lui) 465
Spaţiu punctual 79
Spaţiu vectorial 70
Stereografică (Proiecţie) 517
Stewart (Formula lui) 453
Submulţime 26
Surjecţie 83

Şir 228

Tales (Teorema lui) 82
Taylor (Formula pentru un polinom) 330
Topologie 96
Transcendent (Număr) 67
Transformare punctuală 88
Translaţie 402
Translaţie (Mişcare de) 495
Transmutata unei aplicaţii 90
Tranzitivitate 29

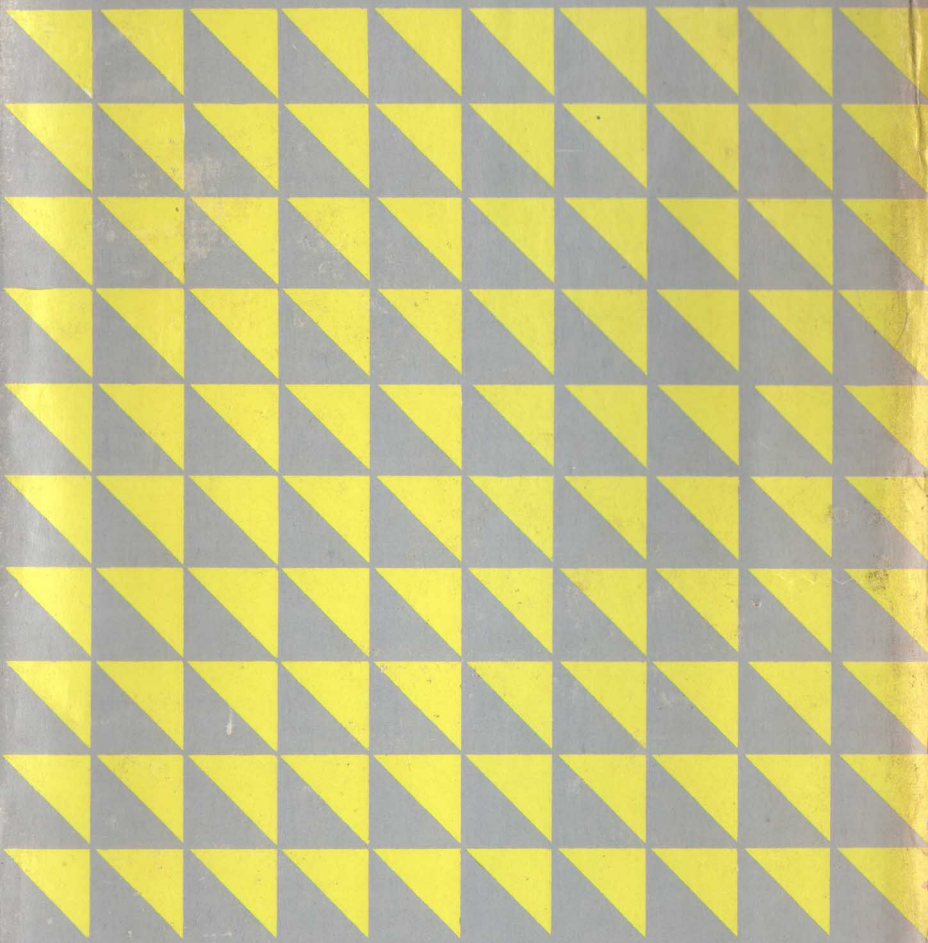
Unghi 137
Uniformă (Continuitate) 105

Lei 17,50

Lei 17,50

LUCIENNE FÉLIX

EXPUNERE MODERNĂ A MATEMATICII ELEMENTARE



editura ştiinţifică